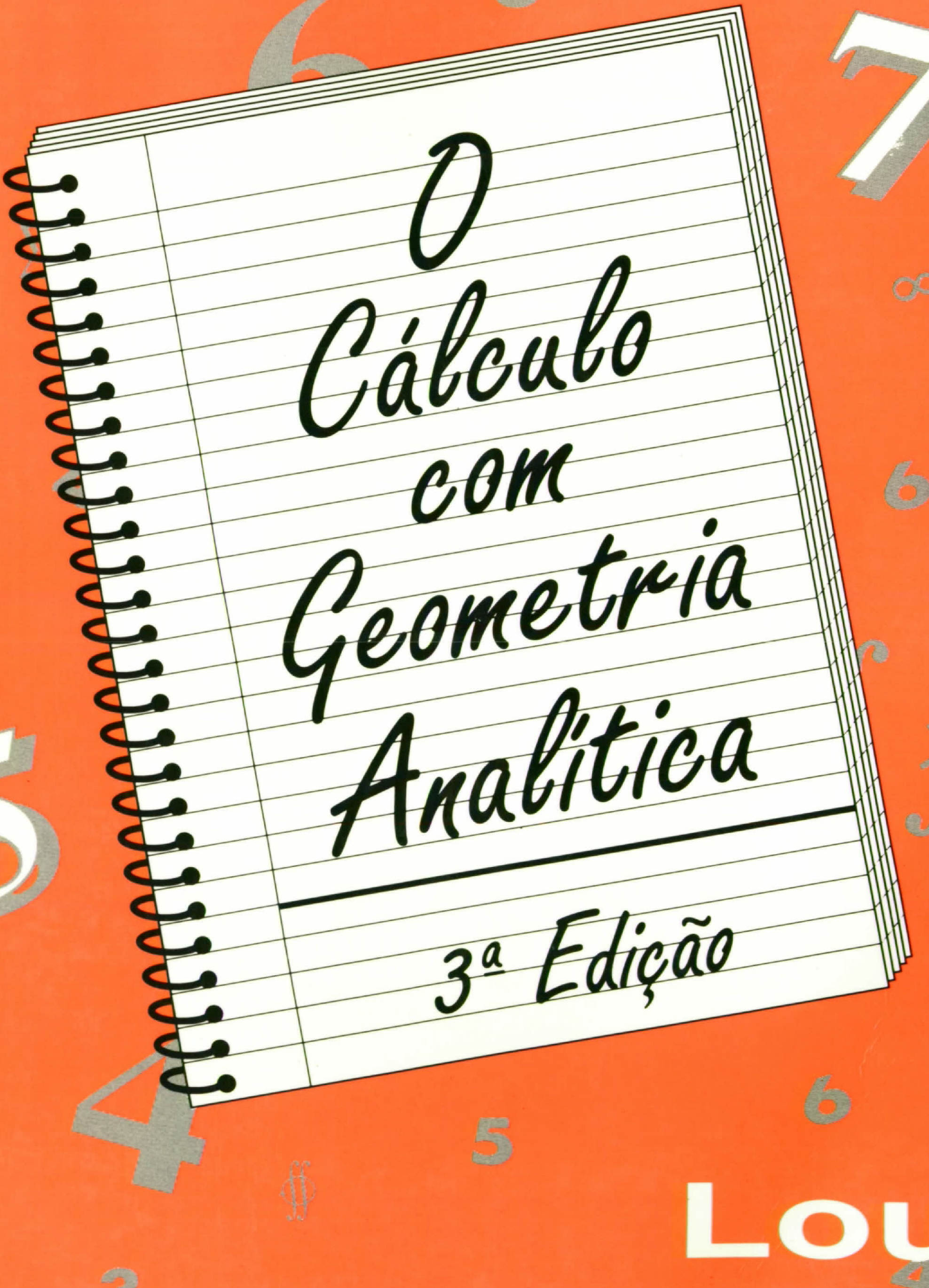
UM



O Cálculo com Geometria Analítica

3ª Edição

Louis Leithold

editora
HARBRA

Tradução:

CYRO DE CARVALHO PATARRA

Professor do Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
Ph. D. Northwestern University

Revisão Técnica:

WILSON CASTRO FERREIRA, Jr.
SILVIO PREGNOLATTO

Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Campinas

UM

O Cálculo com Geometria Analítica

3ª Edição

UM

O Cálculo com Geometria Analítica

3ª Edição

LOUIS LEITHOLD

editora HARBRA ltda.

Direção Geral: Julio E. Emöd
Supervisão Editorial: Maria Pia Castiglia
Coordenação Editorial: Marilu Bernardes Sória
Revisão de Estilo: Maria Lúcia G. Leite Rosa
Assistente Editorial: Mônica Roberta Suguiyama
Revisão de Provas: Melissa Mesquita Ponciano
Composição e Capa: AM Produções Gráficas Ltda.
Fotolitos: STAP Stúdio Gráfico
Impressão e Acabamento: Gráfica Paym

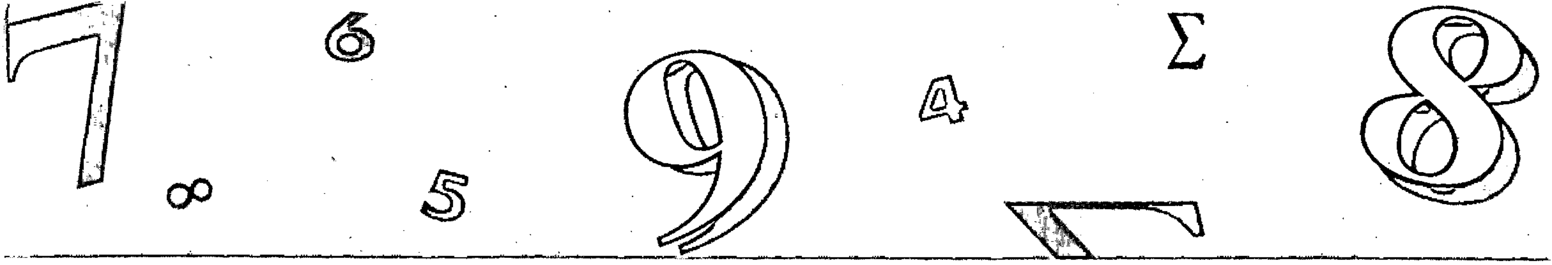
O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA - volume 1 - 3ª edição
Copyright © 1994 por **editora HARBRA ltda.**

Rua Joaquim Távora, 629 – Vila Mariana
04015-001 – São Paulo – SP
Promoção: (011) 5084-2482 e 5571-1122. Fax: (011) 5575-6876
Vendas: (011) 5549-2244 e 5571-0276. Fax: (011) 5571-9777

Tradução de *The Calculus with Analytic Geometry, 6th edition*
Copyright © 1990 por HarperCollins Publishers.
Publicado com a permissão de HarperCollins Publishers.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta edição pode ser utilizada ou reproduzida – em qualquer meio ou forma, seja mecânico ou eletrônico, fotocópia, gravação etc. – nem apropriada ou estocada em sistema de banco de dados, sem a expressa autorização da editora.

Impresso no Brasil *Printed in Brazil*



Conteúdo

VOLUME I

Prefácio ix
Agradecimentos xiv
Um Pouco de História xv

CAPÍTULO 1
NÚMEROS REAIS, FUNÇÕES E GRÁFICOS

1.1 Números Reais e Desigualdades 2
1.2 Retas e Coordenadas 13
1.3 Circunferências e Gráficos de Equações 25
1.4 Funções 31
1.5 Gáficos de Funções 40
1.6 As Funções Trigonométricas 45
Exercícios de Revisão 52

CAPÍTULO 2
LIMITES E CONTINUIDADE

2.1 O Limite de uma Função 56
2.2 Teoremas sobre Limites de Funções 64
2.3 Limites Laterais 73
2.4 Limites Infinitos 78
2.5 Limites no Infinito 88
2.6 Continuidade de uma Função em um Número 98
2.7 Continuidade de uma Função Composta e Continuidade em um Intervalo 107
2.8 Continuidade das Funções Trigonométricas e o Teorema do Confronto de Limites (ou Teorema do "Sanduíche") 114
2.9 Provas de Alguns Teoremas sobre Limites de Funções (Suplementar) 122
2.10 Teoremas Adicionais de Limites de Funções (Suplementar) 131
Exercícios de Revisão 135

CAPÍTULO 3
A DERIVADA E A DERIVAÇÃO

3.1 A Reta Tangente e a Derivada 139
3.2 Derivabilidade e Continuidade 148
3.3 Teoremas sobre Derivação de Funções Algébricas 156
3.4 Movimento Retilíneo e a Derivada como Taxa de Variação 163
3.5 Derivadas das Funções Trigonométricas 173
3.6 A Derivada de uma Função Composta e a Regra da Cadeia 181
3.7 A Derivada da Função Potência para Expoentes Racionais 190
3.8 Derivação Implícita 195
3.9 Taxas Relacionadas 199
3.10 Derivadas de Ordem Superior 205
Exercícios de Revisão 212

CAPÍTULO 4
VALORES EXTREMOS DAS FUNÇÕES, TÉCNICAS DE CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS E A DIFERENCIAL

4.1 Valor Funcional Máximo e Mínimo 217
4.2 Aplicações Envolvendo Extremos Absolutos num Intervalo Fechado 224
4.3 Teorema de Rolle e Teorema do Valor Médio 230
4.4 Funções Crescentes e Decrescentes e o Teste da Derivada Primeira 236
4.5 Concavidade e Pontos de Inflexão 241
4.6 O Teste da Derivada Segunda para Extremos Relativos 249
4.7 Traçando um Esboço do Gráfico de uma Função 254
4.8 Tratamento Adicional dos Extremos Absolutos e Aplicações 260
4.9 A Diferencial 269
4.10 Solução Numérica de Equações pelo Método de Newton (Suplementar) 277
Exercícios de Revisão 282

CAPÍTULO 5
INTEGRAÇÃO E A INTEGRAL DEFINIDA

5.1 Antidiferenciação 286
5.2 Algumas Técnicas de Antidiferenciação 295
5.3 Equações Diferenciais e Movimento Retilíneo 303
5.4 Área 312
5.5 A Integral Definida 324
5.6 Propriedades da Integral Definida 331
5.7 O Teorema do Valor Médio para Integrais 340
5.8 Os Teoremas Fundamentais do Cálculo 344
5.9 Área de uma Região Plana 352
5.10 Integração Numérica 359
Exercícios de Revisão 369

CAPÍTULO 6
APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

6.1 Volumes de Sólidos por Cortes, Discos e Anéis Circulares 374
6.2 Volumes de Sólidos por Invólucros Cilíndricos 383
6.3 Comprimento de Arco do Gráfico de uma Função 388
6.4 Centro de Massa de uma Barra 394
6.5 Centróide de uma Região Plana 400
6.6 Trabalho 407
6.7 Pressão Líquida (Suplementar) 413
Exercícios de Revisão 418

CAPÍTULO 7
FUNÇÕES INVERSAS, LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS

7.1 Funções Inversas 422
7.2 Teoremas da Função Inversa e a Derivada da Inversa de uma Função 431
7.3 A Função Logarítmica Natural 439
7.4 Diferenciação Logarítmica e Integrais que Resultam na Função Logarítmica Natural 449
7.5 A Função Exponencial Natural 455
7.6 Outras Funções Exponenciais e Logarítmicas 463

7.7 Aplicações da Função Exponencial Natural 469
7.8 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem (Suplementar) 481
Exercícios de Revisão 492

CAPÍTULO 8
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS E FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

8.1 As Funções Trigonométricas Inversas 496
8.2 Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas 503
8.3 Integrais que Resultam em Funções Trigonométricas Inversas 510
8.4 As Funções Hiperbólicas 514
8.5 As Funções Hiperbólicas Inversas (Suplementar) 523
Exercícios de Revisão 527

CAPÍTULO 9
TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

9.1 Integração por Partes 531
9.2 Integração de Potências de Seno e Co-Seno 537
9.3 Integração de Potências da Tangente, Co-Tangente, Secante e Co-Secante 542
9.4 Integração por Substituição Trigonométrica 545
9.5 Integração das Funções Racionais por Frações Parciais Quando o Denominador tem Somente Fatores Lineares 551
9.6 Integração das Funções Racionais por Frações Parciais Quando o Denominador Contém Fatores Quadráticos 561
9.7 Outras Substituições 566
9.8 Integrais que Resultam em Funções Hiperbólicas Inversas (Suplementar) 570
Exercícios de Revisão 575

CAPÍTULO 10
SECÇÕES CÔNICAS E COORDENADAS POLARES

10.1 A Parábola e Translação de Eixos 578
10.2 A Elipse 586
10.3 A Hipérbole 594
10.4 Rotação de Eixos 604
10.5 Coordenadas Polares 608
10.6 Gráficos de Equações em Coordenadas Polares 614
10.7 Área de uma Região em Coordenadas Polares 625
10.8 Um Tratamento Unificado de Secções Cônicas e Equações Polares das Cônicas 629
10.9 Retas Tangentes a Curvas em Coordenadas Polares (Suplementar) 638
Exercícios de Revisão 647

CAPÍTULO 11
FORMAS INDETERMINADAS, INTEGRAIS IMPRÓPRIAS E A FÓRMULA DE TAYLOR

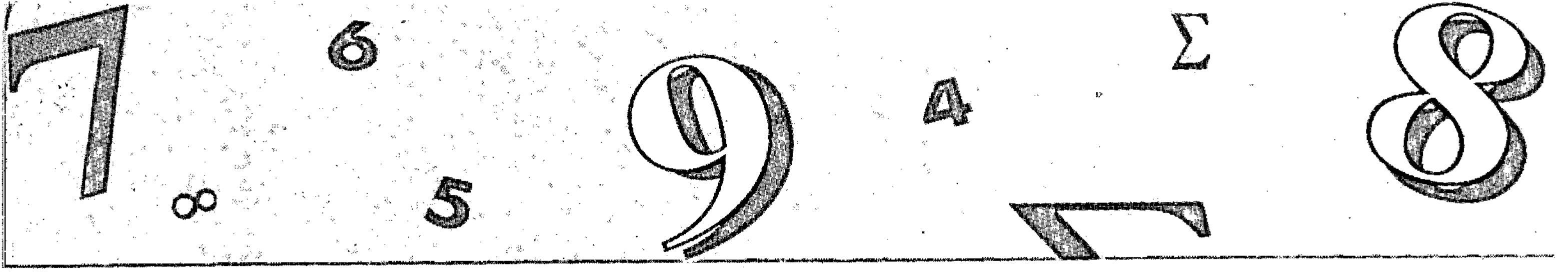
11.1 A Forma Indeterminada 0/0 651
11.2 Outras Formas Indeterminadas 660
11.3 Integrais Impróprias com Extremos de Integração Infinitos 665
11.4 Outras Integrais Impróprias 673
11.5 A Fórmula de Taylor 677
Exercícios de Revisão 684

Apêndice Uso de uma Tabela de Integrais A-1
Fórmulas O Alfabeto Grego F-1
Fórmulas de Geometria F-1
Fórmulas de Trigonometria F-2
Tabela de Derivadas F-3
Tabela de Integrais F-3
Respostas dos Exercícios de Número Ímpar R-1
Índice Remissivo I-1

VOLUME II

CAPÍTULO 12 SEQÜÊNCIAS E SÉRIES INFINITAS DE TERMOS CONSTANTES
CAPÍTULO 13 SÉRIES DE POTÊNCIAS
CAPÍTULO 14 VETORES NO PLAO E EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS
CAPÍTULO 15 VETORES EM UM ESPAÇO TRIDIMENSIONAL E GEOMETRIA ANALÍTICA SÓLIDA
CAPÍTULO 16 CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL
CAPÍTULO 17 DERIVADAS DIRECIONAIS, GRADIENTES E APLICAÇÕES DAS DERIVADAS PARCIAIS
CAPÍTULO 18 INTEGRAÇÃO MÚLTIPLA
CAPÍTULO 19 INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE CAMPOS VETORIAIS
CAPÍTULO 20 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Apêndice
Fórmulas
Respostas dos Exercícios de Número Ímpar
Índice Remissivo



Prefácio

> "Tudo deveria se tornar o mais simples possível, mas não simplificado"
>
> — ALBERT EINSTEIN

O Cálculo com Geometria Analítica foi planejado para futuros matemáticos e para estudantes cujo interesse primário seja Engenharia, Ciências Exatas e Humanas, ou áreas não-técnicas. As explanações passo-a-passo, os inúmeros exemplos descritos e a ampla variedade de exercícios continuam a ser os aspectos relevantes do livro nesta edição. Uma vez que um livro-texto deve ser escrito para o estudante, empenhei-me em manter uma apresentação de acordo com a experiência e a maturidade de um principiante, sem deixar que qualquer passagem fosse omitida ou ficasse sem explicação. Espero que o leitor tome consciência de que as demonstrações dos teoremas são necessárias; procurei torná-las bastante motivadoras e explicá-las cuidadosamente, de forma que sejam compreensíveis para o estudante que adquiriu um nível razoável de conhecimentos das secções que as precedem. Se um teorema está enunciado sem demonstração, a sua discussão foi ampliada com figuras e exemplos e, em tais casos, sempre ressaltei que se trata de uma ilustração do conteúdo do teorema, e não de uma demonstração. Nas Secções Suplementares do final dos capítulos aparecem algumas discussões teóricas as quais, se o estudante desejar, poderão ser omitidas sem prejuízo da seqüência do texto.

A TERCEIRA EDIÇÃO DE O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA

Desde a primeira edição deste livro em 1968, o curso de Cálculo sofreu mudanças significativas em seu conteúdo e ensino. A cada nova edição, tentei incorporar tais mudanças e manter um equilíbrio saudável entre uma abordagem rigorosa e um ponto de vista intuitivo. Os dezenove* capítulos de ***O Cálculo com Geometria Analítica*** formam quatro segmentos: capítulo 1, revisão de tópicos de pré-cálculo; capítulos 2-11 funções de uma única variável; capítulos 12-13, séries infinitas; e capítulos 14-19, vetores e funções de mais de uma variável. A terceira edição incorpora alterações em cada um desses segmentos, algumas delas foram feitas para refletir a importância cada vez maior de computadores e calculadoras programáveis, facilitando os cálculos.

---

* **N. do E.:** O Capítulo 20 foi escrito especialmente para a edição brasileira e trata das equações diferenciais.

TÓPICOS DE REVISÃO DO CÁLCULO

CAPÍTULO 1 Esse capítulo, "Números Reais, Funções e Gráficos", é menos detalhado do que nas edições anteriores. Uma secção sobre aspectos básicos do sistema de números reais é seguida por uma introdução à Geometria Analítica que inclui o material tradicional sobre retas e circunferências. É apresentada uma discussão sobre a definição de uma função, operações com funções e tipos de funções. A introdução de seis tipos de funções trigonométricas permite o seu uso nos exemplos de derivação e integração de funções não-algébricas.

FUNÇÕES DE UMA ÚNICA VARIÁVEL

CAPÍTULO 2 Com a secção sobre limites no infinito introduzida neste capítulo, a discussão de limite e continuidade é concluída em um mesmo capítulo. Esses tópicos constituem a essência de um curso inicial de Cálculo. Todos os teoremas de limite são enunciados, e algumas provas são apresentadas no texto, enquanto outras são propostas como exercícios. Nesta edição há exemplos e exercícios novos que envolvem o uso de calculadoras para lançar conjecturas sobre um determinado limite.

CAPÍTULO 3 Na secção 3.1, defino a reta tangente a uma curva para demonstrar, antecipadamente, a interpretação geométrica da derivada, definida na secção 3.2. A aplicação física de velocidade instantânea no movimento retilíneo é apresentada após a demonstração de teoremas sobre diferenciação. As derivadas das seis funções trigonométricas são apresentadas, tornando-se disponíveis como exemplos para a apresentação da regra da cadeia. Há alguns execícios novos que requerem o uso de calculadora para se estimar um dado valor da derivada, a partir da definição.

CAPÍTULO 4 Esse capítulo apresenta as aplicações tradicionais da derivada a problemas envolvendo máximos e mínimos, bem como o esboço de curvas. Os tópicos sobre limites no infinito e assíntotas verticais e horizontais passam para o capítulo 2. A secção sobre aplicações na Economia que aparecia neste capítulo nas edições anteriores foi suprimida, mas parte desse assunto foi discutido em outros capítulos. A secção sobre a diferencial foi mudada para este capítulo, de modo a ficar mais próxima de sua referência no tratamento da antidiferenciação.

CAPÍTULO 5 A integral definida e a integração são assuntos tratados no capítulo 5. As duas primeiras secções envolvem a antidiferenciação. Uso o termo "antidiferenciação" em vez de "integração indefinida", mas a notação padrão $\int f(x)\,dx$ é conservada. Essa notação irá sugerir a existência de alguma relação entre integrais definidas e antiderivadas, mas não vejo nenhuma inconveniência nisso, pois a apresentação dá a visão teórica apropriada da integral definida como o limite de somas. Dois métodos numéricos para aproximar a integral definida são dados na secção final do capítulo. Esses procedimentos são importantes devido à sua adequação a computadores e calculadoras programáveis. O material sobre a aproximação de integrais definidas inclui o enunciado de teoremas sobre os limites do erro envolvido nessas aproximações. O capítulo também inclui uma secção sobre equações diferenciais com variáveis separáveis, e a discussão completa da área de uma região plana.

CAPÍTULO 6

Nesse capítulo introduzi aplicações de integral definida que esclarecem não apenas as técnicas de manipulação, mas também os princípios envolvidos. Em cada aplicação, as definições dos novos termos são intuitivamente motivadas e explicadas. O tratamento de volumes de sólidos, assunto das duas primeiras secções, foi revisado. A secção 6.1 começa com volumes apresentando secções planas, e depois volumes de sólidos de revolução por discos e anéis circulares são considerados como casos especiais de volumes por cortes. Volumes de sólidos de revolução por invólucros cilíndricos são discutidos na secção 6.2. Outra aplicação geométrica da integral definida é o comprimento de arco na secção 6.3. As secções restantes do capítulo são dedicadas a aplicações físicas incluindo centro de massa de barras e regiões planas, trabalho e pressão líquida.

CAPÍTULOS 7 e 8

Funções inversas são tratadas nas duas primeiras secções do capítulo 7, e as cinco secções seguintes são dedicadas às funções logarítmica e exponencial. A função logarítmica natural é definida primeiro e depois a função exponencial natural é definida como a sua inversa. Esse procedimento permite-nos dar um significado preciso a um expoente irracional de um número positivo. Em seguida definimos a função exponencial de base *a,* onde *a* é positivo e sua inversa é a função logarítmica de base *a*. Aplicações dessas funções incluem as leis do crescimento e decaimento, o crescimento limitado envolvendo a curva de aprendizado e a função densidade de probabilidade normal padrão. A secção 7.8, introduzida nesta edição, envolve a solução de equações diferenciais lineares de primeira ordem. No capítulo 8, as demais funções transcendentais (não-algébricas) são introduzidas. Essas são as funções trigonométricas inversas e as funções hiperbólicas.

CAPÍTULO 9

Técnicas de integração envolvem um aspecto computacional importante do Cálculo. São discutidas nesse capítulo que foi reduzido para oito secções nesta edição. Expliquei os fundamentos teóricos de cada método diferente, após uma motivação inicial. O domínio das técnicas de integração depende de exemplos, e usei, como ilustrações, problemas que o estudante certamente encontrará na prática. Duas outras aplicações de integração são introduzidas na secção 9.5: crescimento logístico, ocorrendo em Economia, Biologia e Sociologia; e a lei da ação de massas na Química.

CAPÍTULO 10

A ordem dos tópicos da Geometria Analítica nesse capítulo foi alterada nesta edição. As quatro primeiras secções pertencem a secções cônicas: a parábola, a elipse e a hipérbole. Cada uma dessas cônicas é introduzida pela indicação de como ela é formada ao interceptarmos um plano com um cone; então a definição analítica é dada e sua equação em coordenadas retangulares é obtida. As coordenadas polares e algumas de suas aplicações são apresentadas nas secções de 10.5 a 10.7. As equações polares das cônicas aparecem na secção 10.8, onde ocorrem como parte de um tratamento unificado de secções cônicas.

CAPÍTULO 11

Esse capítulo, "Formas Indeterminadas, Integrais Impróprias e a Fórmula de Taylor", foi posicionado de modo a preceder imediatamente as séries infinitas, onde muitos dos resultados são aplicados. As aplicações de integrais impróprias, que aparecem nas secções 11.3 e 11.4, incluem a função densidade de probabilidade, além de outras usadas em Geometria e Economia.

SÉRIES INFINITAS

CAPÍTULOS 12 e 13 O estudo de séries infinitas nesses dois capítulos é considerado como um segmento separado do curso, de forma a evidenciar que se trata de um conteúdo independente, que pode ser estudado quando se desejar, uma vez que o estudo do cálculo de funções de uma única variável tenha sido completado. O capítulo 12 é dedicado a seqüências e séries infinitas de termos constantes, e sua última secção apresenta um resumo de testes para convergências de uma série infinita. O capítulo 13 trata de séries infinitas de termos variáveis denominadas séries de potências. O conjunto de exercícios foi ampliado, em relação às edições anteriores, para incluir mais aplicações.

VETORES E FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

CAPÍTULOS 14 e 15 Esses dois capítulos contêm o cálculo de vetores, bem como uma abordagem vetorial à Geometria Analítica dos Sólidos. As primeiras secções do capítulo 14 sobre vetores no plano podem ser estudadas após o capítulo 5, se você desejar estudar os vetores mais cedo, em seu curso. O capítulo 15 trata de vetores no espaço tridimensional e, se desejado, os tópicos das secções 15.1 e 15.2 podem ser estudados simultaneamente com os seus correspondentes no capítulo 14. As aplicações de vetores à Geometria, Física e Engenharia ocorrem em ambos os capítulos.

CAPÍTULOS 16, 17* e 18* A diferencial e o cálculo integral de funções de mais de uma variável são apresentados nesses três capítulos. Limites, continuidade, derivação parcial, diferenciabilidade e a diferencial total são discutidos no capítulo 16, onde as aplicações incluem taxas de variações e cálculos aproximados. No capítulo 17, uma secção sobre derivadas direcionais e gradientes é seguida por uma secção que mostra a aplicação do gradiente para encontrarmos uma equação do plano tangente à superfície. Outras aplicações de derivadas parciais no capítulo 17 são a solução de problemas de extremos e os multiplicadores de Lagrange. As equações diferenciais exatas são resolvidas na secção 17.5. A integral dupla de uma função de duas variáveis e a integral tripla de uma função de três variáveis, juntamente com algumas aplicações à Física, Engenharia e Geometria, são tratadas no capítulo 18.

CAPÍTULO 19 O capítulo "Introdução ao Cálculo de Campos Vetoriais", recebeu um tratamento mais detalhado de Cálculo Vetorial. O conteúdo inclui integrais de linha e de superfície, o teorema de Green, o teorema da divergência de Gauss e o teorema de Stoke. A abordagem neste capítulo é intuitiva e são apresentadas aplicações à Física e à Engenharia.

---

* **N. do E.:** As secções 17.4, sobre funções implícitas e sua derivação, e 18.8, sobre mudança de variáveis e integrais múltiplas, foram especialmente elaboradas para a edição brasileira.

CAPÍTULO EXCLUSIVO PARA A EDIÇÃO BRASILEIRA

CAPÍTULO 20 Escrito pelo prof. Cyro Patarra, prof. do IME-USP, este capítulo sobre equações diferenciais foi especialmente concebido para atender às exigências do currículo das faculdades brasileiras. As suas secções apresentam os conceitos básicos das diferentes equações diferenciais e os métodos de resolução.

SECÇÕES SUPLEMENTARES

Dez secções, que aparecem no final de alguns capítulos, são designadas como suplementares. Esses tópicos independentes podem ser estudados ou omitidos sem afetar o entendimento da matéria subseqüente. As secções suplementares são de dois tipos. Algumas apresentam material adicional que não faz necessariamente parte do conteúdo tradicional de um curso de Cálculo: as secções 4.10, 6.7, 7.8, 8.5, 9.8, 10.9, 14.8. Outras incluem discussões teóricas, inserindo provas de alguns teoremas: as secções 2.9, 2.10 e 16.8. Ambos os tipos aumentam a flexibilidade do texto.

EXEMPLOS E ILUSTRAÇÕES

Os exemplos e ilustrações — quase 1.000 no total — aparecem em todas as secções. Os exemplos, que foram cuidadosamente escolhidos para preparar os estudantes para os exercícios, deveriam ser usados como modelos para suas soluções. Uma ilustração é utilizada para demonstrar um conceito particular, uma definição ou teorema; é um protótipo da idéia apresentada.

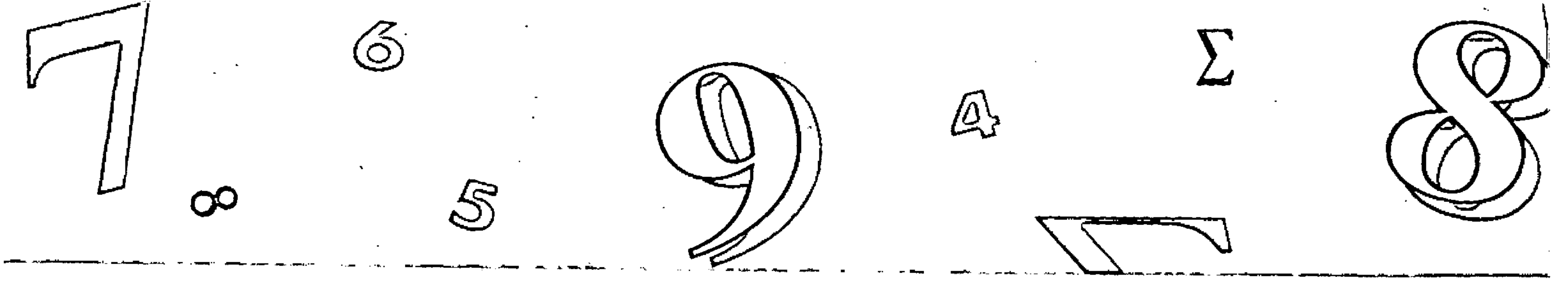
EXERCÍCIOS

Há, agora, mais de 7.400 exercícios, revisados e ordenados de acordo com o grau de dificuldade, para propiciar uma ampla variedade de tipos, abrangendo desde problemas téoricos e aplicados, até aqueles que são computacionais. Eles aparecem no final das secções e como exercícios de revisão seguindo a última secção de cada capítulo. As respostas aos exercícios de número ímpar são dadas no final do livro.

GRÁFICOS TRIDIMENSIONAIS

Para atender às necessidades dos estudantes de ter uma apresentação de gráficos tridimensionais mais moderna e fácil de visualizar, mais de 200 figuras fazem parte desta nova edição. Muitas delas foram geradas por computadores, para assegurar a precisão matemática. Essas figuras, que os instrutores acharão mais claras que o estilo de sólidos geométricos feitos com aerógrafo na edição anterior e nos textos mais antigos, foram criadas com auxílio do programa Mathematica e o uso de *Illustrator 88*.

Louis Leithold.



Agradecimentos

Aos professores que mais me influenciaram:

Florence Balensiefer; Inglês, Lowell High Scholl, São Francisco
Ivan Barker; Matemática, Lowell High Schooll, São Francisco
Alan McKeever; Jornalismo, Lowell High Scholl, São Francisco
Benjamin Bernstein; Matemática, University of California, Berkeley
Pauline Sperry; Matemática, University of California, Berkeley
Virginia Wakerling; Matemática, University of California, Berkeley

Aos que foram meus alunos em:

Phoenix College; California State University, Los Angeles; University of Southern California; Open University of Great Britain; Pepperdine University

Aprendi com todos eles.

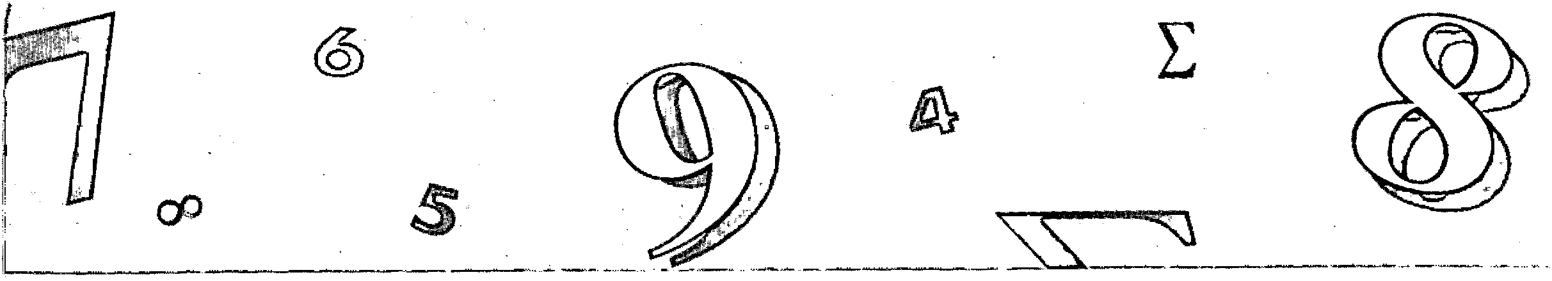
Aos revisores da edição americana:

Peter P. Andre, United States Naval Academy; Leon E. Arnold, Delaware County Community College; Harold R. Bennett, Texas Tech University; Michael L. Berry, West Virginia Wesleyan College; John Broughton, Indiana University of Pennsylvania; Floyd A. Cohen, California State University, Long Beach; Joel Davis, Oregon State University; K. Joe Davis, East Carolina University; N. J. DeLillo, Manhattan College; William A. Echols, Houston Community College; John Garlow, Tarrant Country Junior College; Stuart Goldenberg, California Polytechnic State University, San Luis Obispo; Joel K. Haack, Oklahoma State University; Norvin Holm, Charles S. Mott Community College; Roy A. Johnson, Washington State University; Dan Kemp, South Dakota State University; Joh Klippert, James Madison University; Walter F. Martens, University of Alabama, Birmingham; Roger B. Nelsen, Lewis and Clark College; William L. Perry, Texas A&M University; Walter A. Rosenkrantz, University of Massachusetts, Amherst; Daniel B. Shapiro, Ohio State University; Charles R. Stone, Dekalb College; Jere Strickland, James H. Faulkner State Junior College; Richard B. Thompson, University of Arizona; G. B. Turney, University of Texas, Arlington; J. Terry Wilson, San Jacinto College; Richard M. Witt, University of Wisconsin-Eau Claire

Aos que auxiliaram na resolução dos exercícios:

Leon Gerber, St. John's University; Gloria Langer, University of Colorado

A essas pessoas e a todos aqueles que usaram as primeiras edições e sugeriram mudanças, expresso a minha profunda admiração.

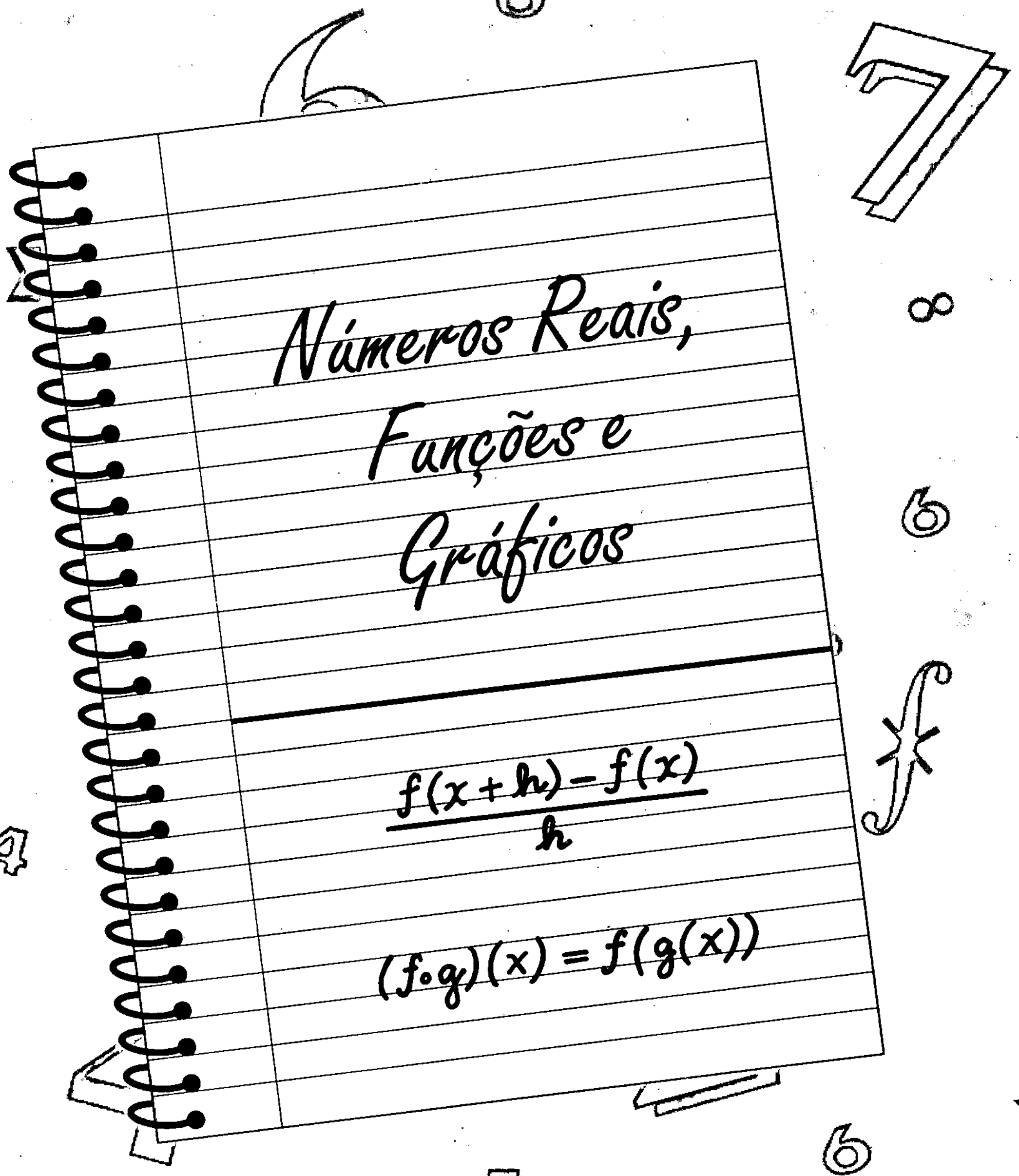


Um Pouco de História

Algumas idéias do Cálculo podem ser encontradas nos trabalhos dos matemáticos gregos da Antiguidade, da época de Arquimedes (287-212 A.C.) e em trabalhos do início do século dezessete por René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Entretanto, a invenção do Cálculo é frequentemente atribuída a Sir Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pois eles começaram a efetuar a generalização e unificação do assunto. Havia outros matemáticos do século dezessete e dezoito que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo; alguns deles foram Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph L. Lagrange (1736-1813). No entanto, não foi antes do século dezenove que os processos do Cálculo receberam fundamentação sólida por parte de matemáticos como Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin L. Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) e Richard Dedekind (1831-1916).

UM

Números Reais, Funções e Gráficos



Aprender Cálculo pode ser sua experiência educacional mais empolgante e estimulante pois é a base para quase toda a Matemática e para muitas das grandes realizações no mundo moderno. Você deverá iniciar o estudo de Cálculo com o conhecimento de certos conceitos matemáticos. Em primeiro lugar, pressupõe-se que você possua conhecimentos de Álgebra e Geometria, do primeiro e do segundo graus. Além disso, existem tópicos que são de extrema importância. Talvez você já os tenha estudado em algum curso de Matemática; senão, você terá um primeiro contato com eles neste capítulo.

Você precisa ter familiaridade com fatos sobre os *números reais* e fazer operações envolvendo desigualdades com desenvoltura; esse material será o objeto da primeira secção. As três secções a seguir contêm uma introdução a algumas noções de *Geometria Analítica* que serão necessárias posteriormente.

Função é um dos conceitos básicos em Cálculo e será definida aqui como um conjunto de pares ordenados. Essa idéia é usada para enfatizar o conceito de função como uma correspondência entre conjuntos de números reais. A notação de função, tipos de funções e operações com funções também serão discutidos na Secção 1.4, enquanto os gráficos de funções serão tratados na Secção 1.5.

Provavelmente você já tenha estudado *funções trigonométricas* em algum curso anterior, mas uma revisão das definições básicas será apresentada na Secção 1.6. Há também uma aplicação da função tangente à inclinação de uma reta.

Dependendo de seu preparo, esse capítulo poderá ser estudado em detalhes, ser tratado como uma revisão ou omitido.

1.1 NÚMEROS REAIS E DESIGUALDADES

O **sistema numérico real** consiste em um conjunto de elementos chamados de **números reais** e duas operações denominadas **adição** e **multiplicação**, denotadas pelos símbolos + e $\cdot$, respectivamente. Se a e b forem elementos do conjunto R, $a + b$ denotará a **soma** de a e b e $a \cdot b$ (ou ab) denotará o seu **produto**. A operação de subtração é definida pela igualdade

$$a - b = a + (-b)$$

onde $-b$ denota o **negativo** de b, tal que $b + (-b) = 0$. A operação de **divisão** é definida pela igualdade

$$a \div b = a \cdot b^{-1} \qquad b \neq 0$$

onde b^{-1} denota o **recíproco** de b, tal que $b \cdot b^{-1} = 1$.

O sistema numérico real pode ser inteiramente descrito por um conjunto de axiomas (a palavra **axioma** é usada para indicar uma afirmação formal considerada verdadeira, dispensando provas). Com esses axiomas podemos deduzir as propriedades dos números reais das quais seguem as operações algébricas de adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como os conceitos algébricos de resolução de equações, fatoração e assim por diante.

As propriedades que podem ser obtidas como conseqüências lógicas dos axiomas são os **teoremas**. No enunciado da maioria dos teoremas existem duas partes: a parte do "se", chamada de **hipótese** e a parte do "então", chamada de **conclusão**. A argumentação que verifica a veracidade de um teorema é uma **demonstração** (ou **prova**), a qual consiste em mostrar que a conclusão é conseqüência de se admitir a hipótese como verdadeira.

Um número real é positivo, negativo ou zero e qualquer número real pode ser classificado como *racional* ou *irracional*. Um **número racional** é qualquer número que pode ser expresso como a razão de dois inteiros. Isto é, um número racional é da forma p/q, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$. Os números racionais consistem em:

Os **inteiros** (positivos, negativos e zero)

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

As **frações** positivas e negativas, como

$$\tfrac{2}{7} \qquad -\tfrac{4}{5} \qquad \tfrac{83}{5}$$

Os **decimais que terminam** positivos e negativos, como

$$2{,}36 = \frac{236}{100} \qquad -0{,}003251 = -\frac{3.251}{1.000.000}$$

Os **decimais que não terminam mas apresentam repetição periódica**, como

$0{,}333\ldots = \frac{1}{3} \qquad -0{,}549549549\ldots = -\frac{61}{111}$

Os números reais que não são racionais são chamados de **números irracionais.** Esses são os decimais **que não terminam e não são periódicos**, por exemplo,

$\sqrt{3} = 1{,}732\ldots \qquad \pi = 3{,}14159\ldots$

Vamos usar na discussão a seguir a notação e terminologia da teoria dos conjuntos. A idéia de *conjunto* é usada amplamente em Matemática, sendo esse um conceito tão básico que dele não será dada aqui uma definição formal. Podemos dizer que um *conjunto* é uma coleção de objetos e os objetos de um conjunto são chamados de **elementos**. Se todo elemento de um conjunto S for também elemento de um conjunto T, então S será um **subconjunto** de T. Em Cálculo estamos interessados no conjunto R dos números reais. Dois exemplos de subconjuntos de R são o conjunto N dos números naturais (os inteiros positivos) e o conjunto Z dos inteiros.

Vamos usar o símbolo $\in$ para indicar que um determinado elemento pertence a um conjunto. Assim, podemos escrever que $8 \in N$, e lemos: "8 é um elemento de N". A notação $a, b \in S$ indica que ambos a e b são elementos de S. O símbolo $\notin$ indica "não é um elemento de". Assim, entendemos $\frac{1}{2} \notin N$ como "$\frac{1}{2}$ não é um elemento de N".

Um par de chaves { } usadas para delimitar palavras ou símbolos pode descrever um conjunto. Se S for o conjunto dos números naturais menores do que 6, podemos escrever o conjunto S como

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Podemos também escrever o conjunto S como

{x, tal que x seja um número natural menor do que 6}

onde o símbolo x é chamado de *variável*. Uma **variável** é um símbolo usado para representar qualquer elemento de um conjunto dado. Outra maneira de escrever o conjunto S acima é usar a chamada **notação construtiva de conjunto,** onde uma barra vertical é usada em lugar das palavras *tal que*:

{$x \mid x$ seja um número natural menor do que 6}

que lemos: "o conjunto de todos os x, tal que x seja um número natural menor do que 6".

Dois conjuntos A e B serão **iguais**, e escrevemos $A = B$, se A e B tiverem elementos idênticos. A **união** de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, que lemos "A união B", é o conjunto de todos os elementos que estão em A ou em B, ou em ambos. A **intersecção** de A e B, denotada por $A \cap B$, que lemos "A intersecção B", é o conjunto dos elementos que estão em A e B. O conjunto que não contém nenhum elemento é chamado de **conjunto vazio**, sendo denotado por $\varnothing$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Suponha $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$, e $C = \{2, 10\}$. Então

$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16\} \qquad A \cap B = \{4\}$

$B \cup C = \{1, 2, 4, 9, 10, 16\} \qquad B \cap C = \varnothing$ ◀

Há uma ordenação para o conjunto R através de uma relação denotada pelos símbolos $<$ (lemos "é menor do que") e $>$ (lemos "é maior do que").

1.1.1 DEFINIÇÃO

Se $a, b \in R$,

(i) $a < b$ se e somente se $b - a$ for positivo;
(ii) $a > b$ se e somente se $a - b$ for positivo.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2**

$3 < 5$ pois $5 - 3 = 2$, e 2 é positivo
$-10 < -6$ pois $-6 - (-10) = 4$, e 4 é positivo
$7 > 2$ pois $7 - 2 = 5$, e 5 é positivo
$-2 > -7$ pois $-2 - (-7) = 5$, e 5 é positivo
$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ pois $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$, e $\frac{1}{12}$ é positivo ◀

Vamos definir agora os símbolos $\leqslant$ (lemos "é menor do que ou igual a") e $\geqslant$ (lemos "é maior do que ou igual a").

1.1.2 DEFINIÇÃO

Se $a, b \in R$,

(i) $a \leqslant b$ se e somente se for válida qualquer uma das duas relações $a < b$ ou $a = b$;
(ii) $a \geqslant b$ se e somente se for válida qualquer uma das duas relações $a > b$ ou $a = b$.

As afirmações $a < b$, $a > b$, $a \leqslant b$ e $a \geqslant b$ são chamadas de **desigualdades.** Especificando, $a < b$ e $a > b$ são chamadas de desigualdades **estritas**, enquanto que $a \leqslant b$ e $a \geqslant b$ são denominadas desigualdades **não-estritas.**

O teorema a seguir decorre imediatamente da Definição 1.1.1.

1.1.3 TEOREMA

(i) $a > 0$ se e somente se a for positivo;
(ii) $a < 0$ se e somente se a for negativo.

Um número x está **entre** a e b se $a < x$ e $x < b$. Podemos escrever isso como uma **seqüência de desigualdades**, da seguinte forma:

$$a < x < b$$

Outra seqüência de desigualdades é

$$a \leqslant x \leqslant b$$

que significa que acontecem ambas as desigualdades $a \leqslant x$ e $x \leqslant b$. Outras seqüências de desigualdades são $a \leqslant x < b$ e $a < x \leqslant b$.

O teorema a seguir pode ser provado usando os axiomas sobre o conjunto R e os teoremas de 1.1.1 a 1.1.3.

1.1.4 TEOREMA

(i) Se $a > 0$ e $b > 0$ então $a + b > 0$.
(ii) Se $a > 0$ e $b > 0$ então $ab > 0$.

A parte (i) do teorema acima estabelece que a soma de dois números positivos é positiva e a parte (ii) estabelece que o produto de dois números positivos é positivo.

1.1.5 TEOREMA
Propriedade Transitiva da Ordem

Se $a, b, c \in R$, e
se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se $x < 5$ e $5 < y$, então, pela propriedade transitiva da ordem, decorre $x < y$. ◀

1.1.6 TEOREMA Suponhamos que $a, b, c \in R$.

(i) Se $a < b$ então $a + c < b + c$.
(ii) Se $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$.
(iii) Se $a < b$ e $c < 0$ então $ac > bc$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** (a) Se $x < y$, segue, do Teorema 1.1.6(i), que $x + 4 < y + 4$. Por exemplo, $3 < 9$; assim $3 + 4 < 9 + 4$ ou, equivalentemente, $7 < 13$. Além disso, se $x < y$, então $x - 11 < y - 11$. Por exemplo, $3 < 9$; assim $3 - 11 < 9 - 11$ ou, equivalentemente, $-8 < -2$.

(b) Se $x < y$, segue do Teorema 1.1.6(ii) que $7x < 7y$. Por exemplo, como $5 < 8$, então $7 \cdot 5 < 7 \cdot 8$ ou, equivalentemente, $35 < 56$.

(c) Como $4 < 6$, então se $z < 0$, segue do Teorema 1.1.6(iii) que $4z > 6z$. Por exemplo, como $4 < 6$, então $4(-3) > 6(-3)$ ou, equivalentemente, $-12 > -18$. ◀

A parte (ii) do Teorema 1.1.6 estabelece que se ambos os membros de uma desigualdade forem multiplicados por um número positivo, o sentido da desigualdade permanecerá inalterado, enquanto que a parte (iii) estabelece que se ambos os membros de uma desigualdade forem multiplicados por um número negativo, o sentido da desigualdade será invertido. As partes (ii) e (iii) também são válidas para a divisão, pois dividir ambos os membros de uma desigualdade por um número $d (d \neq 0)$ é equivalente a multiplicá-los por $\frac{1}{d}$.

1.1.7 TEOREMA Se $a < b$ e $c < d$ então $a + c < b + d$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Se $x < 8$ e $y < -3$, então temos, pelo Teorema 1.1.7, que $x + y < 8 + (-3)$; isto é, $x + y < 5$. ◀

Vamos impor ao conjunto R a condição chamada de **axioma do completamento** (Axioma 12.2.5). O enunciado desse axioma será adiado até a Secção 12.2, pois requer uma terminologia que será melhor introduzida e discutida mais adiante. Entretanto, daremos agora uma interpretação geométrica do conjunto dos números reais, associando-os aos pontos de uma reta, chamada **eixo**. O axioma do completamento garante que existe uma correspondência um a um, ou seja, biunívoca, entre o conjunto R e o conjunto de pontos de um eixo.

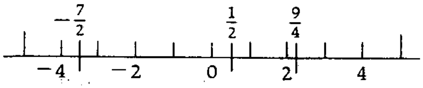


FIGURA 1

Veja a Figura 1, onde o eixo é uma reta horizontal. Um ponto do eixo é escolhido para representar o número 0. Esse ponto é chamado de **origem**. Uma unidade de distância é escolhida. Então, cada número positivo x é representado pelo ponto localizado a uma distância de x unidades à direita da origem, e cada número negativo x é representado pelo ponto localizado a uma distância de $-x$ unidades à esquerda da origem (note que se x for negativo, então $-x$ será positivo). A cada número real corresponde um único ponto sobre o eixo e a cada ponto sobre o eixo está associado um único número real; logo, há uma correspondência biunívoca entre R e os pontos do eixo. Assim, os pontos do eixo são identificados com os números que eles representam, e o mesmo símbolo será usado tanto para o número como para o ponto sobre o eixo que representa o número. Identificamos R como o eixo, que por sua vez é chamado de **reta numérica real**.

Vemos que $a < b$ se e somente se o ponto que representa o número a estiver à esquerda do ponto que representa o número b. Da mesma forma, $a > b$ se e somente se o ponto que representa a estiver à direita do ponto que representa

b. Por exemplo, o número 2 é menor do que o número 5 e o ponto 2 está à esquerda do ponto 5. Poderíamos escrever também $5 > 2$ e dizer que o ponto 5 está à direita do ponto 2.

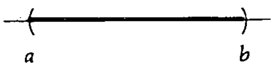


FIGURA 2

O conjunto de todos os números x que satisfazem a seqüência de desigualdades $a < x < b$ é chamado de **intervalo aberto**, sendo denotado por (a, b). Logo

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

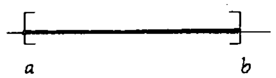


FIGURA 3

O **intervalo fechado** de a até b é o intervalo aberto (a, b) mais os dois pontos extremos a e b, sendo denotado por $[a, b]$. Assim

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

A Figura 2 ilustra o intervalo aberto (a, b), e a Figura 3 ilustra o intervalo fechado $[a, b]$.

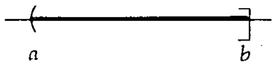


FIGURA 4

O **intervalo semi-aberto à esquerda** é o intervalo aberto (a, b), mais o extremo direito b. É denotado por $(a, b]$; assim

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

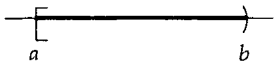


FIGURA 5

Definimos **intervalo semi-aberto à direita** de forma análoga e o denotamos por $[a, b)$. Assim

$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$$

A Figura 4 ilustra o intervalo $(a, b]$ e a Figura 5 ilustra o intervalo $[a, b)$.

Usaremos o símbolo $+\infty$ (infinito positivo) e o símbolo $-\infty$ (infinito negativo); contudo, é necessário cuidado para não confundir esses símbolos com os números reais, pois eles não satisfazem as propriedades dos números reais. Temos os seguintes intervalos:

$$\begin{aligned} (a, +\infty) &= \{x \mid x > a\} \\ (-\infty, b) &= \{x \mid x < b\} \\ [a, +\infty) &= \{x \mid x \geqslant a\} \\ (-\infty, b] &= \{x \mid x \leqslant b\} \\ (-\infty, +\infty) &= R \end{aligned}$$

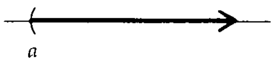


FIGURA 6

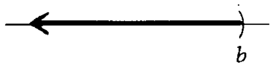


FIGURA 7

A Figura 6 ilustra o intervalo $(a, +\infty)$ e a Figura 7 ilustra o intervalo $(-\infty, b)$. Note que $(-\infty, +\infty)$ denota o conjunto de todos os números reais.

Para cada um dos intervalos (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ e $(a, b]$ os números a e b são chamados de **extremos** do intervalo. O intervalo fechado $[a, b]$ contém ambos os extremos, enquanto que o intervalo aberto (a, b) não contém nenhum extremo. O intervalo $[a, b)$ contém o extremo esquerdo, mas não o direito, enquanto que o intervalo $(a, b]$ contém o extremo direito, mas não o esquerdo. Um intervalo aberto pode ser considerado como aquele que não contém nenhum extremo e o intervalo fechado pode ser considerado como aquele que contém ambos os extremos. Conseqüentemente, o intervalo $[a, +\infty)$ é considerado como fechado, pois contém o seu único extremo a. Da mesma forma, $(-\infty, b]$ é um intervalo fechado, enquanto que $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b)$ são abertos. Os intervalos $[a, b)$ e $(a, b]$ não são fechados nem abertos. O intervalo $(-\infty, +\infty)$ não tem extremos, sendo considerado tanto aberto como fechado.

São usados intervalos para representar *conjuntos-soluções* de desigualdades. O **conjunto-solução** de uma desigualdade é o conjunto de todos os números que satisfazem a desigualdade.

EXEMPLO 1 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da desigualdade

$$2 + 3x < 5x + 8$$

Solução As seguintes desigualdades são equivalentes

$$\begin{aligned} 2 + 3x &< 5x + 8 \\ 2 + 3x - 2 &< 5x + 8 - 2 \\ 3x &< 5x + 6 \\ -2x &< 6 \\ x &> -3 \end{aligned}$$

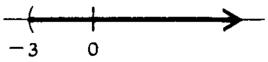


FIGURA 8

Portanto, o conjunto-solução é o intervalo $(-3, +\infty)$, ilustrado na Figura 8.

EXEMPLO 2 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da desigualdade

$$4 < 3x - 2 \leqslant 10$$

Solução Adicionando 2 a cada membro da desigualdade obtemos desigualdades equivalentes

$$\begin{aligned} 6 &< 3x \leqslant 12 \\ 2 &< x \leqslant 4 \end{aligned}$$

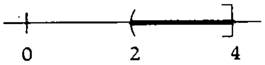


FIGURA 9

Assim, o conjunto-solução é o intervalo $(2, 4]$, conforme ilustrado na Figura 9.

EXEMPLO 3 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da desigualdade

$$\frac{7}{x} > 2$$

Solução Queremos multiplicar ambos os membros da desigualdade por x. Mas, o sentido da desigualdade resultante dependerá de x ser positivo ou negativo. Observe que se $x < 0$, então

$$\frac{7}{x} < 0$$

o que contradiz a desigualdade dada. Logo, precisamos considerar somente $x > 0$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade dada por x, obtemos as seguintes desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned} 7 &> 2x \\ \tfrac{7}{2} &> x \\ x &< \tfrac{7}{2} \end{aligned}$$

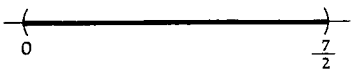


FIGURA 10

O conjunto-solução da desigualdade é $\{x \mid x > 0\} \cap \{x \mid x < \frac{7}{2}\}$ ou, equivalentemente, $\{x \mid 0 < x < \frac{7}{2}\}$, que é o intervalo $(0, \frac{7}{2})$, conforme a Figura 10.

EXEMPLO 4 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da desigualdade

$$\frac{x}{x-3} < 4$$

Solução Para multiplicar ambos os membros da desigualdade por $x - 3$, precisamos considerar dois casos.

Caso 1: $x - 3 > 0$; isto é, $x > 3$.

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $(x - 3)$ obtemos

$$\begin{aligned} x &< 4x - 12 \\ -3x &< -12 \\ x &> 4 \end{aligned}$$

Assim, o conjunto-solução do Caso 1 é $\{x \mid x > 3\} \cap \{x \mid x > 4\}$ ou, equivalentemente, $\{x \mid x > 4\}$, que é o intervalo $(4, +\infty)$.

Caso 2: $x - 3 < 0$; isto é, $x < 3$.

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $(x - 3)$ e invertendo o sentido da desigualdade, temos

$$\begin{aligned} x &> 4x - 12 \\ -3x &> -12 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

Logo, x deve ser menor do que 4 e também menor do que 3. Assim, o conjunto-solução do Caso 2 será o intervalo $(-\infty, 3)$.

Se os conjuntos-soluções para os Casos 1 e 2 forem combinados, obteremos $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$, que está ilustrado na Figura 11.

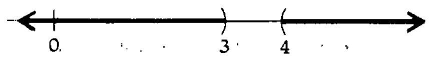


FIGURA 11

O conceito de *valor absoluto* de um número é usado em algumas definições importantes. Além disso, você precisará trabalhar com desigualdades envolvendo valores absolutos.

1.1.8 DEFINIÇÃO

O **valor absoluto** de x, denotado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

▶ ILUSTRAÇÃO 6

$$|3| = 3 \qquad \begin{aligned} |-5| &= -(-5) \\ &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |8 - 14| &= |-6| \\ &= -(-6) \\ &= 6 \end{aligned}$$

◀

Da definição, o valor absoluto de um número é um número positivo ou zero; isto é, não-negativo.

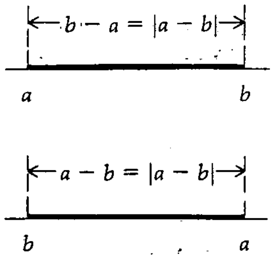


FIGURA 12

Em termos geométricos, o valor absoluto de um número x é sua distância ao 0. Em geral, $|a - b|$ é a distância entre a e b, sem levar em conta qual é o maior número. Veja a Figura 12.

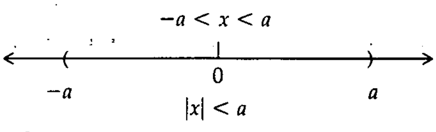


FIGURA 13

A desigualdade $|x| < a$, onde $a > 0$, estabelece que na reta numérica real a distância da origem até o ponto x é menor que a unidades; ou seja, $-a < x < a$. Portanto, x está no intervalo aberto $(-a, a)$. Veja a Figura 13. Parece então que o conjunto-solução de $|x| < a$ é $\{x \mid -a < x < a\}$. De fato, este é o caso estabelecido no teorema a seguir. A seta dupla é usada aqui e em todo o texto para indicar que as afirmações antes e depois dela são *equivalentes*.

1.1.9 TEOREMA $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ onde $a > 0$

Prova Como $|x| = x$ se $x \geqslant 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$, segue que o conjunto-solução da desigualdade $|x| \leqslant a$ é a união dos conjuntos

$$\{x | x < a \text{ e } x \geqslant 0\} \text{ e } \{x | -x < a \text{ e } x < 0\}$$

Observe que o primeiro desses conjuntos é equivalente a $\{x | 0 \leqslant x < a\}$, e o segundo é equivalente a $\{x | -a < x < 0\}$ pois $-x < a$ é equivalente a $x > -a$. Assim, o conjunto-solução de $|x| < a$ é

$$\{x | 0 \leqslant x < a\} \cup \{x | -a < x < 0\}$$

$$\Leftrightarrow \{x | -a < x < a\}$$

Comparando a desigualdade dada e o seu conjunto-solução, concluímos que

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$ ■

1.1.10 COROLÁRIO $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$ onde a > 0

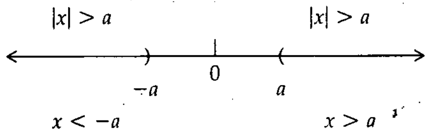


FIGURA 14

A desigualdade $|x| > a$, onde $a > 0$, estabelece que na reta numérica real a distância da origem ao ponto x é maior que a unidades; isto é, $x > a$ ou $x < -a$. Portanto, x está em $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$. Veja a Figura 14. Assim, parece que o conjunto-solução de $|x| > a$ é $\{x | x > a\} \cup \{x | x < -a\}$. O teorema a seguir estabelece que é esse o caso. Você deverá prová-lo no Exercício 61.

1.1.11 TEOREMA $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$ onde $a > 0$

1.1.12 COROLÁRIO $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$ onde $a > 0$

Os exemplos a seguir ilustram a solução de equações e desigualdades envolvendo valores absolutos.

EXEMPLO 5 Resolva cada uma das equações para x: (a) $|3x + 2| = 5$; (b) $|2x - 1| = |4x + 3|$; (c) $|5x + 4| = -3$.

Solução

(a) $|3x + 2| = 5$

Essa equação será satisfeita se

$$3x + 2 = 5 \quad \text{ou} \quad -(3x + 2) = 5$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = -\tfrac{7}{3}$$

(b) $|2x - 1| = |4x + 3|$

Essa equação será satisfeita se

$$2x - 1 = 4x + 3 \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = -(4x + 3)$$
$$x = -2 \qquad\qquad x = -\tfrac{1}{3}$$

(c) $|5x + 4| = -3$

Como o valor absoluto de um número não pode ser negativo nunca, essa equação não tem solução.

EXEMPLO 6 Ache e mostre na reta numérica real o conjunto-solução da inequação

$$|x - 5| < 4$$

Solução Do Teorema 1.1.9, as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$|x - 5| < 4$$
$$-4 < x - 5 < 4$$
$$1 < x < 9$$

Assim, o conjunto-solução da inequação dada é o intervalo aberto (1, 9), que está ilustrado na Figura 15.

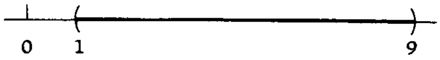


FIGURA 15

EXEMPLO 7 Ache o conjunto-solução da inequação

$$|3x + 2| > 5$$

Solução Pelo Teorema 1.1.11, a inequação dada é equivalente a

$$3x + 2 > 5 \quad \text{ou} \quad 3x + 2 < -5$$

Isto é, a inequação dada estará satisfeita se qualquer uma das desigualdades acima for satisfeita.

Considerando a primeira inequação, temos que

$$3x + 2 > 5$$
$$x > 1$$

Logo, todo número no intervalo $(1, +\infty)$ é uma solução.

Da segunda inequação

$$3x + 2 < -5$$
$$x < -\tfrac{7}{3}$$

Assim, todo número no intervalo $(-\infty, -\frac{7}{3})$ é uma solução.

O conjunto-solução da inequação dada é, portanto, $(-\infty, -\frac{7}{3}) \cup (1, +\infty)$.

Você deve-se lembrar da Álgebra que o símbolo $\sqrt{a}$, onde $a \geqslant 0$, é definido como o único número *não-negativo* x, tal que $x^2 = a$. Lemos $\sqrt{a}$ como "a raiz quadrada principal de a". Por exemplo,

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{0} = 0 \qquad \sqrt{\tfrac{9}{25}} = \tfrac{3}{5}$$

Nota: $\sqrt{4} \neq -2$ mesmo que $(-2)^2 = 4$, pois $\sqrt{4}$ denota somente a raiz quadrada *positiva* de 4. A raiz quadrada *negativa* de 4 é designada por $-\sqrt{4}$.

Como estamos interessados somente em números reais neste livro, $\sqrt{a}$ não está definida para $a < 0$.

EXEMPLO 8 Ache todos os valores de x para os quais $\sqrt{x^2 + 7x + 12}$ é real.

Solução

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

$$\sqrt{(x + 3)(x + 4)} \text{ é real quando } (x + 3)(x + 4) \geqslant 0$$

Vamos encontrar o conjunto-solução dessa inequação. A inequação estará satisfeita quando ambos os fatores forem não-negativos ou quando forem não-positivos, isto é, se $x + 3 \geqslant 0$ e $x + 4 \geqslant 0$, ou se $x + 3 \leqslant 0$ e $x + 4 \leqslant 0$. Consideraremos dois casos.

Caso 1: $x + 3 \geqslant 0$ e $x + 4 \geqslant 0$. Isto é,

$x \geqslant -3$ e $x \geqslant -4$

Ambas as desigualdades estarão satisfeitas para $x \geqslant -3$ ou seja, o intervalo $[-3, +\infty)$ é o conjunto-solução.

Caso 2: $x + 3 \leqslant 0$ e $x + 4 \leqslant 0$. Isto é,

$x \leqslant -3$ e $x \leqslant -4$

Ambas as desigualdades estarão satisfeitas para $x \leqslant -4$, ou seja, o intervalo $(-\infty, -4]$ é o conjunto-solução.

Se combinarmos os conjuntos-soluções dos Casos 1 e 2, teremos $(-\infty, -4] \cup [-3, +\infty)$.

Da definição de $\sqrt{a}$ segue que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 7**

$$\sqrt{5^2} = |5| \qquad \sqrt{(-3)^2} = |-3|$$
$$= 5 \qquad\qquad = 3$$

◀

Os teoremas a seguir sobre valores absolutos serão úteis mais adiante.

1.1.13 TEOREMA Se $a, b \in R$, então

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

Prova

$$\begin{aligned} |ab| &= \sqrt{(ab)^2} \\ &= \sqrt{a^2b^2} \\ &= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \\ &= |a| \cdot |b| \end{aligned}$$

■

1.1.14 TEOREMA Se $a, b \in R$ e $b \neq 0$,

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

A demonstração do Teorema 1.1.14 será deixada como exercício (veja o Exercício 62).

1.1.15 TEOREMA
A Desigualdade Triangular

Se $a, b \in R$, então

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

Prova Pela Definição 1.1.8, temos $a = |a|$ ou $a = -|a|$; assim

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a| \qquad (1)$$

Da mesma forma,

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b| \qquad (2)$$

Das desigualdades (1) e (2) e do Teorema 1.1.7,

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

Logo, do Corolário 1.1.10 segue que

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$ ■

O Teorema 1.1.15 tem dois corolários importantes que serão enunciados e provados a seguir.

1.1.16 COROLÁRIO Se a, $b \in R$, então

$$|a - b| \leqslant |a| + |b|$$

Prova

$$|a - b| = |a + (-b)| \leqslant |a| + |(-b)| = |a| + |b|$$ ■

1.1.17 COROLÁRIO Se a, $b \in R$, então

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|$$

Prova

$$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|$$

assim, subtraindo $|b|$ de ambos os membros da desigualdade, temos

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|$$ ■

EXERCÍCIOS 1.1

Nos Exercícios de 1 a 22, ache a conjunto-solução da desigualdade dada a mostre-o na reta numérica real.

1. $5x + 2 > x - 6$
2. $3 - x < 5 + 3x$
3. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \leqslant 0$
4. $3 - 2x \geqslant 9 + 4x$
5. $13 \geqslant 2x - 3 \geqslant 5$
6. $-2 < 6 - 4x \leqslant 8$
7. $2 > -3 - 3x \geqslant -7$
8. $2 \leqslant 5 - 3x < 11$
9. $\dfrac{4}{x} - 3 > \dfrac{2}{x} - 7$
10. $\dfrac{5}{x} < \dfrac{3}{4}$
11. $\dfrac{1}{x + 1} < \dfrac{2}{3x - 1}$
12. $\dfrac{x + 1}{2 - x} < \dfrac{x}{3 + x}$
13. $x^2 > 4$
14. $x^2 \leqslant 9$
15. $(x - 3)(x + 5) > 0$
16. $x^2 - 3x + 2 > 0$
17. $1 - x - 2x^2 \geqslant 0$
18. $x^2 + 3x + 1 > 0$
19. $4x^2 + 9x < 9$
20. $2x^2 - 6x + 3 < 0$
21. $\dfrac{1}{3x - 7} \geqslant \dfrac{4}{3 - 2x}$
22. $x^3 + 1 > x^2 + x$

Nos Exercícios de 23 a 30, resolva em x.

23. $|4x + 3| = 7$
24. $|3x - 8| = 4$
25. $|5x - 3| = |3x + 5|$
26. $|x - 2| = |3 - 2x|$
27. $|7x| = 4 - x$
28. $2x + 3 = |4x + 5|$
29. $\left|\dfrac{x + 2}{x - 2}\right| = 5$
30. $\left|\dfrac{3x + 8}{2x - 3}\right| = 4$

Nos Exercícios de 31 a 36, ache todos os valores de x para os quais o número é real.

31. $\sqrt{8x - 5}$
32. $\sqrt{x^2 - 16}$
33. $\sqrt{x^2 - 3x - 10}$
34. $\sqrt{2x^2 + 5x - 3}$
35. $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$
36. $\sqrt{x^2 + 2x - 1}$

Nos Exercícios de 37 a 52, ache o conjunto-solução da desigualdade dada e mostre-o na reta numérica real.

37. $|x + 4| < 7$
38. $|2x - 5| < 3$
39. $|3x - 4| \leqslant 2$
40. $|3x + 2| \geqslant 1$
41. $|5 - x| > 7$
42. $|3 - x| < 5$
43. $|7 - 4x| \leqslant 9$
44. $|6 - 2x| \geqslant 7$
45. $|2x - 5| > 3$
46. $|x + 4| \leqslant |2x - 6|$
47. $|3x| > |6 - 3x|$
48. $|3 + 2x| < |4 - x|$
49. $|9 - 2x| \geqslant |4x|$
50. $|5 - 2x| \geqslant 7$
51. $\left|\dfrac{x + 2}{2x - 3}\right| < 4$
52. $\left|\dfrac{6 - 5x}{3 + x}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$

Nos Exercícios de 53 a 56 resolva em x e escreva a resposta com a notação de valor absoluto.

53. $\dfrac{x-a}{x+a} > 0$

54. $\dfrac{a-x}{a+x} \geqslant 0$

55. $\dfrac{x-2}{x-4} > \dfrac{x+2}{x}$

56. $\dfrac{x+5}{x+3} < \dfrac{x+1}{x-1}$

57. Prove o Teorema 1.1.5.

58. Prove o Teorema 1.1.6(i).

59. Prove o Teorema 1.1.6(ii) e (iii).

60. Prove que se $x < y$, então $x < \frac{1}{2}(x + y) < y$.

61. Prove o Teorema 1.1.11.

62. Prove o Teorema 1.1.14.

1.2 RETAS E COORDENADAS

Os *pares ordenados* de números reais são importantes em nossas discussões. Quaisquer dois números reais formam um par, e quando a ordem de aparecimento do número é significativa, são chamados de **par ordenado**. Se x for o primeiro número real e y for o segundo, esse par ordenado será denotado por (x, y). Observe que o par ordenado (3, 7) é diferente do par ordenado (7, 3).

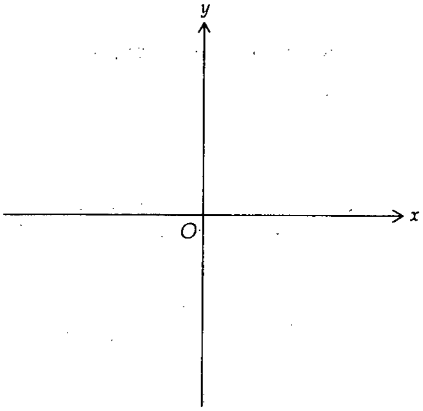


FIGURA 1

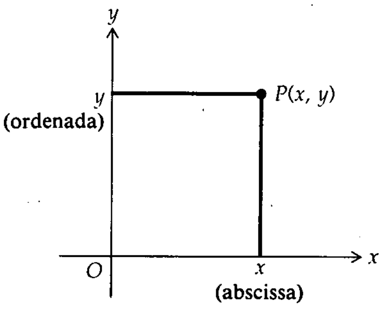


FIGURA 2

O conjunto de todos os pares de números reais é chamado de **plano numérico**, denotado por R^2, e cada par ordenado (x, y) será um **ponto** no plano numérico. Da mesma forma que podemos identificar R com os pontos de um eixo (um espaço unidimensional), podemos identificar R^2 com os pontos de um plano geométrico (um espaço bidimensional). O método usado em R^2 deve-se ao matemático francês René Descartes (1596-1650) a quem é atribuída a criação da Geometria Analítica em 1637. Uma reta horizontal é escolhida no plano geométrico, sendo chamada de **eixo x**. Uma reta vertical é escolhida, sendo denominada **eixo y**. O ponto de intersecção entre os eixos x e y é chamado de **origem**, sendo denotado pela letra O. Uma unidade de comprimento é escolhida. Usualmente a unidade de comprimento para os dois eixos é a mesma. Estabelecemos a direita da origem como sendo a parte positiva do eixo x; para o eixo y, a parte positiva fica acima da origem. Veja a Figura 1.

Associaremos um par ordenado de números reais (x, y) com um ponto no plano geométrico. No ponto x sobre o eixo horizontal e no ponto y sobre o eixo vertical, os segmentos de reta são desenhados perpendicularmente aos respectivos eixos. A intersecção desses dois segmentos de reta perpendiculares é o ponto P, associado ao par ordenado (x, y). Veja a Figura 2. O primeiro número x do par é chamado a **abscissa** (ou **coordenada x**) de P, e o segundo número y é chamado a **ordenada** (ou **coordenada y**) de P. Se a abscissa for positiva, P estará à direita do eixo y; e se for negativa, P estará à esquerda do eixo y. Se a ordenada for positiva, P estará acima do eixo x; e se for negativa, P estará abaixo do eixo x.

A abscissa e a ordenada de um ponto são denominadas **coordenadas cartesianas retangulares** do ponto. Há uma correspondência biunívoca entre os pontos em um plano geométrico e R^2; isto é, a cada ponto corresponde um único par ordenado (x, y) e a cada par ordenado (x, y) está associado um único ponto. Essa correspondência é denominada **sistema de coordenadas cartesianas retangulares**. A Figura 3 ilustra esse sistema onde são apresentados alguns pontos.

Os eixos x e y são chamados de **eixos coordenados**. Eles dividem o plano em quatro partes denominadas **quadrantes**. O primeiro quadrante é aquele no qual a abscissa e a ordenada são ambas positivas, isto é, o quadrante superior direito. Os outros quadrantes são numerados na direção anti-horária, ficando o quarto quadrante na parte inferior direita. Veja a Figura 4.

Dada a correspondência biunívoca, identificamos R^2 com o plano geométrico. Por essa razão, um par ordenado (x, y) é chamado de um *ponto.*

Vamos discutir agora o problema de encontrar a distância entre dois pontos em R^2. Se A for o ponto (x_1, y_1) e B for o ponto (x_2, y_1) (isto é, A e B têm a

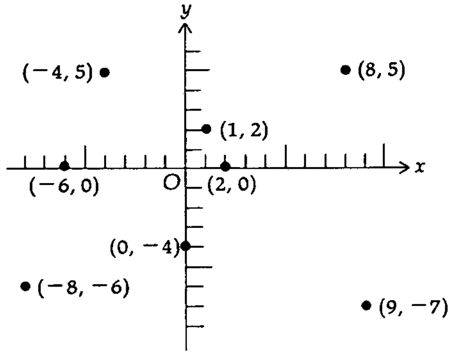


FIGURA 3

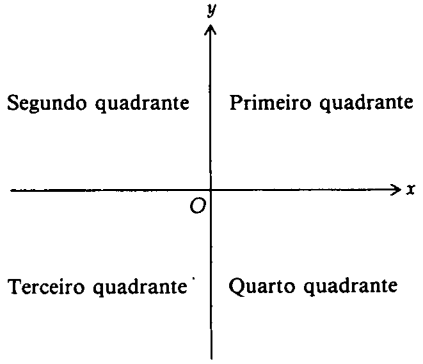
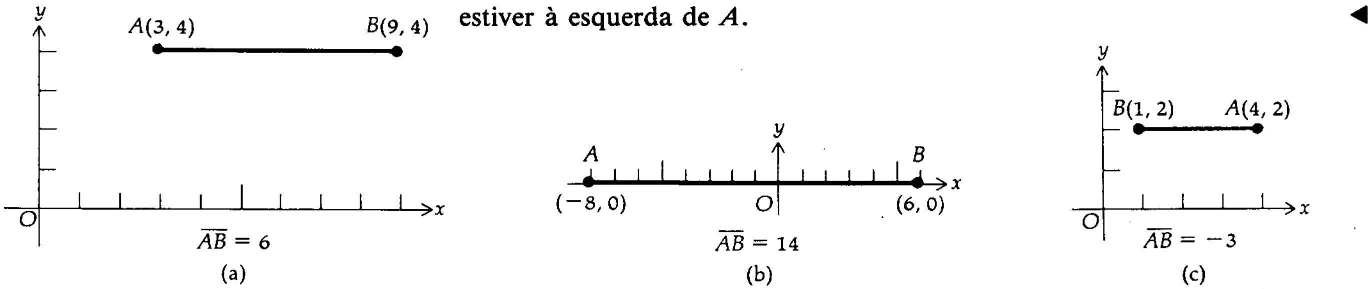


FIGURA 4

mesma ordenada, mas abscissas diferentes), então a **distância orientada** de A para B será denotada por $\overline{AB}$ e definimos

$$\boxed{\overline{AB} = x_2 - x_1}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Veja a Figura 5(a)-(c). Se A for o ponto (3, 4) e B for o ponto (9, 4), então $\overline{AB} = 9 - 3$; isto é $\overline{AB} = 6$. Se A for o ponto $(-8, 0)$ e B for o ponto (6, 0), então $\overline{AB} = 6 - (-8)$, ou seja, $\overline{AB} = 14$. Se A for o ponto (4, 2) e B for o ponto (1, 2), então $\overline{AB} = 1 - 4$; isto é, $\overline{AB} = -3$. Vemos que $\overline{AB}$ será positivo, se B estiver à direita de A e $\overline{AB}$ será negativo, se B estiver à esquerda de A. ◀



$\overline{AB} = 6$ (a)

$\overline{AB} = 14$ (b)

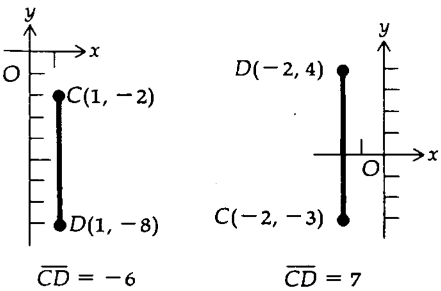
$\overline{AB} = -3$ (c)

FIGURA 5

Se C for o ponto (x_1, y_1) e D for o ponto (x_1, y_2), então a distância orientada de C para D, denotada por $\overline{CD}$, será definida por

$$\boxed{\overline{CD} = y_2 - y_1}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Veja a Figura 6(a) e (b). Se C for o ponto $(1, -2)$ e D for o ponto $(1, -8)$, então $\overline{CD} = -8 - (-2)$, isto é, $\overline{CD} = -6$. Se C for o ponto $(-2, -3)$ e D for o ponto $(-2, 4)$ então $\overline{CD} = 4 - (-3)$; isto é, $\overline{CD} = 7$. O número $\overline{CD}$ será positivo se D estiver acima de C e $\overline{CD}$ será negativo se D estiver abaixo de C. ◀



$\overline{CD} = -6$ (a)

$\overline{CD} = 7$ (b)

FIGURA 6

Observe que a terminologia *distância orientada* indica ao mesmo tempo a distância e um sentido (positivo ou negativo). Se estivermos interessados apenas no comprimento do segmento de reta entre os pontos P_1 e P_2 (isto é, na distância entre os pontos P_1 e P_2, sem levar em conta o sentido), então usaremos a terminologia *distância não-orientada*. Denotamos a **distância não-orientada** de P_1 a P_2 por $|\overline{P_1P_2}|$, que é um número não-negativo. Se usamos a palavra *distância* sem um adjetivo, *orientada* ou *não-orientada*, fica subentendido que queremos nos referir à distância não-orientada.

Queremos obter agora uma fórmula para calcular $|\overline{P_1P_2}|$ se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ forem pontos quaisquer do plano. Usamos o teorema de Pitágoras da Geometria Plana, que é o seguinte:

> Num triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos é igual ao quadrado do comprimento da hipotenusa.

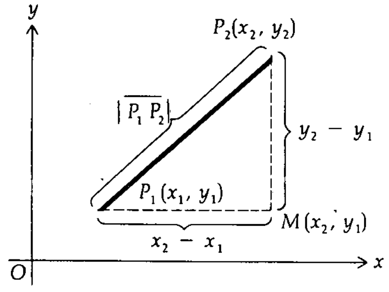


FIGURA 7

A Figura 7 mostra P_1 e P_2 no primeiro quadrante e o ponto $M(x_2, y_1)$. Note que $|\overline{P_1P_2}|$ é o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo P_1MP_2. Usando o teorema de Pitágoras temos

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1M}|^2 + |\overline{MP_2}|^2$$

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{|\overline{P_1M}|^2 + |\overline{MP_2}|^2}$$

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Note que na fórmula acima não temos o símbolo ± na frente do radical do segundo membro, pois $|\overline{P_1P_2}|$ é um número não-negativo. A fórmula é verdadeira para todas as posições possíveis de P_1 e P_2 nos quatro quadrantes. O comprimento da hipotenusa é sempre $|\overline{P_1P_2}|$ e os comprimentos dos catetos são sempre $|\overline{P_1M}|$ e $|\overline{MP_2}|$. O resultado é enunciado como um teorema.

1.2.1 TEOREMA A distância entre dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é dada por

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Observe que se P_1 e P_2 estiverem sobre uma mesma reta horizontal, então $y_1 = y_2$ e

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2}$$

$$|\overline{P_1P_2}| = |x_2 - x_1| \qquad \text{(pois } \sqrt{a^2} = |a|\text{)}$$

Além disso, se P_1 e P_2 estiverem sobre uma mesma reta vertical, então $x_1 = x_2$ e

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{0^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|\overline{P_1P_2}| = |y_2 - y_1|$$

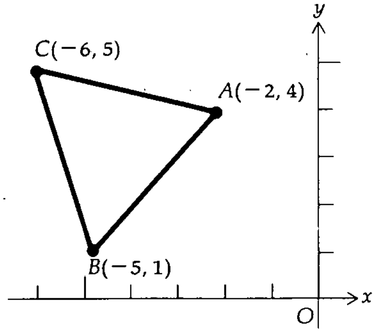


FIGURA 8

EXEMPLO 1 Mostre que o triângulo com vértices em $A(-2, 4)$, $B(-5, 1)$ e $C(-6, 5)$ é isósceles.

Solução O triângulo aparece na Figura 8.

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-6 + 5)^2 + (5 - 1)^2} \qquad |\overline{AC}| = \sqrt{(-6 + 2)^2 + (5 - 4)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 16} \qquad = \sqrt{16 + 1}$$

$$= \sqrt{17} \qquad = \sqrt{17}$$

Como $|\overline{BC}| = |\overline{AC}|$ o triângulo é isósceles.

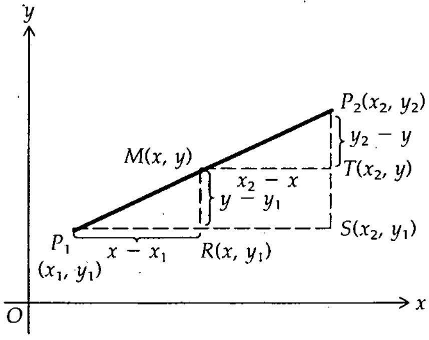


FIGURA 9

Se P_1 e P_2 são pontos extremos de um segmento de reta, denotamos esse segmento por P_1P_2. Isso não deve ser confundido com a notação $\overline{P_1P_2}$, a qual denota a distância orientada de P_1 a P_2. Ou seja, $\overline{P_1P_2}$ é um número, enquanto P_1P_2 é um segmento de reta. Veja a Figura 9, onde $M(x, y)$ é o ponto médio do segmento de reta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$. Como os triângulos P_1RM e MTP_2 são congruentes

$$|\overline{P_1R}| = |\overline{MT}| \quad \text{e} \quad |\overline{RM}| = |\overline{TP_2}|$$

Assim,

$$x - x_1 = x_2 - x \qquad y - y_1 = y_2 - y$$
$$2x = x_1 + x_2 \qquad 2y = y_1 + y_2$$

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Essas são as **fórmulas do ponto médio.** Em sua derivação supusemos que $x_2 > x_1$ e $y_2 > y_1$. As mesmas fórmulas são obtidas se usarmos qualquer ordenação desses números.

Em Geometria Analítica, a validade dos teoremas no plano geométrico é estabelecida com a aplicação de coordenadas e técnicas de Álgebra. O exemplo a seguir demonstra tal procedimento.

EXEMPLO 2 Prove analiticamente que os segmentos de reta que ligam os pontos médios dos lados opostos de um quadrilátero dividem ao meio um ao outro.

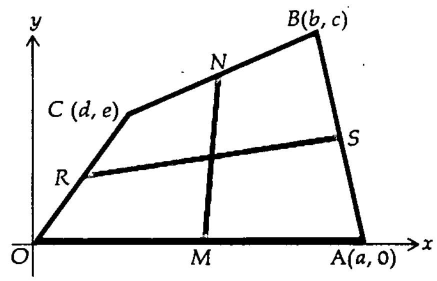


FIGURA 10

Solução Traçamos um quadrilátero geral. Como os eixos coordenados podem ser escolhidos em qualquer parte do plano e já que a escolha da posição dos eixos não afeta a veracidade do teorema, tomamos a origem em um vértice e o eixo x ao longo de um lado. Isso simplifica as coordenadas dos dois vértices no eixo x. Veja a Figura 10.

A hipótese e a conclusão do teorema são as seguintes:

Hipótese: O ABC é um quadrilátero. M é o ponto médio de OA, N é o ponto médio de CB, R é o ponto médio de OC e S é o ponto médio de AB.

Conclusão: MN e RS dividem-se ao meio.

Prova Para provar que dois segmentos de reta dividem-se ao meio, mostramos que eles têm o mesmo ponto médio. Das fórmulas do ponto médio, obtemos as coordenadas de M, N, R e S. M é o ponto $(\frac{1}{2}a, 0)$, N é o ponto $(\frac{1}{2}(b + d), \frac{1}{2}(c + e))$, R é o ponto $(\frac{1}{2}d, \frac{1}{2}e)$ e S é o ponto $(\frac{1}{2}(a + b), \frac{1}{2}c)$.

A abscissa do ponto médio de MN é $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(b + d)] = \frac{1}{4}(a + b + d)$.

A ordenada do ponto médio de MN é $\frac{1}{2}[0 + \frac{1}{2}(c + e)] = \frac{1}{4}(c + e)$.

Logo, o ponto médio de MN é o ponto $(\frac{1}{4}(a + b + d), \frac{1}{4}(c + e))$.

A abscissa do ponto médio de RS é $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}(a + b)] = \frac{1}{4}(a + b + d)$.

A ordenada do ponto médio de RS é $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}c] = \frac{1}{4}(c + e)$.

Assim, o ponto médio de RS é o ponto $(\frac{1}{4}(a + b + d), \frac{1}{4}(c + e))$.

Logo, o ponto médio de MN coincide com o ponto médio de RS.

Então, MN e RS dividem-se ao meio. ■

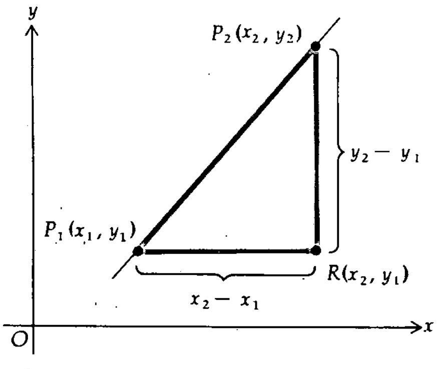


FIGURA 11

Discutiremos agora *retas* em R^2. Seja l uma reta vertical e $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos distintos em l. A Figura 11 mostra tal reta. Na figura, R é o ponto (x_2, y_1), e os pontos P_1, P_2 e R são vértices de um triângulo-retângulo; além disso, $\overline{P_1R} = x_2 - x_1$ e $\overline{RP_2} = y_2 - y_1$. O número $y_2 - y_1$ dá a medida da variação na ordenada de P_1 a P_2 e pode ser positivo, negativo ou zero. O número $x_2 - x_1$ dá a medida da variação na abscissa de P_1 a P_2 e pode ser positivo ou negativo.

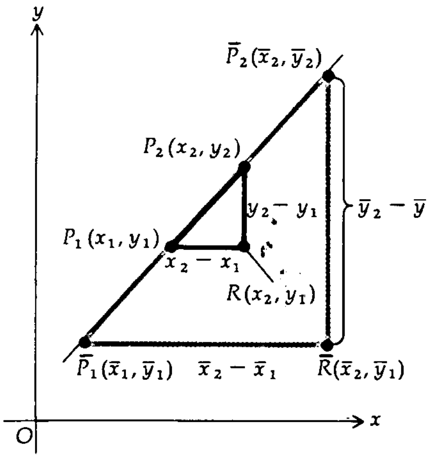


FIGURA 12

Como a reta l não é vertical, $x_2 \neq x_1$, e portanto, $x_2 - x_1$ não é zero. Seja

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

O valor de m calculado pela fórmula acima é independente da escolha dos dois pontos P_1 e P_2 em l. Para mostrar isso, vamos escolher dois outros pontos $\bar{P}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ e $\bar{P}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ e calcular um número $\bar{m}$ usando (1).

$$\bar{m} = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}$$

Mostraremos que $\bar{m} = m$. Veja a Figura 12. Os triângulos $\bar{P}_1\bar{R}\bar{P}_2$ e P_1RP_2 são semelhantes; assim sendo, os lados correspondentes são proporcionais. Logo

$$\frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ou} \quad \bar{m} = m$$

Assim, o valor de m calculado por (1) é único, não importando a escolha dos dois pontos em l. Esse número m é chamado de *inclinação* da reta.

1.2.2 DEFINIÇÃO

Se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ forem dois pontos distintos sobre l, não paralela ao eixo y, então a **inclinação** de l, denotada por m, será dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Se multiplicarmos ambos os membros da equação acima por $x_2 - x_1$, obteremos

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

Segue dessa equação que se considerarmos uma partícula movendo-se ao longo de uma reta, a variação na ordenada da partícula será igual ao produto da inclinação pela variação na abscissa.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se l for a reta que passa pelos pontos $P_1(2, 3)$ e $P_2(4, 7)$ e m for a inclinação de l, então, pela Definição 1.2.2,

$$\begin{aligned} m &= \frac{7-3}{4-2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

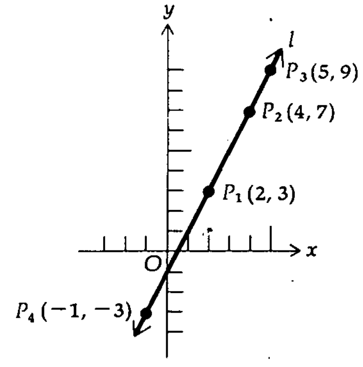


FIGURA 13

Veja a Figura 13. Se uma partícula estiver movendo-se ao longo da reta l acima, a variação na ordenada será duas vezes a variação na abscissa. Isto é, se a partícula estiver em $P_2(4, 7)$ e a abscissa for aumentada em uma unidade, então a ordenada ficará aumentada em duas unidades e a partícula estará em P_3 (5, 9). Analogamente, se a partícula estiver em $P_1(2, 3)$ e a abscissa for diminuída em três unidades, então a ordenada ficará diminuída em seis unidades e a partícula estará em $P_4(-1, -3)$. ◀

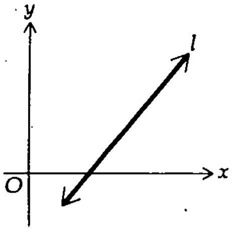


FIGURA 14

Se a inclinação de uma reta for positiva, então quando a abscissa de um ponto da reta aumentar, a ordenada também aumentará. Tal reta está na Figura 14. Na Figura 15 há uma reta cuja inclinação é negativa. Para essa reta, quando a abscissa aumentar, a ordenada diminuirá.

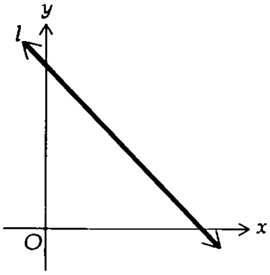


FIGURA 15

Se uma reta for paralela ao eixo x, então $y_2 = y_1$; assim, a inclinação da reta é zero. Se uma reta for paralela ao eixo y, $x_2 = x_1$; assim a fração $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ fica sem sentido, pois não podemos dividi-la por zero. É por essa razão que retas paralelas ao eixo y foram excluídas da definição de inclinação. Assim, a inclinação de uma reta vertical não é definida.

Por *equação de uma reta* queremos nos referir a uma equação que é satisfeita por aqueles, e somente aqueles pontos sobre a reta. Como um ponto $P_1(x_1, y_1)$ e uma inclinação m determinam uma reta única, será possível obter uma equação dessa reta. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer na reta exceto (x_1, y_1). Então, uma vez que a inclinação da reta que passa por P_1 e P é m, temos da definição de inclinação

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Essa equação é chamada **forma ponto-inclinação** da equação da reta. Resulta uma equação da reta, se sua inclinação e um ponto sobre a reta forem conhecidos.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Para encontrar a equação da reta por dois pontos $A(6, -3)$ e $B(-2, 3)$ calculamos primeiro m.

$$\begin{aligned} m &= \frac{3-(-3)}{-2-6} \\ &= \frac{6}{-8} \\ &= -\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Usando agora a forma ponto-inclinação da equação da reta onde consideramos A como P_1, temos

$$\begin{aligned} y-(-3) &= -\tfrac{3}{4}(x-6) \\ 4y+12 &= -3x+18 \\ 3x+4y-6 &= 0 \end{aligned}$$

Naturalmente, o ponto B pode ser tomado como P_1; nesse caso, temos

$$\begin{aligned} y-3 &= -\tfrac{3}{4}(x+2) \\ 4y-12 &= -3x-6 \\ 3x+4y-6 &= 0 \end{aligned}$$

Se escolhermos o ponto $(0, b)$ (isto é, o ponto onde a reta intercepta o eixo y) como o ponto (x_1, y_1) em (1), teremos

$$y - b = m(x - 0)$$

$$\boxed{y = mx + b}$$

O número b, que é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo y, é chamado de **intercepto y** da reta. Conseqüentemente, a equação acima é a chamada **forma inclinação-intercepto** da equação da reta. Essa forma é extremamente útil, pois nos dá imediatamente a inclinação da reta. É importante também porque expressa a coordenada y de um ponto sobre a reta explicitamente, em termos da coordenada x.

EXEMPLO 3 Ache a inclinação da reta cuja equação é

$$6x + 5y - 7 = 0$$

Solução A equação é resolvida em y.

$$5y = -6x + 7$$

$$y = -\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}$$

Essa equação está na forma inclinação-intercepto, onde $m = -\frac{6}{5}$.

Como a inclinação de uma reta vertical não é definida, não podemos aplicar a forma ponto-inclinação para obter sua equação. Em seu lugar, usamos o teorema a seguir, envolvendo o **intercepto *x*** da reta (a abscissa do ponto em que a reta intercepta o eixo x). O teorema também dá uma equação da reta horizontal.

1.2.3 TEOREMA

(i) Uma equação da reta vertical tendo x intercepto a é

$$x = a$$

(ii) Uma equação da reta horizontal tendo y intercepto b é

$$y = b$$

Prova (i) A Figura 16 mostra a reta vertical que intercepta o eixo x no ponto $(a, 0)$. Essa reta contém aqueles e somente aqueles pontos sobre a reta que têm a mesma abscissa. Assim, $P(x, y)$ será qualquer ponto sobre a reta se e somente se

$$x = a$$

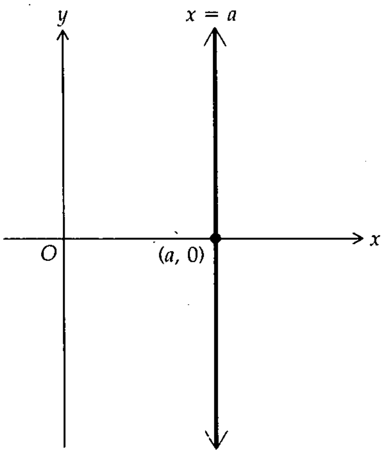


FIGURA 16

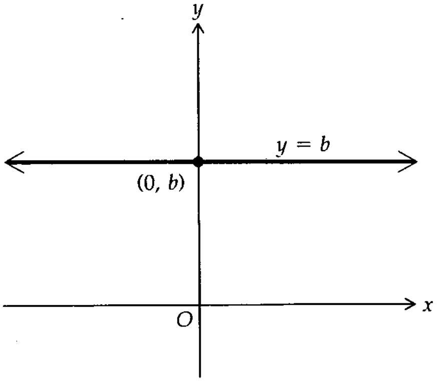


FIGURA 17

(ii) A reta horizontal que intercepta o eixo y no ponto $(0, b)$ aparece na Figura 17. Para essa reta, $m = 0$. Portanto, da forma intercepto-inclinação, uma equação dessa reta é

$$y = b$$ ■

Mostramos que uma equação de uma reta não-vertical é da forma $y = mx + b$, e uma equação de uma reta vertical é da forma $x = a$. Como cada uma dessas equações é um caso particular de uma equação da forma

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2)$$

onde A, B e C são constantes, e A e B não são nulas, segue que toda reta possui uma equação da forma (2). O oposto desse fato é dado pelo Teorema 1.2.5, a seguir. Mas antes de enunciá-lo definiremos o *gráfico de uma equação.*

1.2.4 DEFINIÇÃO O **gráfico de uma equação** em R^2 é o conjunto de todos os pontos em R^2 cujas coordenadas são números que satisfazem a equação.

1.2.5 TEOREMA O gráfico da equação

$$Ax + By + C = 0$$

onde A, B e C são constantes e onde A e B não são ambos nulos, é uma linha reta.

A prova desse teorema é deixada como exercício. Veja o Exercício 57.

Como o gráfico de (2) é uma linha reta, é chamado de **equação linear**; sendo a equação geral do primeiro grau em x e y.

Uma vez que dois pontos determinam uma reta, para fazer o esboço do gráfico de uma reta precisamos apenas determinar as coordenadas de dois pontos dela, marcar os pontos no gráfico e então traçá-la. Qualquer par de pontos é suficiente, mas em geral convém marcar no gráfico os dois pontos onde a reta intercepta os dois eixos.

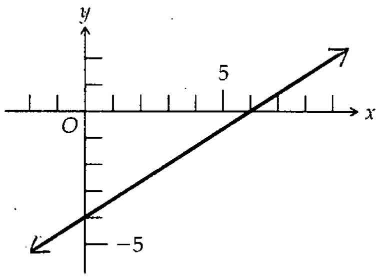


FIGURA 18

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Para traçar o esboço da reta tendo a equação

$$2x - 3y = 12$$

primeiro achamos x intercepto a e y intercepto b. Na equação, substituimos $(a, 0)$ por (x, y) e obtemos $a = 6$. Substituindo $(0, b)$ por (x, y), obtemos $b = -4$. Assim, temos uma reta na Figura 18. ◀

A aplicação de inclinações é feita no teorema a seguir.

1.2.6 TEOREMA Se l_1 e l_2 forem duas retas distintas não-verticais, tendo inclinações m_1 e m_2, respectivamente, então l_1 e l_2 serão paralelas se e somente se $m_1 = m_2$.

Prova Sejam as equações de l_1 e l_2, respectivamente,

$$y = m_1x + b_1 \quad \text{e} \quad y = m_2x + b_2$$

Veja a Figura 19, que mostra duas retas interceptando o eixo y nos pontos $B_1(0, b_1)$ e $B_2(0, b_2)$. A reta vertical $x = 1$ intercepta l_1 no ponto $A_1\ (1, m_1 + b_1)$ e l_2 no ponto $A_2(1, m_2 + b_2)$. Então

$$|\overline{B_1B_2}| = b_2 - b_1 \quad \text{e} \quad |\overline{A_1A_2}| = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$

As duas retas serão paralelas se e somente se as distâncias verticais $|\overline{B_1B_2}|$ e $|\overline{A_1A_2}|$ forem iguais; ou seja, l_1 e l_2 serão paralelas se e somente se

$$b_2 - b_1 = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$

$$b_2 - b_1 = m_2 + b_2 - m_1 - b_1$$

$$m_1 = m_2$$

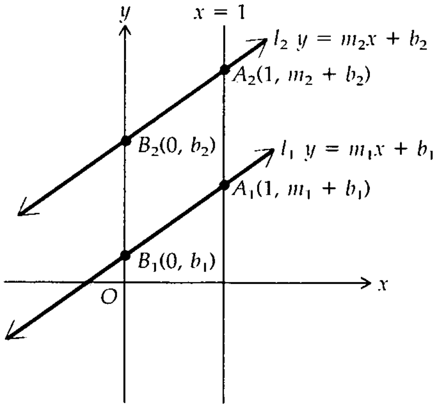


FIGURA 19

Assim, l_1 e l_2 serão paralelas se e somente se $m_1 = m_2$. ■

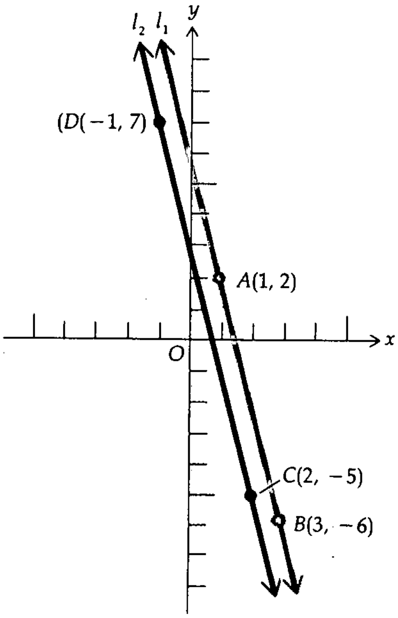


FIGURA 20

► **ILUSTRAÇÃO 6** Seja l_1 a reta que passa pelos pontos $A(1, 2)$ e $B(3, -6)$ com inclinação m_1, e seja l_2 a reta que passa pelos pontos $C(2, -5)$ e $D(-1, 7)$ com inclinação m_2. Então

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-6-2}{3-1} & m_2 &= \frac{7-(-5)}{-1-2} \\ &= \frac{-8}{2} & &= \frac{12}{-3} \\ &= -4 & &= -4 \end{aligned}$$

como $m_1 = m_2$, segue que l_1 e l_2 são paralelas. Veja a Figura 20. ◄

Dois pontos distintos quaisquer determinam uma reta. Três pontos distintos podem ou não estar na mesma reta. Se três ou mais pontos estiverem na mesma reta, eles serão denominados **colineares**. Assim, três pontos A, B e C serão colineares se e somente se a reta que passa pelos pontos A e B for a mesma que passa pelos pontos B e C. Como as retas que passam por A e B e por B e C contêm o ponto B em comum, elas serão a mesma reta se e somente se suas inclinações forem iguais.

EXEMPLO 4 Através das inclinações, determine se os pontos $A(-3, -4)$, $B(2, -1)$ e $C(7, 2)$ são colineares.

Solução Se m_1 for a inclinação da reta que passa por A e B e m_2 for a inclinação da reta que passa por B e C, então

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{-1-(-4)}{2-(-3)} & m_2 &= \frac{2-(-1)}{7-2} \\ &= \frac{3}{5} & &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Logo, $m_1 = m_2$. Assim sendo, as retas que passam por A e B e por B e C têm a mesma inclinação e o ponto B em comum. Assim elas coincidem e, portanto, são colineares.

Agora enunciaremos e provaremos um teorema considerando as inclinações de duas retas perpendiculares.

1.2.7 TEOREMA

Duas retas não-verticais l_1 e l_2, com inclinações m_1 e m_2, respectivamente, serão perpendiculares se e somente se $m_1 m_2 = -1$.

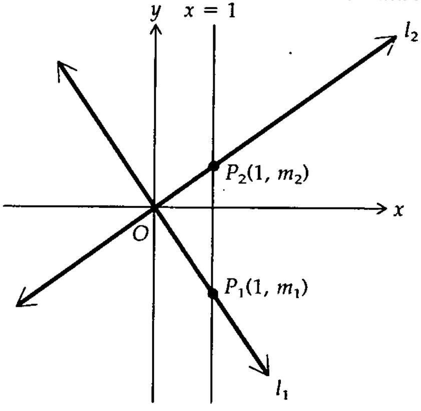


FIGURA 21

Prova Escolhemos os eixos coordenados de modo que a origem esteja no ponto de intersecção de l_1 e l_2. Veja a Figura 21. Como nem l_1 nem l_2 são verticais, essas duas retas interceptam a reta $x = 1$ nos pontos P_1 e P_2, respectivamente. A abscissa de ambos P_1 e P_2 é 1. Seja $\bar{y}$ a ordenada de P_1. Como l_1 contém os pontos $(0, 0)$ e $(1, \bar{y})$, sendo sua inclinação m_1, então

$$m_1 = \frac{\bar{y}-0}{1-0}$$

Assim, $\bar{y} = m_1$. Da mesma forma, podemos provar que a ordenada de P_2 é m_2. Aplicando o teorema de Pitágoras e seu oposto, o triângulo P_1OP_2 será um triângulo retângulo se e somente se

$$|\overline{OP_1}|^2 + |\overline{OP_2}|^2 = |\overline{P_1P_2}|^2 \qquad (3)$$

Da fórmula da distância, obtemos

$$|\overline{OP_1}|^2 = (1-0)^2 + (m_1 - 0)^2 = 1 + m_1{}^2 \qquad |\overline{OP_2}|^2 = (1-0)^2 + (m_2 - 0)^2 = 1 + m_2{}^2$$

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = (1-1)^2 + (m_2 - m_1)^2 = m_2{}^2 - 2m_1m_2 + m_1{}^2$$

Substituindo em (3) podemos concluir que P_1OP_2 é um triângulo retângulo se e somente se

$$1 + m_1{}^2 + 1 + m_2{}^2 = m_2{}^2 - 2m_1m_2 + m_1{}^2$$
$$2 = -2m_1m_2$$
$$m_1m_2 = -1 \qquad \blacksquare$$

Como $m_1m_2 = -1$ é equivalente a

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{e} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

O Teorema 1.2.7 estabelece que duas retas não-verticais serão perpendiculares se e somente se a inclinação de uma delas for a recíproca negativa da inclinação da outra.

EXEMPLO 5 Dada a reta l com a equação

$$5x + 4y - 20 = 0$$

encontre uma equação da reta que passe pelo ponto $(2, -3)$ e (a) seja paralela a l e (b) seja perpendicular a l.

Solução Primeiro determinamos a inclinação de l, escrevendo sua equação na forma inclinação-intercepto. Resolvendo a equação para y, temos

$$4y = -5x + 20$$
$$y = -\tfrac{5}{4}x + 5$$

A inclinação de l é o coeficiente de x, que é $-\frac{5}{4}$.

(a) A inclinação de uma reta paralela a l também é $-\frac{5}{4}$. Como a reta requerida contém o ponto $(2, -3)$, usamos a forma ponto-inclinação, que resulta

$$y - (-3) = -\tfrac{5}{4}(x - 2)$$
$$4y + 12 = -5x + 10$$
$$5x + 4y + 2 = 0$$

(b) A inclinação de uma reta perpendicular a l é o negativo de $-\frac{5}{4}$, ou seja, $\frac{4}{5}$. Da forma ponto-inclinação, uma equação da reta que passa por $(2, -3)$, com inclinação $\frac{4}{5}$, é

$$y - (-3) = \tfrac{4}{5}(x - 2)$$
$$5y + 15 = 4x - 8$$
$$4x - 5y - 23 = 0$$

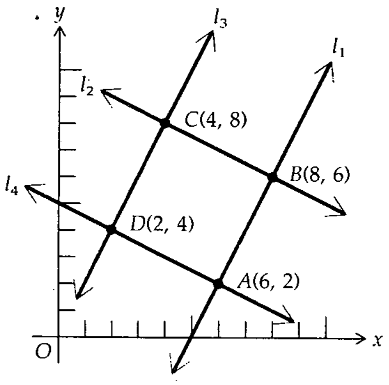


FIGURA 22

EXEMPLO 6 Prove, através das inclinações, que os quatro pontos $A(6, 2)$, $B(8, 6)$, $C(4, 8)$ e $D(2, 4)$ são os vértices de um retângulo.

Solução Veja a Figura 22, onde l_1 é a reta que passa por A e B, l_2 é a reta que passa por B e C, l_3 é a reta que passa por D e C e l_4 é a reta que passa por A e D; m_1, m_2, m_3 e m_4 são suas respectivas inclinações.

$$m_1 = \frac{6-2}{8-6} = 2 \qquad m_2 = \frac{8-6}{4-8} = -\frac{1}{2} \qquad m_3 = \frac{8-4}{4-2} = 2 \qquad m_4 = \frac{4-2}{2-6} = -\frac{1}{2}$$

Como $m_1 = m_3$, l_1 é paralela a l_3; e como $m_2 = m_4$, l_2 é paralela a l_4. Como $m_1 m_2 = -1$, l_1 e l_2 são perpendiculares. Portanto, o quadrilátero tem seus lados opostos paralelos e dois lados perpendiculares. Assim, o quadrilátero é um retângulo.

EXERCÍCIOS 1.2

Nos Exercícios de 1 a 6, coloque num gráfico o ponto P dado e cada um dos seguintes pontos:

(a) O ponto Q, tal que a reta que passa por P e Q seja perpendicular ao eixo x e o divida ao meio. Dê as coordenadas de Q.

(b) O ponto R, tal que a reta que passa por P e R seja perpendicular ao eixo y e o divida ao meio. Dê as coordenadas de R.

(c) O ponto S, tal que o segmento de reta que passa por P e por S seja dividido ao meio pela origem. Dê as coordenadas de S.

(d) O ponto T, tal que o segmento de reta que passa por P e T seja perpendicular e dividido pela reta que passa pela origem, formando um ângulo de 45° e dividindo o primeiro e o terceiro quadrantes. Dê as coordenadas de T.

1. $P(1, -2)$ **2.** $P(-2, 2)$ **3.** $P(2, 2)$

4. $P(-2, -2)$ **5.** $P(-1, -3)$ **6.** $P(0, -3)$

7. Prove que os pontos $A(-7, 2)$, $B(3, -4)$ e $C(1, 4)$ são vértices de um triângulo isósceles.

8. Prove que os pontos $A(-4, -1)$, $B(-2, -3)$, $C(4, 3)$ e $D(2, 5)$ são vértices de um retângulo.

9. A mediana de um triângulo é um segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. Ache o comprimento das medianas do triângulo cujos vértices são: $A(2, 3)$, $B(3, -3)$ e $C(-1, -1)$.

10. Ache o comprimento das medianas do triângulo com vértices $A(-3, 5)$, $B(2, 4)$ e $C(-1, -4)$.

11. Prove que o triângulo com vértices $A(3, -6)$, $B(8, -2)$ e $C(-1, -1)$ é retângulo. Ache a área do triângulo. (*Sugestão*: Use o inverso do teorema de Pitágoras.)

12. Ache os pontos médios das diagonais do quadrilátero cujos vértices são (0, 0), (0, 4), (3, 5) e (3, 1).

13. Prove que os pontos $A(6, -13)$, $B(-2, 2)$, $C(13, 10)$ e $D(21, -5)$ são os vértices de um quadrado. Ache o comprimento de uma diagonal.

14. Se um extremo de um segmento de reta for o ponto $(-4, 2)$ e o ponto médio for $(3, -1)$, ache as coordenadas do outro extremo.

15. Se um extremo de um segmento de reta for o ponto $(6, -2)$ e o ponto médio for $(-1, 5)$, ache as coordenadas do outro extremo.

16. A abscissa de um ponto é -6, e sua distância do ponto (1, 3) é $\sqrt{74}$. Ache a ordenada do ponto.

17. Usando a fórmula da distância (1), prove que os pontos $(-3, 2)$, $(1, -2)$ e $(9, -10)$ estão sobre uma reta.

18. Determine se os pontos (14, 7), (2, 2) e $(-4, -1)$ estão sobre uma reta usando a fórmula da distância (1).

19. Se dois vértices de um triângulo equilátero são $(-4, 3)$ e (0, 0), ache o terceiro vértice.

20. Dados dois pontos $A(-3, 4)$ e $B(2, 5)$, ache as coordenadas de um ponto P sobre a reta que passa por A e B, tal que P seja (a) duas vezes mais distante de A do que de B e (b) duas vezes mais distante de B do que de A.

Nos Exercícios de 21 a 24, ache a inclinação da reta que passa pelos pontos.

21. $(2, -3), (-4, 3)$

22. $(5, 2), (-2, -3)$

23. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), (-\frac{5}{6}, \frac{2}{3})$

24. $(-2{,}1;\ 0{,}3), (2{,}3;\ 1{,}4)$

Nos Exercícios de 25 a 38, ache uma equação da reta que satisfaz as condições.

25. A inclinação é 4 e passa pelo ponto $(2, -3)$.
26. A inclinação é 3 e passa pelo ponto $(-4, -1)$.
27. A inclinação é -2 e passa pelo ponto $(-3, 5)$.
28. Passa pelos pontos $(-2, 7)$ e $(6, 0)$.
29. Passa pelos pontos $(4, 6)$ e $(0, -7)$.
30. Passa pelos pontos $(3, 1)$ e $(-5, 4)$.
31. O intercepto x é -3 e o intercepto y é 4.
32. Passa pelo ponto $(1, 4)$ e é paralela à reta cuja equação é $2x + 5y + 7 = 0$.
33. Passa pelo ponto $(-2, 3)$ e é perpendicular à reta cuja equação é $2x - y - 2 = 0$.
34. Passa pelo ponto $(-3, -4)$ e é paralela ao eixo y.
35. Passa pelo ponto $(1, -7)$ e é paralela ao eixo x.
36. A inclinação é -2 e o intercepto x é 4.
37. Passa pelo ponto $(-2, -5)$ e tem uma inclinação de $\sqrt{3}$.
38. Passa pela origem e divide ao meio o ângulo entre os eixos no primeiro e terceiro quadrantes.

Nos Exercícios 39 e 40, ache a inclinação da reta.

39. (a) $x + 3y = 7$; (b) $2y + 9 = 0$
40. (a) $4x - 6y = 5$; (b) $3x - 5 = 0$

Nos Exercícios 41 e 42, determine, através das inclinações, se os três pontos são colineares.

41. (a) $(2, 3), (-4, -7), (5, 8)$; (b) $(2, -1), (1, 1), (3, 4)$
42. (a) $(4, 6), (1, 2), (-5, -4)$; (b) $(-3, 6), (3, 2), (9, -2)$
43. (a) Escreva uma equação cujo gráfico seja o eixo x. (b) Escreva uma equação cujo gráfico seja o eixo y. (c) Escreva uma equação cujo gráfico seja o conjunto de todos os pontos no eixo x ou y.
44. (a) Escreva uma equação cujo gráfico consista em todos os pontos tendo uma abscissa de 4. (b) Escreva uma equação cujo gráfico consista em todos os pontos com ordenada -3.
45. Mostre que as retas com equações $3x + 5y + 7 = 0$ e $6x + 10y - 5 = 0$ são paralelas.
46. Mostre que as retas com equações $3x + 5y + 7 = 0$ e $5x - 3y - 2 = 0$ são perpendiculares.
47. Dada a reta l com equação $2y - 3x = 4$ e o ponto $P(1, -3)$, ache (a) uma equação da reta passando por P, perpendicular a l; (b) a menor distância de P à reta l.
48. Ache o valor de k tal que as retas cujas equações são $3kx + 8y = 5$ e $6y - 4kx = -1$ sejam perpendiculares.
49. Mostre, através das inclinações, que os pontos $(-4, -1)$, $(3, \frac{8}{3})$, $(8, -4)$ e $(2, -9)$ são vértices de um trapezóide.
50. Prove, usando inclinações, que os três pontos $A(3, 1)$, $B(6, 0)$ e $C(4, 4)$ são vértices de um triângulo retângulo e determine a área do triângulo.
51. Ache as coordenadas dos três pontos que dividem o segmento de reta de $A(-5, 3)$ a $B(6, 8)$ em quatro partes iguais.
52. Três vértices consecutivos de um paralelogramo são $(-4, 1)$, $(2, 3)$ e $(8, 9)$. Ache as coordenadas do quarto vértice.
53. Dada a reta l tendo a equação $Ax + By + C = 0$, $B \neq 0$, determine (a) a inclinação; (b) o intercepto y; (c) o intercepto x; (d) uma equação da reta que passe pela origem e seja perpendicular a l.
54. Se A, B, C e D são constantes, mostre que (a) as retas $Ax + By + C = 0$ e $Ax + By + D = 0$ são paralelas e (b) as retas $Ax + By + C = 0$ e $Bx - Ay + D = 0$ são perpendiculares.
55. Ache as equações das três medianas do triângulo com vértices $A(3, -2)$, $B(3, 4)$ e $C(-1, 1)$ e prove que elas se encontram em um ponto.
56. Ache as equações das mediatrizes dos lados de um triângulo com vértices $A(-1, -3)$, $B(5, -3)$ e $C(5, 5)$ e prove que elas se encontram em um ponto.
57. Prove o Teorema 1.2.5: O gráfico da equação

$$Ax + By + C = 0$$

onde A, B e C são constantes e onde nem A nem B são nulos, é uma reta. (*Sugestão*: Considere dois casos $B \neq 0$ e $B = 0$. Se $B \neq 0$, mostre que a equação é aquela de uma reta tendo inclinação $-A/B$ e o intercepto y $-C/B$. Se $B = 0$, mostre que a equação é aquela de uma reta vertical.)
58. Seja l_1 a reta $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ e seja l_2 a reta $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Se l_1 não for paralela a l_2 e k for uma constante qualquer, a equação

$$A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

representará um número ilimitado de retas. Prove que cada uma delas contém o ponto de intersecção de l_1 e l_2.
59. Dado que uma equação de l_1 é $2x + 3y - 5 = 0$ e que uma equação de l_2 é $3x + 5y - 8 = 0$, usando o Exercício 58 e sem determinar as coordenadas do ponto de intersecção de l_1 e l_2, encontre uma equação da reta que passe por esse ponto e (a) contendo o ponto $(1, 3)$; (b) seja paralela ao eixo x; (c) e tenha inclinação -2.
60. Para as retas l_1 e l_2 do Exercício 59, use o Exercício 58 e, sem achar as coordenadas do ponto de intersecção de l_1 e l_2, encontre uma equação da reta que passe por esse ponto e (a) seja paralela ao eixo y; (b) seja perpendicular à reta com equação $2x + y = 7$; (c) forme um triângulo isósceles com os eixos coordenados.

Nos Exercícios de 61 a 66, use Geometria Analítica para provar o teorema dado a partir da Geometria Plana.

61. A soma dos quadrados das distâncias de qualquer ponto a dois vértices opostos de qualquer retângulo é igual à soma dos quadrados de suas distâncias aos outros dois vértices.
62. O ponto médio da hipotenusa de qualquer triângulo retângulo é eqüidistante dos três vértices desse triângulo.
63. O segmento de reta que liga os pontos médios de dois lados opostos de qualquer quadrilátero e o segmento de reta que liga os pontos médios das diagonais do quadrilátero dividem-se ao meio.
64. Os segmentos de reta que ligam os pontos médios consecutivos dos lados de qualquer forma quadrilátera formam um paralelogramo.
65. As diagonais de um paralelogramo dividem-se ao meio.
66. Se as diagonais de um quadrilátero dividem-se ao meio, então o quadrilátero é um paralelogramo.

1.3 CIRCUNFERÊNCIAS E GRÁFICOS DE EQUAÇÕES

Uma **equação de um gráfico** é uma equação satisfeita pelas coordenadas daqueles pontos sobre o gráfico e somente por eles. Você aprendeu na Secção 1.2 que uma equação de primeiro grau com duas variáveis tem uma reta como o seu gráfico. Uma das curvas mais simples que é um gráfico de uma equação de segundo grau com duas variáveis é a *circunferência*.

1.3.1 DEFINIÇÃO

Uma **circunferência** é o conjunto de todos os pontos em um plano, eqüidistantes de um ponto fixo. O ponto fixo é chamado de **centro** e a distância fixa é chamada de **raio** da circunferência.

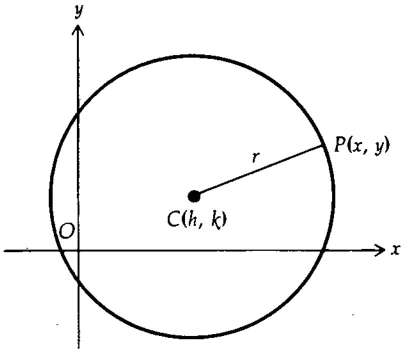


FIGURA 1

Para obter uma equação da circunferência tendo centro em $C(h, k)$ e raio r, usamos a fórmula da distância. Veja a Figura 1. O ponto $P(x, y)$ está na circunferência se e somente se $|\overline{PC}| = r$, isto é, se e somente se

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

Essa equação é verdadeira se e somente se

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad (r>0)$$

Essa equação é satisfeita pelas coordenadas daqueles e somente daqueles pontos que estão na circunferência e, portanto, é uma equação da circunferência. Provamos o teorema a seguir.

1.3.2 TEOREMA

A circunferência com centro no ponto $C(h, k)$ e raio r tem como equação

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Se o centro de uma circunferência está na origem, então $h = 0$ e $k = 0$; portanto, sua equação é

$$x^2+y^2=r^2$$

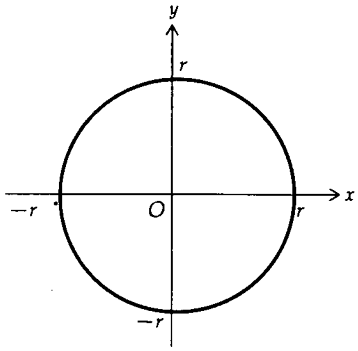


FIGURA 2

Tal circunferência aparece na Figura 2. Se o raio de uma circunferência for 1, será chamada de **circunferência unitária**.

EXEMPLO 1 Ache uma equação da circunferência que tenha um diâmetro com extremidades em $A(-2, 3)$ e $B(4, 5)$.

Solução Como as extremidades de um diâmetro são os pontos A e B, o ponto médio do segmento de reta AB será o centro da circunferência. Veja a Figura 3. Chamando de $C(h, k)$ o centro da circunferência,

$$h=\frac{-2+4}{2} \qquad k=\frac{3+5}{2}$$
$$=1 \qquad\qquad =4$$

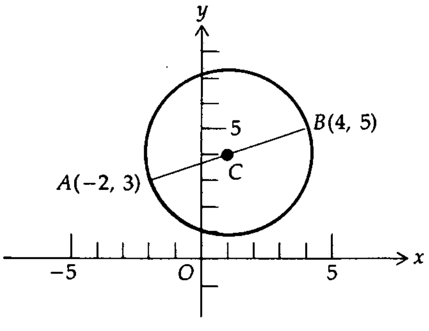


FIGURA 3

O centro está em $C(1, 4)$. O raio da circunferência pode ser calculado determinando $|\overline{CA}|$ ou $|\overline{CB}|$. Se $r = |\overline{CA}|$, então

$$r=\sqrt{(1+2)^2+(4-3)^2}$$
$$=\sqrt{10}$$

Uma equação da circunferência é, portanto,

$$(x-1)^2+(y-4)^2=10$$
$$x^2+y^2-2x-8y+7=0$$

A equação $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ é chamada de **forma centro-raio** da equação de uma circunferência. Se retirarmos os parênteses e combinarmos os termos, obteremos

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Tomando $D = -2h$, $E = -2k$, e $F = h^2 + k^2 - r^2$, essa equação torna-se

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

que é denominada a **forma geral** da equação de uma circunferência. Como toda circunferência tem centro e raio, sua equação pode ser colocada na forma centro-raio, ou seja, na forma geral, como fizemos no Exemplo 1. Se iniciarmos com uma equação de uma circunferência na forma geral, podemos escrevê-la em sua forma centro-raio completando os quadrados. No exemplo a seguir tal procedimento é mostrado.

EXEMPLO 2 Encontre o centro e o raio da circunferência com equação

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$$

Solução A equação dada pode ser escrita como

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 2y) = 15$$

Completando os quadrados dos termos entre parênteses, ao somarmos 9 e 1 a ambos os membros da equação, teremos

$$\begin{aligned}(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) &= 15 + 9 + 1\\ (x + 3)^2 + (y - 1)^2 &= 25\end{aligned}$$

Como essa equação está na forma centro-raio, o centro está em $(-3, 1)$ e o raio é 5.

Mostramos agora que há equações da forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

cujos gráficos não são circunferências. Suponhamos que, ao completar os quadrados, obteremos

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = d$$

Se $d > 0$, temos uma circunferência com centro em (h, k) e raio $\sqrt{d}$. Entretanto, se $d < 0$, não há valores reais de x e y que satisfaçam a equação; assim, não é possível traçarmos um gráfico. Em tal caso, dizemos que o gráfico é o conjunto vazio. Finalmente, se $d = 0$, temos

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = 0$$

Apenas os valores reais de x e y que satisfazem essa equação são $x = h$ e $y = k$. Assim, o gráfico é o ponto (h, k).

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Suponha que tenhamos a equação

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 29 = 0$$

a qual pode ser escrita como

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 10y) = -29$$

Completamos os quadrados dos termos entre parênteses, somando 4 e 25 a ambos os membros, obtemos

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 10y + 25) = -29 + 4 + 25$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 0$$

Como os únicos valores reais de x e y que satisfazem essa equação são $x = 2$ e $y = -5$, o gráfico é o ponto $(2, -5)$. ◀

Observe que uma equação da forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \text{onde } A \neq 0 \tag{2}$$

pode ser escrita na forma de (1) ao dividirmos por A, obtendo

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

A Equação (2) é um caso particular da equação geral do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

na qual os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais, não possuindo nenhum termo xy. O teorema a seguir é resultado dessa discussão.

1.3.3 TEOREMA O gráfico de qualquer equação de segundo grau em R^2 em x e y, na qual os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais e na qual não há termo em xy, é uma circunferência, um ponto, ou ainda, um conjunto vazio.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A equação

$$2x^2 + 2y^2 + 12x - 8y + 31 = 0$$

é da forma (2) e, portanto, pode ser o gráfico de uma circunferência, de um ponto-circunferência ou o conjunto vazio. Colocando a equação na forma (1):

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + \tfrac{31}{2} = 0$$

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) = -\tfrac{31}{2}$$

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -\tfrac{31}{2} + 9 + 4$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = -\tfrac{5}{2}$$

Logo, o gráfico é o conjunto vazio. ◀

Na Secção 1.2 definimos o gráfico de uma equação em R^2 como o conjunto de todos os pontos (x, y) cujas coordenadas são números que satisfazem a equação. O gráfico de uma equação em R^2 também é chamado de curva. Já discutimos dois tipos de curvas: retas, que são gráficos de equações de primeiro grau, e circunferências, as quais são gráficos das equações de segundo grau da forma (2). Agora examinaremos alguns gráficos de outro tipo de equação em x e y:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{3}$$

onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$. Especificando, consideramos

$$y = x^2 - 2 \tag{4}$$

Tabela 1

x	$y = x^2 - 2$
0	-2
1	-1
2	2
3	7
4	14
-1	-1
-2	2
-3	7
-4	14

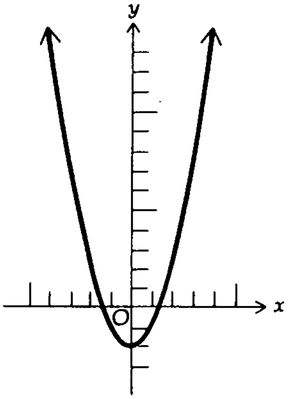


FIGURA 4

A solução dessa equação é um par ordenado de números reais, um para x e o outro para y, que satisfaça a equação. Por exemplo, se x for substituído por 3 na equação, vemos que $y = 7$; assim, $x = 3$ e $y = 7$ constitui uma solução dessa equação. Substituindo x por qualquer número no segundo membro de (4), obtemos um valor para y. Vemos, então, que (4) tem um número ilimitado de soluções. A Tabela 1 dá algumas dessas soluções.

Se marcarmos os pontos que têm como coordenadas os pares de números (x, y) da Tabela 1, ligando-os por uma curva suave, obteremos um esboço do gráfico da Equação (4), que aparece na Figura 4. Qualquer ponto (x, y) nessa curva tem coordenadas que satisfazem a Equação (4) e as coordenadas de qualquer ponto não situado nessa curva não satisfarão a equação.

O gráfico da Figura 4 é uma *parábola*. O ponto mais baixo do gráfico é $(0, -2)$; é o *vértice* da parábola. Essa parábola abre para cima. Um tratamento completo de parábolas encontra-se no Capítulo 10, onde mostraremos que o gráfico de uma equação da forma (3) será uma parábola tendo um eixo vertical abrindo para cima, se $a > 0$ e para baixo, se $a < 0$. No exemplo a seguir, o gráfico é uma parábola com eixo horizontal.

EXEMPLO 3 Faça o esboço do gráfico da equação

$$y^2 - x - 2 = 0$$

Solução Resolvendo essa equação em y teremos

$$y^2 = x + 2$$

$$y = \pm\sqrt{x + 2}$$

Assim, a equação dada é equivalente às duas equações

$$y = \sqrt{x + 2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{x + 2}$$

As coordenadas de qualquer ponto que satisfaçam qualquer uma dessas duas equações, irão satisfazer a equação dada. Por outro lado, as coordenadas de qualquer ponto que satisfaçam a equação dada, satisfarão $y = \sqrt{x + 2}$ ou $y = -\sqrt{x + 2}$. A Tabela 2 dá alguns desses valores de x e y.

Tabela 2

x	0	0	1	1	2	2	3	3	-1	-1	-2
y	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	2	-2	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	1	-1	0

Observe que para qualquer valor de $x > -2$ não há valor real para y. Também, para cada valor de $x > -2$ há dois valores para y. Um esboço do gráfico aparece na Figura 5.

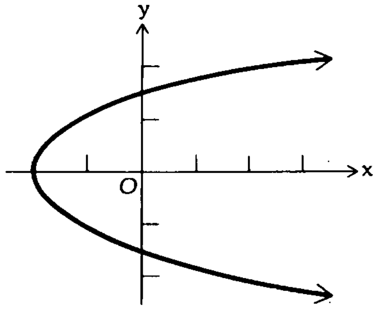


FIGURA 5

EXEMPLO 4 Faça esboços dos gráficos das equações

$$y = \sqrt{x + 2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{x + 2}$$

Solução Lembre do Exemplo 3 que essas duas equações juntas equivalem à equação $y^2 - x - 2 = 0$. Na equação $y = \sqrt{x + 2}$, o valor de y não é negativo. Logo, o gráfico da equação, que a Figura 6 mostra, é a parte superior do gráfico na Figura 5.

Da mesma forma, o gráfico da equação $y = -\sqrt{x + 2}$, cujo esboço está na Figura 7, é a parte inferior da parábola da Figura 5.

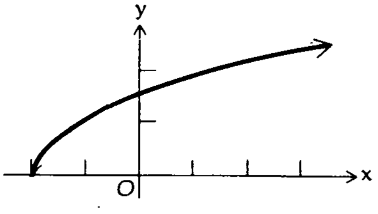


FIGURA 6

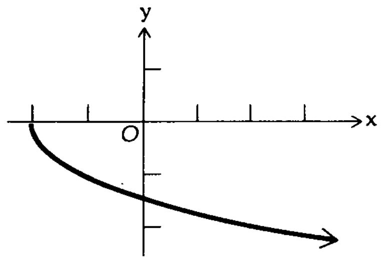


FIGURA 7

Ao desenhar um esboço do gráfico de uma equação, muitas vezes é útil considerar as propriedades de *simetria* de um gráfico.

1.3.4 DEFINIÇÃO

Dois pontos P e Q serão **simétricos com respeito a uma reta** se e somente se a reta for a perpendicular bissetora do segmento de reta PQ. Dois pontos P e Q serão **simétricos com respeito a um terceiro ponto** se e somente se o terceiro ponto for o ponto médio do segmento de reta PQ.

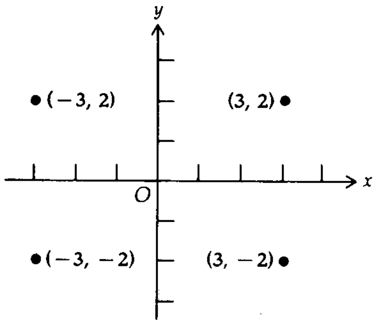


FIGURA 8

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Os pontos (3, 2) e (3, −2) são simétricos com relação ao eixo x, os pontos (3, 2) e (−3, 2) são simétricos com respeito ao eixo y e os pontos (3, 2) e (−3, −2) são simétricos com respeito à origem (veja a Figura 8). ◀

Em geral, os pontos (x, y) e $(x, -y)$ são simétricos com respeito ao eixo x, (x, y) e $(-x, y)$ são simétricos com relação ao eixo y e (x, y) e $(-x, -y)$ são simétricos com respeito à origem.

1.3.5 DEFINIÇÃO

O gráfico de uma equação será simétrico com respeito a uma reta l se e somente se para todo ponto P sobre o gráfico existir um ponto Q, também sobre o gráfico, tal que P e Q sejam simétricos com relação a l. O gráfico de uma equação é simétrico com respeito a um ponto R se e somente se, para todo ponto P sobre o gráfico, existir um ponto S também sobre o gráfico, tal que P e S sejam simétricos com respeito a R.

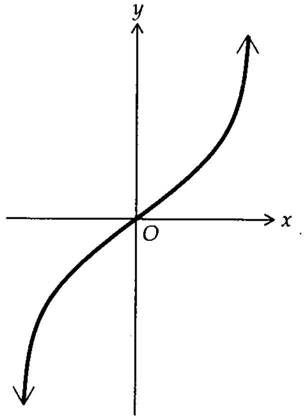


FIGURA 9

Na Figura 5 temos um gráfico simétrico em relação ao eixo x, e a Figura 4 mostra outro gráfico simétrico em relação ao eixo y. Mostramos um gráfico que seja simétrico em relação à origem na Figura 9. A circunferência mostrada na Figura 2 é simétrica em relação ao eixo x, ao eixo y e à origem.

Da Definição 1.3.5 segue que se o ponto (x, y) estiver sobre um gráfico simétrico com respeito ao eixo x, então o ponto $(x, -y)$ também deverá estar no gráfico. E se ambos os pontos (x, y) e $(x, -y)$ estiverem no gráfico, então o gráfico será simétrico com respeito ao eixo x. Logo, as coordenadas dos pontos $(x, -y)$ e (x, y) devem satisfazer a equação do gráfico. Então o gráfico de uma equação em x e y será simétrico com respeito ao eixo x se e somente se uma equação equivalente for obtida quando y for substituído por $-y$ na equação dada. Provamos, assim, a parte (i) do teorema a seguir. As provas das partes (ii) e (iii) são similares.

1.3.6 TEOREMA
Teste de Simetria

O gráfico de uma equação em x e y será

(i) simétrico com respeito ao eixo x se e somente se obtivermos uma equação equivalente ao substituirmos y por $-y$ na equação dada;
(ii) simétrico com respeito ao eixo y se e somente se obtivermos uma equação equivalente ao substituirmos x por $-x$ na equação dada;
(iii) simétrico com respeito à origem se e somente se obtivermos uma equação equivalente quando x for substituído por $-x$ e y for substituído por $-y$ na equação dada.

Observe o gráfico da Figura 4, novamente. Ele é simétrico em relação ao eixo y e sua equação é $y = x^2 - 2$. Observe que uma equação equivalente é obtida quando x é substituído por $-x$. No Exemplo 3 temos a equação $y^2 - x - 2 = 0$ para a qual uma equação equivalente é obtida quando y é substituído por

$-y$, e seu gráfico, esboçado na Figura 4, é simétrico em relação ao eixo x. O exemplo a seguir fornece um gráfico que é simétrico em relação à origem.

EXEMPLO 5 Faça um esboço do gráfico da equação

$$xy = 1$$

Solução Vemos que se na equação dada substituirmos x por $-x$ e y por $-y$, obteremos uma equação equivalente; logo, pelo Teorema 1.3.6 (iii), o gráfico será simétrico com respeito à origem. A Tabela 3 dá alguns valores de x e y satisfazendo a equação dada.

Tabela 3

x	1	2	3	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	-1	-2	-3	-4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	2	3	4	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	-2	-3	-4

Da equação dada, $y = 1/x$. Vemos que à medida que x cresce com valores positivos, y diminui com valores positivos e aproxima-se cada vez mais de zero. À medida que x diminui com valores positivos, y cresce com valores positivos e torna-se cada vez maior. À medida que x cresce com valores negativos (isto é, x assume, por exemplo, os valores -4, -3, -2, -1, $-\frac{1}{2}$ etc.), y assume valores negativos tendo valores absolutos cada vez maiores. Um esboço do gráfico está na Figura 10.

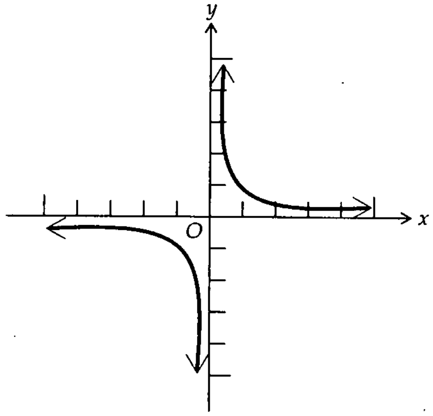


FIGURA 10

EXERCÍCIOS 1.3

Nos Exercícios de 1 a 4, ache uma equação da circunferência com centro em C e raio r. Escreva a equação na forma centro-raio e na forma geral.

1. $C(4, -3)$, $r = 5$
2. $C(0, 0)$, $r = 8$
3. $C(-5, -12)$, $r = 3$
4. $C(-1, 1)$, $r = 2$

Nos Exercícios 5 e 6, ache uma equação da circunferência que satisfaça as condições.

5. Centro em $(1, 2)$ e passa pelo ponto $(3, -1)$.
6. Passa pelos três pontos $(2, 8)$, $(7, 3)$ e $(-2, 0)$.

Nos Exercícios de 7 a 10, ache o centro e o raio da circunferência, e desenhe um esboço do gráfico.

7. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$
8. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y + 7 = 0$
9. $3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

Nos Exercícios de 11 a 16, determine se o gráfico é uma circunferência, um ponto ou um conjunto vazio.

11. $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 19 = 0$
12. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 4y + 1 = 0$
13. $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 36 = 0$
14. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$
15. $36x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 119 = 0$
16. $9x^2 + 9y^2 + 6x - 6y + 5 = 0$

Nos Exercícios de 17 a 44, desenhe um esboço do gráfico da equação.

17. $y = 2x + 5$
18. $y = 4x - 3$
19. $y = \sqrt{x + 4}$
20. $y = \sqrt{x - 1}$
21. $y = -\sqrt{x + 4}$
22. $y = -\sqrt{x - 1}$
23. $y^2 = x + 4$
24. $y^2 = x - 1$
25. $y = 3 - x^2$
26. $y = x^2 + 2$
27. $y = x^2 - 4$
28. $y = 9 - x^2$
29. $y = 4 + x^2$
30. $y = x^2 - 9$
31. $xy = 4$
32. $xy = -1$
33. $xy = -9$
34. $xy = 9$
35. $x = y^2 + 2$
36. $x = y^2 - 4$
37. (a) $x + 3y = 0$; (b) $x - 3y = 0$; (c) $x^2 - 9y^2 = 0$
38. (a) $2x - 5y = 0$; (b) $2x + 5y = 0$; (c) $4x^2 - 25y^2 = 0$
39. (a) $y = \sqrt{2x}$; (b) $y = -\sqrt{2x}$; (c) $y^2 = 2x$
40. (a) $y = \sqrt{-2x}$; (b) $y = -\sqrt{-2x}$; (c) $y^2 = -2x$
41. (a) $y = \sqrt{4 - x^2}$; (b) $y = -\sqrt{4 - x^2}$; (c) $x^2 + y^2 = 4$
42. (a) $y = \sqrt{1 - x^2}$; (b) $y = -\sqrt{1 - x^2}$; (c) $x^2 + y^2 = 1$
43. (a) $x = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4y^2}$; (b) $x = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - 4y^2}$; (c) $4x^2 + 4y^2 = 1$
44. (a) $xy = 2$; (b) $xy = -2$; (c) $x^2y^2 = 4$

Nos Exercícios de 45 a 48, ache uma equação da circunferência satisfazendo as condições dadas.

45. O centro está em $(-3, -5)$ e é tangente à reta $12x + 5y = 4$.

46. O centro está em $(-2, 5)$ e é tangente à reta $x = 7$.

47. Tangente à reta $3x + y + 2 = 0$ em $(-1, 1)$ e passa pelo ponto $(3, 5)$.

48. Tangente à reta $3x + 4y - 16 = 0$ em $(4, 1)$ e com um raio de 5 (duas circunferências possíveis).

49. Ache uma equação da reta que é tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ no ponto $(5, 1)$.

50. Ache uma equação de cada uma das duas retas com inclinação $-\frac{4}{3}$, que são tangentes à circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$.

51. Prove que um gráfico que seja simétrico com respeito a ambos os eixos coordenados também seja simétrico com respeito à origem.

52. O gráfico de uma equação em x e y será simétrico com respeito à reta com equação $y = x$ se e somente se esta for equivalente à equação obtida quando x for substituído por y e y por x. Mostre que o gráfico da equação $ax^2 + by^2 = c$, onde a, b e c são positivos, será simétrico com respeito a essa reta se e somente se $a = b$.

53. Prove que um gráfico simétrico com respeito a duas retas perpendiculares quaisquer também seja simétrico com relação ao ponto de intersecção delas.

1.4 FUNÇÕES

Muitas vezes ocorre na prática que o valor de uma quantidade depende do valor de outra. Exemplificando, o salário de uma pessoa pode depender do número de horas trabalhadas; a produção total de uma fábrica pode depender do número de máquinas usadas; a distância percorrida por um objeto pode depender do tempo decorrido desde que ele deixou um dado ponto; o volume do espaço ocupado por um gás sob uma pressão constante depende da temperatura do gás; a resistência de um fio elétrico com comprimento fixo depende de seu diâmetro, e assim por diante. A relação entre tais quantidades é dada freqüentemente por uma *função.* Para nossos propósitos, restringimos as quantidades na relação a serem números reais. Então

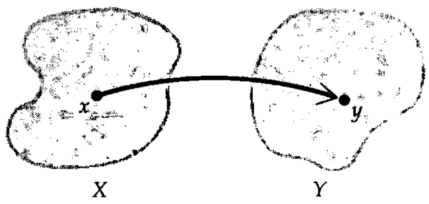


FIGURA 1

> Uma função pode ser considerada como uma correspondência de um conjunto X de números reais x a um conjunto Y de números reais y, onde o número y é único para um valor específico de x.

A Figura 1 dá uma visualização de tal correspondência, onde os conjuntos X e Y consistem em pontos numa região plana.

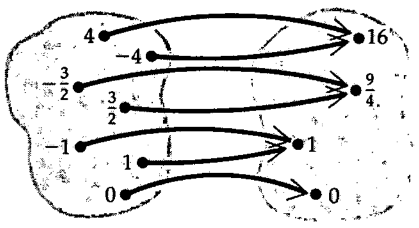
Estabelecendo o conceito de uma função de outra forma, consideramos intuitivamente o número real y no conjunto Y como uma *função* do número real x no conjunto X se houver uma regra pela qual um valor específico de y seja atribuído a um valor de x. Essa regra é dada, muitas vezes, por uma equação. Por exemplo, a equação

$$y = x^2$$

define uma função para a qual X é o conjunto de todos os números reais e Y é o conjunto de números não-negativos. O valor de y em Y, atribuído ao valor de x em X, é obtido quando multiplicamos x por si mesmo. A Tabela 1 dá o valor de y atribuído a alguns valores fixados de x, e a Figura 2 ilustra a correspondência para os números na tabela.

Tabela 1

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
4	16
0	0
-1	1
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-4	16



X: todos os números reais

Y: números não-negativos

FIGURA 2

Usamos símbolos tais como f, g e h para denotar uma função. O conjunto X de números reais descritos acima é o *domínio* da função, e o conjunto Y de números reais atribuídos aos valores de x em X é a *imagem* da função.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Seja f a função definida pela equação

$$y = \sqrt{x - 2}$$

Como os números são restritos a números reais, y é uma função de x apenas para $x - 2 \geqslant 0$, pois para qualquer x que satisfaça essa desigualdade, um valor único de y é determinado. No entanto, se $x < 2$, obtemos uma raiz quadrada de um número negativo, e então, não existe número real y algum. Logo, devemos restringir x de modo que $x \geqslant 2$. Assim, o domínio de f é o intervalo $[2, +\infty)$, e a imagem é $[0, +\infty)$. ◄

► **ILUSTRAÇÃO 2** Seja g a função definida pela equação

$$y = \sqrt{x^2 - 9}$$

Observe que y é uma função de x apenas para $x \geqslant 3$ ou $x \leqslant -3$ (ou simplesmente $|x| \geqslant 3$); para qualquer x que satisfaça uma dessas desigualdades, um valor único de y é determinado. Nenhum valor real de y é determinado se x estiver no intervalo aberto $(-3, 3)$; pois para esses valores de x obtemos a raiz quadrada de um número negativo. Logo, o domínio de g é $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ e a imagem é $[0, +\infty)$. ◄

Podemos considerar uma função como um conjunto de pares ordenados. Por exemplo, a função definida pela equação $y = x^2$ consiste em todos os pares ordenados (x, y) que satisfaçam a equação. Os pares ordenados nessa função dados pela Tabela 1 são $(1, 1)$ $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, $(4, 16)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ e $(-4, 16)$. Evidentemente, há um número ilimitado de pares ordenados na função. Alguns outros são $(2, 4)$, $(-2, 4)$, $(5, 25)$, $(-5, 25)$, $(\sqrt{3}, 3)$ e assim por diante.

► **ILUSTRAÇÃO 3** A função f da Ilustração 1 é o conjunto de pares ordenados (x, y) para os quais $y = \sqrt{x - 2}$. Com símbolos, escrevemos

$$f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 2}\}$$

Alguns dos pares ordenados em f são $(2, 0)$, $(\frac{9}{4}, \frac{1}{2})$, $(3, 1)$, $(4, \sqrt{2})$, $(5, \sqrt{3})$, $(6, 2)$, $(11, 3)$. ◄

► **ILUSTRAÇÃO 4** A função g da Ilustração 2 é o conjunto dos pares ordenados (x, y) para os quais $y = \sqrt{x^2 - 9}$, isto é,

$$g = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 9}\}$$

Alguns dos pares ordenados em g são $(3, 0)$, $(4, \sqrt{7})$, $(5, 4)$, $(-3, 0)$, $(-\sqrt{13}, 2)$. ◄

Daremos agora a definição formal de uma função. O conceito de função torna-se mais preciso se ela for definida como um conjunto de pares ordenados, ao invés de usarmos uma regra ou correspondência.

1.4.1 DEFINIÇÃO

Uma **função** é um conjunto de pares ordenados de números (x, y), sendo que dados dois pares ordenados distintos, nenhum deles terá o mesmo primeiro número. O conjunto de todos os valores admissíveis de x é chamado de **domínio** da função e o conjunto de todos os valores resultantes de y é chamado a **imagem** da função.

Nessa definição, a restrição que dois pares ordenados não podem ter o mesmo número assegura que y seja único para valores específicos de x. Os números x e y são **variáveis**. Dados os valores atribuídos a x e como o valor de y independe da escolha de x, x será a **variável independente** e y, a **variável dependente**.

O conceito de uma função é um conjunto de pares ordenados que nos permite dar a definição a seguir do *gráfico de uma função*.

1.4.2 DEFINIÇÃO Se f for uma função, então o **gráfico** de f será o conjunto dos pontos (x, y) em R^2 para os quais (x, y) é um par ordenado de f.

Comparando essa definição com a definição do gráfico de uma equação (1.2.4), segue que o gráfico de uma função f é o mesmo que o gráfico da equação $y = f(x)$.

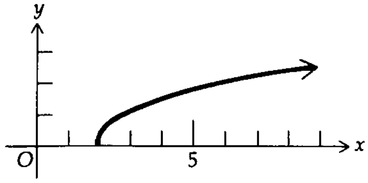


FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** (a) Um esboço do gráfico da função f da Ilustração 1 está na Figura 3. Ele é a metade superior de uma parábola.

(b) A Figura 4 mostra um esboço do gráfico da função g das Ilustrações 2 e 4. ◀

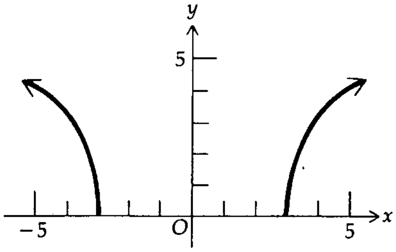


FIGURA 4

Lembre-se de que para termos uma função, é preciso existir exatamente um valor da variável dependente para cada valor da variável independente no domínio da função. Em termos geométricos isso significa que

O gráfico de uma função pode ser interceptado por uma reta vertical em, no máximo, um ponto.

Observe que essa é a situação dos gráficos das funções nas Figuras 3 e 4.

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Consideremos o conjunto

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$$

Um esboço do gráfico desse conjunto está na Figura 5. Tal conjunto de pares ordenados não é uma função, pois para cada x no intervalo $(-5, 5)$ existem dois pares ordenados distintos, tendo um mesmo valor de x como primeiro elemento. Por exemplo, $(3, 4)$ e $(3, -4)$ são pares ordenados no conjunto dado. Além disso, observe que o gráfico do conjunto dado é uma circunferência com centro na origem e raio 5 e uma reta vertical tendo a equação $x = a$, onde $-5 < a < 5$, intercepta a circunferência em dois pontos. ◀

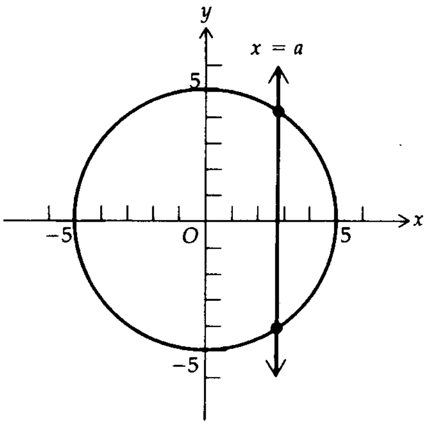


FIGURA 5

A próxima secção trata de gráficos de funções e apresenta mais exemplos.

Para introduzir a notação de **valor funcional**, seja f a função tendo como seu domínio os valores da variável x e como sua imagem os valores da variável y. Então, o símbolo $f(x)$ (lemos "f de x") denota o valor de y correspondente ao valor de x.

▶ **ILUSTRAÇÃO 7** Na Ilustração 1, $f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 2}\}$. Assim

$$f(x) = \sqrt{x - 2}$$

Calculamos $f(x)$ para valores específicos de x.

$$\begin{aligned} f(3) &= \sqrt{3 - 2} & f(5) &= \sqrt{5 - 2} & f(6) &= \sqrt{6 - 2} & f(9) &= \sqrt{9 - 2} \\ &= 1 & &= \sqrt{3} & &= 2 & &= \sqrt{7} \end{aligned}$$ ◀

Quando definimos uma função, o domínio da função deve ser dado implícita ou explicitamente. Por exemplo, se f for definida por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

isto implica que x pode ser qualquer número real. Mas, se f for definida por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \qquad 1 \leqslant x \leqslant 10$$

então o domínio de f consistirá em todos os números reais entre 1 e 10, inclusive os extremos.

Analogamente, se g for definida pela equação

$$g(x) = \frac{5x - 2}{x + 4}$$

isto implica que $x \neq -4$, pois o quociente não está definido para $x = -4$; logo, o domínio de g é o conjunto de todos os números reais exceto -4.

Se

$$h(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

isto implica que x está no intervalo fechado $[-3, 3]$, pois $\sqrt{9 - x^2}$ não é um número real para $x > 3$ ou $x < -3$. Assim, o domínio de h é $[-3, 3]$ e a imagem é $[0, 3]$.

EXEMPLO 1 Dada a função f definida por

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

ache:

(a) $f(0)$; (b) $f(2)$; (c) $f(h)$; (d) $f(2h)$; (e) $f(2x)$; (f) $f(x + h)$; (g) $f(x) + f(h)$.

Solução

(a) $f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4$
$= 4$

(b) $f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$
$= 6$

(c) $f(h) = h^2 + 3h - 4$

(d) $f(2h) = (2h)^2 + 3(2h) - 4$
$= 4h^2 + 6h - 4$

(e) $f(2x) = (2x)^2 + 3(2x) - 4$
$= 4x^2 + 6x - 4$

(f) $f(x + h) = (x + h)^2 + 3(x + h) - 4$
$= x^2 + 2hx + h^2 + 3x + 3h - 4$
$= x^2 + (2h + 3)x + (h^2 + 3h - 4)$

(g) $f(x) + f(h) = (x^2 + 3x - 4) + (h^2 + 3h - 4)$
$= x^2 + 3x + (h^2 + 3h - 8)$

Compare os cálculos das partes (f) e (g) do Exemplo 1. Na parte (f) o cálculo é de $f(x + h)$ que é o valor funcional na soma de x e h. Na parte (g), onde $f(x) + f(h)$ é calculado, obtemos a soma de dois valores funcionais $f(x)$ e $f(h)$.

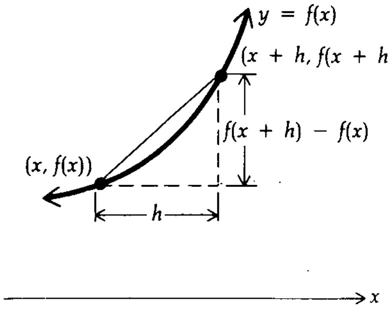


FIGURA 6

No Capítulo 3 precisamos calcular quocientes da forma

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad h \neq 0$$

Esse quociente surge como a inclinação da reta que passa pelos pontos $(x, f(x))$ e $(x + h, f(x + h))$ sobre o gráfico da função definida por $y = f(x)$. Veja a Figura 6. Se, no cálculo, a diferença de dois radicais aparece no numerador, racionalizamos o numerador como na parte (b) do exemplo a seguir.

EXEMPLO 2 Ache

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

onde $h \neq 0$, se (a) $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$; (b) $f(x) = \sqrt{x}$.

Solução

(a)
$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{4(x+h)^2 - 5(x+h) + 7 - (4x^2 - 5x + 7)}{h}\\ &= \frac{4x^2 + 8hx + 4h^2 - 5x - 5h + 7 - 4x^2 + 5x - 7}{h}\\ &= \frac{8hx - 5h + 4h^2}{h}\\ &= 8x - 5 + 4h\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}\\ &= \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}\\ &= \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}\\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

Na segunda etapa dessa solução o numerador e o denominador são multiplicados pelo conjugado do numerador, a fim de racionalizar o numerador, e isto dá um fator comum de h no numerador e denominador.

Vamos definir agora algumas operações com funções. Na definição, novas funções são formadas a partir das funções dadas, através da soma, subtração, multiplicação e divisão de valores funcionais. Conseqüentemente, essas novas funções são conhecidas como a *soma*, a *diferença*, o *produto* e o *quociente* das funções originais.

1.4.3 DEFINIÇÃO

Dadas as duas funções f e g:

(i) a sua **soma**, denotada por $f + g$, é a função definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) a sua **diferença**, denotada por $f - g$, é a função definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

(iii) o seu **produto**, denotado por $f \cdot g$, é a função definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(iv) o seu **quociente**, denotado por f/g, é a função definida por

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Em cada caso, o *domínio* da função resultante consiste naqueles valores de x comuns aos domínios de f e g, com a exigência adicional, no caso (iv), de que os valores de x para os quais $g(x) = 0$ sejam excluídos.

EXEMPLO 3 Dadas as funções f e g definidas por

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x-4}$$

ache:

(a) $(f + g)(x)$; (b) $(f - g)(x)$; (c) $(f \cdot g)(x)$; (d) $(f/g)(x)$.

Solução

(a) $(f + g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$ (b) $(f - g)(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}$

(c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4}$ (d) $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}$

O domínio de f é $[-1, +\infty)$, o domínio de g é $[4, +\infty)$. Assim, nas partes (a), (b) e (c), o domínio da função resultante é $[4, +\infty)$. Na parte (d), o denominador é zero quando $x = 4$; desse modo, 4 é excluído do domínio, o qual, então, é $(4, +\infty)$.

Outra operação com funções consiste em obter a *função composta* de duas funções dadas.

1.4.4 DEFINIÇÃO

Dadas as duas funções f e g, a **função composta**, denotada por $f \circ g$, é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

e o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números x no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f.

A definição indica que quando calculamos $(f \circ g)(x)$, primeiro aplicamos a função g a x e então, a função f a $g(x)$. Esse procedimento será demonstrado na ilustração e no exemplo a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 8** Se f e g são definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = 2x - 3$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(2x - 3)\\ &= \sqrt{2x - 3}\end{aligned}$$

O domínio de g é $(-\infty, +\infty)$, e o domínio de f é $[0, +\infty)$. Logo, o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números reais, para os quais $2x - 3 \geqslant 0$ ou, de modo equivalente, $[\frac{3}{2}, +\infty)$. ◀

EXEMPLO 4 Dado que f e g estão definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 1$$

determine: (a) $f \circ f$; (b) $g \circ g$; (c) $f \circ g$; (d) $g \circ f$. Encontre também o domínio da função composta em cada parte.

Solução

(a) $$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x))\\ &= f(\sqrt{x})\\ &= \sqrt{\sqrt{x}}\\ &= \sqrt[4]{x}\end{aligned}$$

O domínio é $[0, +\infty)$.

(b) $$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x))\\ &= g(x^2 - 1)\\ &= (x^2 - 1)^2 - 1\\ &= x^4 - 2x^2\end{aligned}$$

O domínio é $(-\infty, +\infty)$.

(c) $$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(x^2 - 1)\\ &= \sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

O domínio é $(\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(d) $$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(\sqrt{x})\\ &= (\sqrt{x})^2 - 1\\ &= x - 1\end{aligned}$$

O domínio é $[0, +\infty)$.

Na parte (d) notamos que, embora $x - 1$ seja definida por todos os valores de x, o domínio de $g \circ f$, pela definição de uma função composta, será o conjunto de todos os números x no domínio de f, tais que $f(x)$ esteja no domínio de g. Assim, o domínio de $g \circ f$ deve ser um subconjunto do domínio de f.

Observe, dos resultados das partes (c) e (d) do Exemplo 4, que $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ não são, necessariamente, iguais.

1.4.5 DEFINIÇÃO

(i) Uma função é **par** se, para todo valor de x no domínio de f, $f(-x) = f(x)$.
(ii) Uma função f é denominada **ímpar** se, para todo valor de x no domínio de f, $f(-x) = -f(x)$.

Em ambos os casos (i) e (ii), devemos entender que $-x$ está no domínio de f, sempre que x estiver lá.

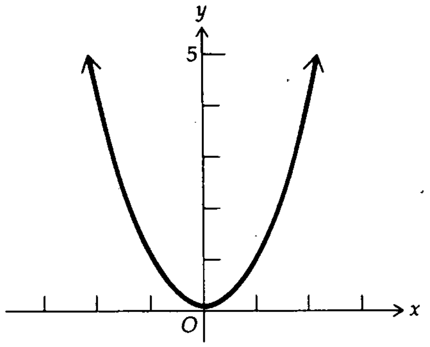


FIGURA 7

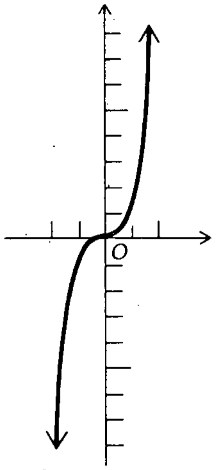


FIGURA 8

▶ ILUSTRAÇÃO 9 (a) Se $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$, então

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 7 \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 7 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Logo, f é uma função par.

(b) Se $g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$, então

$$\begin{aligned} g(-x) &= 3(-x)^5 - 4(-x)^3 - 9(-x) \\ &= -3x^5 + 4x^3 + 9x \\ &= -(3x^5 - 4x^3 - 9x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Logo, g é uma função ímpar.

(c) Se $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$, então

$$\begin{aligned} h(-x) &= 2(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 + 9 \\ &= 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9 \end{aligned}$$

Vemos que a função h não é nem par, nem ímpar. ◀

Do teste de simetria dado na Secção 1.3, segue que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y e o gráfico de uma função ímpar é simétrico com relação à origem.

▶ ILUSTRAÇÃO 10 (a) Se $f(x) = x^2$, f será uma função par e seu gráfico será uma parábola simétrica com respeito ao eixo y. Veja a Figura 7.

(b) Se $g(x) = x^3$, g será uma função ímpar. O gráfico de g, mostrado na Figura 8, será simétrico com respeito à origem. ◀

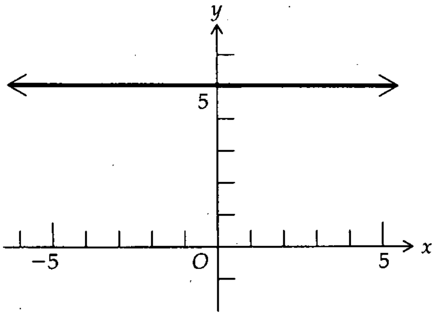


FIGURA 9

Uma função cuja imagem consiste em um único número, é chamada de **função constante**. Assim, se $f(x) = c$ e se c for um número real qualquer, então f será uma função constante e seu gráfico será uma reta paralela ao eixo x, a uma distância de c unidades desse eixo.

▶ ILUSTRAÇÃO 11 (a) A função definida por $f(x) = 5$ é uma função constante, e seu gráfico, mostrado na Figura 9, é uma reta horizontal 5 unidades acima do eixo x.

(b) A função definida por $g(x) = -4$ é uma função constante cujo gráfico é uma reta horizontal 4 unidades abaixo do eixo x. Veja a Figura 10. ◀

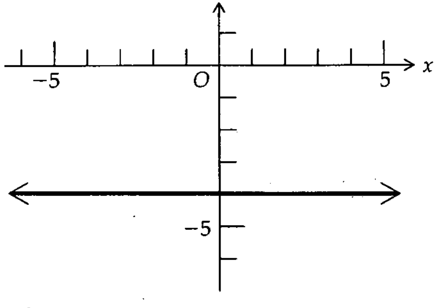


FIGURA 10

Uma **função linear** é definida por

$$f(x) = mx + b$$

onde m e b são constantes e $m \neq 0$. Seu gráfico é uma reta tendo inclinação m e y intercepto b.

▶ ILUSTRAÇÃO 12 A função definida por

$$f(x) = 2x - 6$$

é linear. Seu gráfico é a reta mostrada na Figura 11. ◀

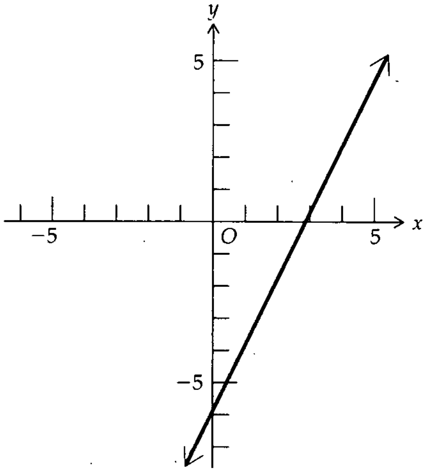


FIGURA 11

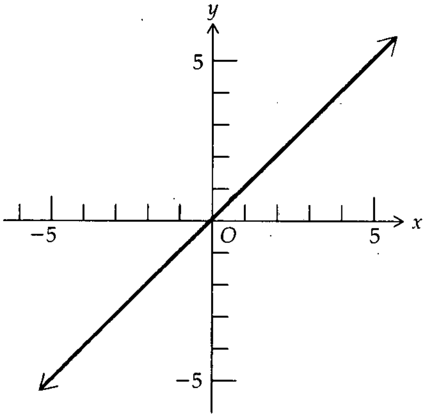


FIGURA 12

A função linear dada, definida por

$$f(x) = x$$

é chamada de **função identidade**. Seu gráfico, mostrado na Figura 12, é a reta que divide ao meio o primeiro e o terceiro quadrantes.

Se uma função f for definida por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais ($a_n \neq 0$) e n for um inteiro não-negativo, então f será chamada de **função polinomial** de grau n. Assim, a função definida por

$$f(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$$

é uma função polinomial de grau 5.

Uma função linear será uma função polinomial de grau 1. Se o grau de uma função polinomial for 2, ela será chamada de **função quadrática**, e se o grau for 3, será chamada de **função cúbica**.

Se uma função puder ser expressa como o quociente de duas funções polinomiais, ela será chamada de **função racional**.

Uma **função algébrica** é aquela formada por um número finito de operações algébricas sobre as funções identidade e constante. Essas operações algébricas incluem adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. As funções polinomiais e racionais são tipos especiais de funções algébricas. Um exemplo complicado de uma função algébrica é aquele definido por

$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Além das funções algébricas, são também consideradas em Cálculo as **funções transcendentais**. Exemplos são as funções trigonométricas discutidas na Secção 1.6 e as funções exponencial e logarítmica introduzidas no Capítulo 7.

EXERCÍCIOS 1.4

Nos Exercícios de 1 a 4, determine se o conjunto dado é uma função. Se for, qual o seu domínio?

1. (a) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 4}\}$; (b) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 4}\}$; (c) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$; (d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

2. (a) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x + 1}\}$; (b) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 1}\}$; (c) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{1 - x^2}\}$; (d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

3. (a) $\{(x, y) \mid y = x^2\}$; (b) $\{(x, y) \mid x = y^2\}$; (c) $\{(x, y) \mid y = x^3\}$; (d) $\{(x, y) \mid x = y^3\}$.

4. (a) $\{(x, y) \mid y = (x - 1)^2 + 2\}$; (b) $\{(x, y) \mid x = (y - 2)^2 + 1\}$; (c) $\{(x, y) \mid y = (x + 2)^3 - 1\}$; (d) $\{(x, y) \mid x = (y + 1)^3 - 2\}$.

5. Dada $f(x) = 2x - 1$, ache (a) $f(3)$; (b) $f(-2)$; (c) $f(0)$; (d) $f(a + 1)$; (e) $f(x + 1)$; (f) $f(2x)$; (g) $2f(x)$; (h) $f(x + h)$; (i) $f(x) + f(h)$; (j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

6. Dada $f(x) = \dfrac{3}{x}$, ache (a) $f(1)$; (b) $f(-3)$; (c) $f(6)$; (d) $f(\frac{1}{3})$; (e) $f\left(\dfrac{3}{a}\right)$; (f) $f\left(\dfrac{3}{x}\right)$; (g) $\dfrac{f(3)}{f(x)}$; (h) $f(x - 3)$; (i) $f(x) - f(3)$; (j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

7. Dada $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$, ache (a) $f(-2)$; (b) $f(-1)$; (c) $f(0)$; (d) $f(3)$; (e) $f(h + 1)$; (f) $f(2x^2)$; (g) $f(x^2 - 3)$; (h) $f(x + h)$; (i) $f(x) + f(h)$; (j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

8. Dada $g(x) = 3x^2 - 4$, ache (a) $g(-4)$; (b) $g(\frac{1}{2})$; (c) $g(x^2)$; (d) $g(3x^2 - 4)$; (e) $g(x - h)$; (f) $g(x) - g(h)$; (g) $\dfrac{g(x + h) - g(x)}{h}$, $h \neq 0$.

9. Dada $F(x) = \sqrt{2x + 3}$, ache (a) $F(-1)$; (b) $F(4)$; (c) $F(\frac{1}{2})$; (d) $F(11)$; (e) $F(2x + 3)$; (f) $\dfrac{F(x + h) - F(x)}{h}$, $h \neq 0$.

10. Dada $G(x) = \sqrt{4 - x}$, ache (a) $G(-5)$; (b) $G(0)$; (c) $G(1)$; (d) $G(\frac{11}{9})$; (e) $G(4 - x)$; (f) $\dfrac{G(x + h) - G(x)}{h}$; $h \neq 0$

Nos Exercícios de 11 a 20, as funções f e g são definidas. Em cada exercício, defina as seguintes funções e determine o domínio da função resultante: (a) f + g; (b) f − g; (c) f · g; (d) f/g; (e) g/f.

11. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$

12. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$

13. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

14. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 4 - x^2$

15. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$

16. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x - 3|$

17. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x - 2$

18. $f(x) = \sqrt{x + 4}$; $g(x) = x^2 - 4$

19. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

20. $f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Nos Exercícios de 21 a 30, estão definidas as funções f e g. Em cada exercício, defina as seguintes funções e determine o domínio da função composta: (a) f ∘ g; (b) g ∘ f; (c) f ∘ f; (d) g ∘ g.

21. $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$

22. $f(x) = 3 - 2x$; $g(x) = 6 - 3x$

23. As funções do Exercício 11.

24. As funções do Exercício 12.

25. $f(x) = \sqrt{x - 2}$; $g(x) = x^2 - 2$

26. $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

27. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$

28. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = -\dfrac{1}{x}$

29. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x + 2|$

30. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $g(x) = \sqrt{x - 1}$

Nos Exercícios 31 e 32 a função f está definida. Em cada exercício, defina as seguintes funções e determine o domínio da função resultante: (a) $f(x^2)$; (b) $[f(x)]^2$; (c) $(f \circ f)(x)$.

31. $f(x) = 2x - 3$

32. $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$

33. Dada $G(x) = |x - 2| - |x| + 2$, expresse $G(x)$ sem as barras de valor absoluto, se x estiver no intervalo dado: (a) $[2, +\infty)$; (b) $(-\infty, 0)$; (c) $[0, 2)$.

34. Dada $f(t) = \dfrac{|3 + t| - |t| - 3}{t}$, expresse $f(t)$ sem as barras de valor absoluto, se t estiver no intervalo dado: (a) $(0, +\infty)$; (b) $[-3, 0)$; (c) $(-\infty, -3)$.

35. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ache (a) $f(1)$; (b) $f(-1)$; (c) $f(4)$; (d) $f(-4)$; (e) $f(-x)$; (f) $f(x + 1)$; (g) $f(x^2)$; (h) $f(-x^2)$.

Em cada caso dos Exercícios 36 e 37, determine se a função dada é par, ímpar ou nenhuma das duas.

36. (a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ (b) $f(x) = 5x^3 - 7x$
(c) $f(s) = s^2 + 2s + 2$ (d) $g(x) = x^6 - 1$
(e) $h(t) = 5t^7 + 1$ (f) $f(x) = |x|$
(g) $f(y) = \dfrac{y^3 - y}{y^2 + 1}$ (h) $g(z) = \dfrac{z - 1}{z + 1}$

37. (a) $g(x) = 5x^2 - 4$ (b) $f(x) = x^3 + 1$
(c) $f(t) = 4t^5 + 3t^3 - 2t$ (d) $g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$
(e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (f) $h(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{2x^3 + x}$
(g) $f(z) = (z - 1)^2$ (h) $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$
(i) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (j) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

38. Existe uma função que é par e ímpar. Qual é?

39. Determine se a função composta $f \circ g$ é par ou ímpar em cada um dos seguintes casos: (a) f e g são ambas pares; (b) f e g são ambas ímpares; (c) f é par e g é ímpar; (d) f é ímpar e g é par.

Se f e g forem duas funções tais que $(f \circ g)(x) = x$ e $(g \circ f)(x) = x$, então f e g serão funções inversas. Nos Exercícios de 40 a 42, mostre que f e g são funções inversas.

40. $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = \dfrac{x + 3}{2}$

41. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ e $g(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

42. $f(x) = x^2, x \geqslant 0$ e $g(x) = \sqrt{x}$

1.5 GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Como preparação para o nosso estudo de limites e continuidade no Capítulo 2, discutiremos os gráficos de funções. Lembre-se, da Secção 1.4, que o gráfico de uma função f é o mesmo que o gráfico da equação $y = f(x)$. Enquanto o domínio de uma função geralmente torna-se evidente a partir da definição da função, a imagem é determinada freqüentemente pelo gráfico da função.

EXEMPLO 1 A **função valor absoluto** é definida por

$$f(x) = |x|$$

Determine o domínio e a imagem da função valor absoluto e faça um esboço de seu gráfico.

Solução Da definição (1.1.8) de $|x|$, temos

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O domínio é $(-\infty, +\infty)$. O gráfico de f consiste em duas semi-retas que passam pela origem e acima do eixo x; uma delas tem inclinação igual a 1 e a outra tem -1. Veja a Figura 1. A imagem é $[0, +\infty)$.

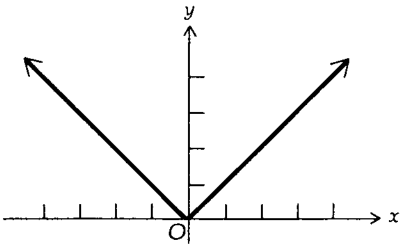


FIGURA 1

EXEMPLO 2 Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se } x \leqslant -1 \\ 1 & \text{se } -1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{se } 2 < x \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem de f e desenhe um esboço de seu gráfico.

Solução O domínio é $(-\infty, +\infty)$ e um esboço do gráfico aparece na Figura 2. A imagem consiste nos três números -3, 1 e 4.

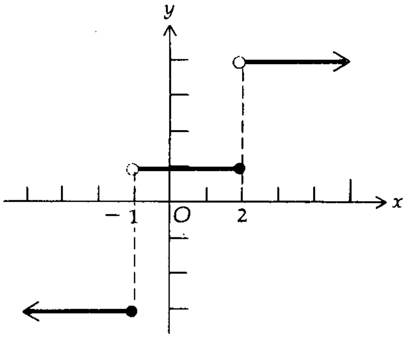


FIGURA 2

EXEMPLO 3 Seja g a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x < 1 \\ x^2 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem de g e faça um esboço de seu gráfico.

Solução O domínio de g é $(-\infty, +\infty)$. O gráfico consiste na parte da reta $y = 3x - 2$ para a qual $x < 1$ e na parte da parábola $y = x^2$ para a qual $1 \leqslant x$. Um esboço do gráfico está na Figura 3. A imagem é $(-\infty, +\infty)$.

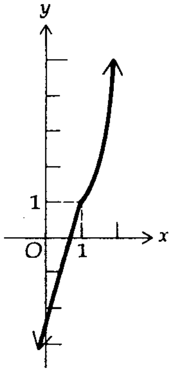


FIGURA 3

EXEMPLO 4 A função h é definida por

$$h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Determine o domínio e a imagem de h e faça um esboço de seu gráfico.

Solução Como $h(x)$ está definida para todo x exceto 3, o domínio de h consiste em todos os números exceto 3. Quando $x = 3$, ambos o numerador e o denominador são nulos e 0/0 é indefinido.

Fatorando o numerador em $(x - 3)(x + 3)$ obtemos

$$h(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

ou $h(x) = x + 3$, desde que $x \neq 3$. Em outras palavras, a função h pode ser definida por

$$h(x) = x + 3 \quad \text{se } x \neq 3$$

O gráfico consiste em todos os pontos sobre a reta $y = x + 3$, exceto o ponto $(3, 6)$. Veja a Figura 4. A imagem de h é o conjunto de todos os números reais exceto 6.

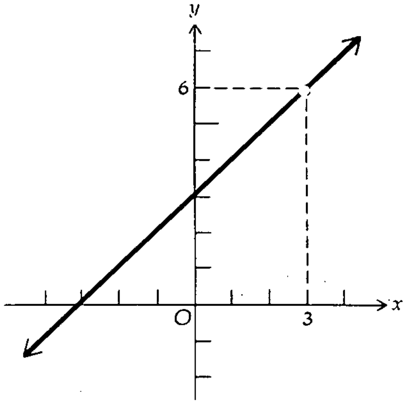


FIGURA 4

EXEMPLO 5 Seja H a função definida por

$$H(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem de H e faça um esboço de seu gráfico.

Solução Como H está definida para todos os valores de x, seu domínio é $(-\infty, +\infty)$. Um esboço do gráfico de H é mostrado na Figura 5. A imagem é o conjunto de todos os números reais exceto 6.

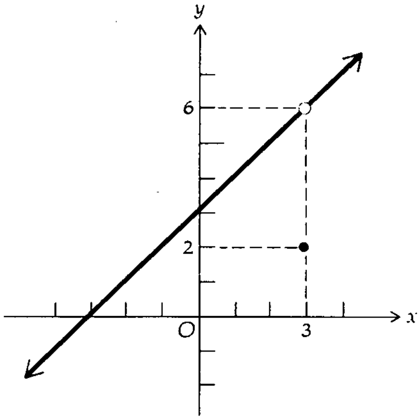


FIGURA 5

EXEMPLO 6 A função f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 2 \\ 7 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem de f e faça um esboço de seu gráfico.

Solução Como f é definida para todos os valores de x, o domínio é $(-\infty, +\infty)$. O gráfico mostrado na Figura 6 consiste nos pontos $(2, 7)$ e todos os pontos sobre a parábola $y = x^2$ exceto $(2, 4)$. A imagem é $[0, +\infty)$.

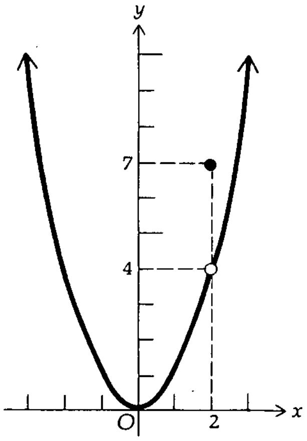


FIGURA 6

EXEMPLO 7 Seja F a função definida por

$$F(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < 3 \\ 5 & \text{se } x = 3 \\ 2x + 1 & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

Determine o domínio e a imagem de F e faça um esboço de seu gráfico.

Solução O domínio de F é $(-\infty, +\infty)$. A Figura 7 mostra um esboço do gráfico de F; consiste em parte da reta $y = x - 1$ para $x < 3$, o ponto $(3, 5)$ e parte da reta $y = 2x + 1$ para $3 < x$. Os valores funcionais são ou números menores do que 2, o número 5, ou números maiores do que 7. Logo, a imagem de F é o número 5 e aqueles números em $(-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$.

EXEMPLO 8 A função g é definida por

$$g(x) = \sqrt{x(x - 2)}$$

Determine o domínio e a imagem de g e faça um esboço de seu gráfico.

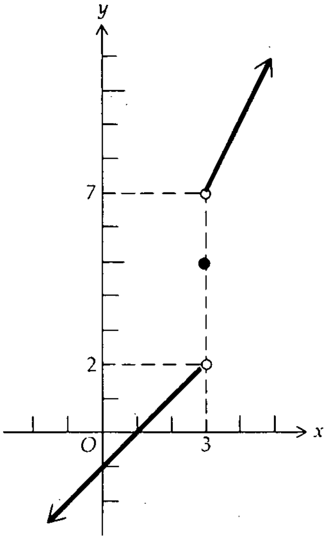


FIGURA 7

Solução Como $\sqrt{x(x-2)}$ não é um número real quando $x(x-2) < 0$, o domínio de g consiste em todos os valores de x para os quais $x(x-2) \geqslant 0$. Essa inequação estará satisfeita quando ocorrer um dos dois casos: $x \geqslant 0$ e $x - 2 \geqslant 0$; ou $x \leqslant 0$ e $x - 2 \leqslant 0$.

Caso 1: $x \geqslant 0$ e $x - 2 \geqslant 0$. Isto é,

$x \geqslant 0$ e $x \geqslant 2$

Ambas as desigualdades estão verificadas se $x \geqslant 2$, que é o intervalo $[2, +\infty)$.

Caso 2: $x \leqslant 0$ e $x - 2 \leqslant 0$. Isto é,

$x \leqslant 0$ e $x \leqslant 2$

Ambas as desigualdades ocorrem se $x \leqslant 0$, que é o intervalo $(-\infty, 0]$.

Combinando as soluções dos dois casos obteremos o domínio de g. Ele é $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

A Figura 8 mostra um esboço do gráfico de g. A imagem de g é $[0, +\infty)$.

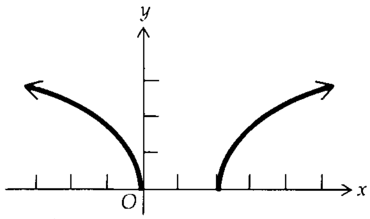


FIGURA 8

O símbolo $\llbracket x \rrbracket$ é usado para denotar o maior inteiro, menor ou igual a x; isto é,

$\llbracket x \rrbracket = n$ se $n \leqslant x < n + 1$, onde n é um inteiro

Essa função é chamada de **função maior inteiro**. Portanto, se I for essa função

$I = \{(x, y) \mid y = \llbracket x \rrbracket\}$

e o domínio de I será $(-\infty, +\infty)$. Para obter um esboço do gráfico de I, primeiro calculamos alguns valores funcionais.

Se $-5 \leqslant x < -4$, $\llbracket x \rrbracket = -5$

Se $-4 \leqslant x < -3$, $\llbracket x \rrbracket = -4$

Se $-3 \leqslant x < -2$, $\llbracket x \rrbracket = -3$

Se $-2 \leqslant x < -1$, $\llbracket x \rrbracket = -2$

Se $-1 \leqslant x < 0$, $\llbracket x \rrbracket = -1$

Se $0 \leqslant x < 1$, $\llbracket x \rrbracket = 0$

Se $1 \leqslant x < 2$, $\llbracket x \rrbracket = 1$

Se $2 \leqslant x < 3$, $\llbracket x \rrbracket = 2$

Se $3 \leqslant x < 4$, $\llbracket x \rrbracket = 3$

Se $4 \leqslant x < 5$, $\llbracket x \rrbracket = 4$

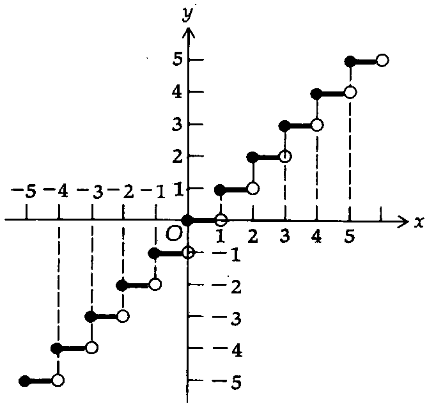


FIGURA 9

A Figura 9 mostra um esboço do gráfico de I. A imagem é o conjunto de todos os inteiros.

EXEMPLO 9 Faça um esboço do gráfico da função definida por

$G(x) = \llbracket x \rrbracket - x$

Dê o domínio e a imagem de G.

Solução Como G está definida para todos os valores de x, seu domínio é $(-\infty, +\infty)$. Da definição de $\llbracket x \rrbracket$, temos o seguinte:

$$\begin{array}{lllll}
\text{Se} & -2 \leqslant x < -1, & \llbracket x \rrbracket = -2; & \text{portanto} & G(x) = -2 - x \\
\text{Se} & -1 \leqslant x < 0, & \llbracket x \rrbracket = -1; & \text{portanto} & G(x) = -1 - x \\
\text{Se} & 0 \leqslant x < 1, & \llbracket x \rrbracket = 0; & \text{portanto} & G(x) = -x \\
\text{Se} & 1 \leqslant x < 2, & \llbracket x \rrbracket = 1; & \text{portanto} & G(x) = 1 - x \\
\text{Se} & 2 \leqslant x < 3, & \llbracket x \rrbracket = 2; & \text{portanto} & G(x) = 2 - x
\end{array}$$

e assim por diante. Em termos mais gerais, se n for um inteiro qualquer, então

$$\text{Se } n \leqslant x < n+1, \quad \llbracket x \rrbracket = n; \quad \text{portanto} \quad G(x) = n - x$$

Com estes valores de funções obtemos o esboço do gráfico de G, mostrado na Figura 10. Do gráfico observamos que a imagem de G é $(-1, 0]$.

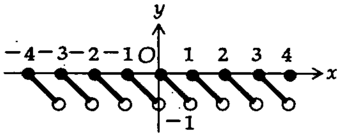


FIGURA 10

EXERCÍCIOS 1.5

Em cada exercício, determine o domínio e a imagem da função e desenhe um esboço de seu gráfico.

1. $f(x) = 3x - 1$
2. $g(x) = 6 - 2x$
3. $F(x) = x^2 - 1$
4. $G(x) = 5 - x^2$
5. $g(x) = \sqrt{x+1}$
6. $f(x) = \sqrt{3x - 6}$
7. $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$
8. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$
9. $h(x) = \sqrt{-x}$
10. $H(x) = |x - 1|$
11. $f(x) = |4 - x|$
12. $h(x) = |x| - 1$
13. $F(x) = 4 - |x|$
14. $f(x) = 5 - |x + 1|$
15. $g(x) = |x - 2| + 4$
16. $F(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x + 1}$
17. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$
18. $g(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - x - 6}$
19. $G(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \leqslant 3 \\ 2 & \text{se } 3 < x \end{cases}$
20. $h(x) = \begin{cases} -4 & \text{se } x < -2 \\ -1 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3 & \text{se } 2 < x \end{cases}$
21. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}$
22. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \neq -3 \\ -2 & \text{se } x = -3 \end{cases}$
23. $H(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{se } 3 \leqslant x \end{cases}$
24. $\phi(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{se } -5 \leqslant x \leqslant 5 \\ x - 5 & \text{se } 5 < x \end{cases}$
25. $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{se } x \leqslant -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{se } -4 < x < 4 \\ 6 - x & \text{se } 4 \leqslant x \end{cases}$
26. $g(x) = \begin{cases} 6x + 7 & \text{se } x < -2 \\ 3 & \text{se } x = -2 \\ 4 - x & \text{se } -2 < x \end{cases}$
27. $F(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$
28. $G(x) = \dfrac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 3x + 2)(x - 3)}$
29. $F(x) = \dfrac{(x + 1)(x^2 + 3x - 10)}{x^2 + 6x + 5}$
30. $h(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
31. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$
32. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{x + 3}$
33. $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$
34. $F(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 9x^2 - 3x + 18}{x^2 + x - 6}$
35. $h(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 - 6x - 30}{x + 5}$
36. $g(x) = |x| \cdot |x - 1|$
37. $f(x) = |x| + |x - 1|$
38. $F(x) = \llbracket x + 2 \rrbracket$
39. $g(x) = \llbracket x - 4 \rrbracket$
40. $H(x) = |x| + \llbracket x \rrbracket$
41. $G(x) = x - \llbracket x \rrbracket$
42. $h(x) = \llbracket x^2 \rrbracket$
43. $g(x) = \dfrac{\llbracket x \rrbracket}{|x|}$
44. $h(x) = \dfrac{|x|}{\llbracket x \rrbracket}$

1.6 AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Você já deve ter feito algum estudo de trigonometria. Mas, dada a importância das funções trigonométricas em Cálculo, apresentamos aqui um breve resumo delas.

Em geometria um **ângulo** é definido como a união de dois raios chamados de **lados**, tendo um extremo em comum denominado **vértice**. Qualquer ângulo é congruente a um ângulo tendo vértice na origem e um lado, chamado de **lado inicial**, sobre o lado positivo do eixo x. Dizemos que tal ângulo está na **posição padrão**. A Figura 1 mostra um ângulo AOB na posição padrão com OA como lado inicial. O outro lado OB é chamado de **lado final**. O ângulo AOB pode ser formado ao girarmos o lado OA até o lado OB; sob tal rotação o ponto A move-se ao longo da circunferência de centro O e raio $|\overline{OA}|$, até o ponto B.

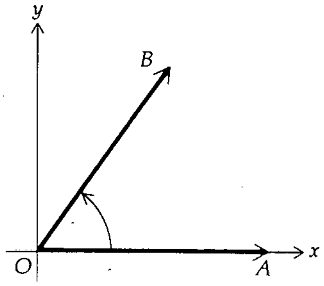


FIGURA 1

Quando os problemas envolvem ângulos de triângulos, a medida de um ângulo é dada usualmente em graus. Mas, em Cálculo estamos interessados em funções trigonométricas de números reais e essas funções estão definidas em termos da *medida de ângulos em radianos.*

O comprimento de um arco de uma circunferência é usado para definir a medida em radianos de um ângulo.

1.6.1 DEFINIÇÃO

Seja AOB um ângulo na posição padrão e $|\overline{OA}| = 1$. Se s unidades for o comprimento do arco da circunferência percorrido pelo ponto A quando o lado inicial OA é girado até o lado final OB, a **medida em radianos** t, do ângulo AOB, será dada por

$t = s$ se a rotação for no sentido anti-horário

e

$t = -s$ se a rotação for no sentido horário

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Do fato de que a medida da circunferência do círculo unitário é 2π, as medidas em radianos dos ângulos na Figura 2 (a)-(f) são determinadas. Elas são $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{3}{4}\pi$ e $\frac{7}{4}\pi$, respectivamente. ◀

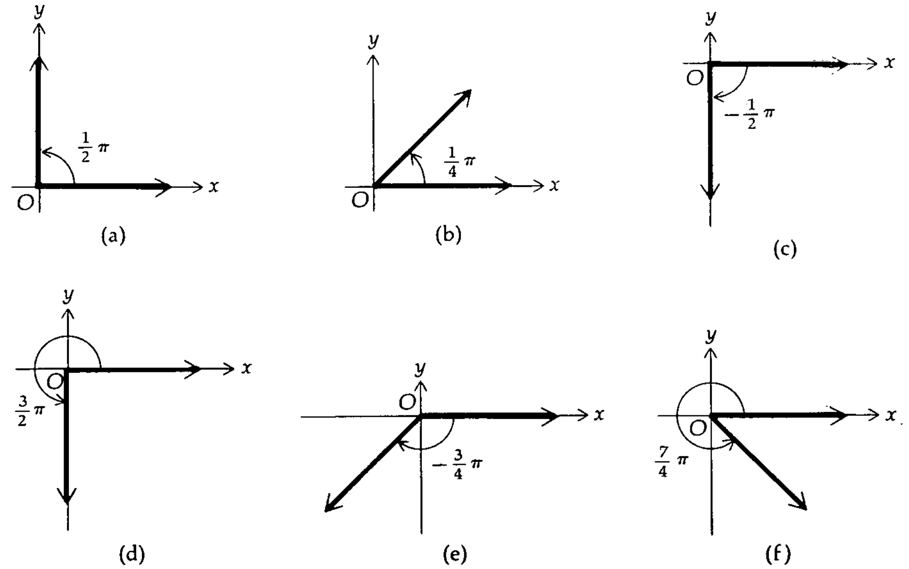


FIGURA 2

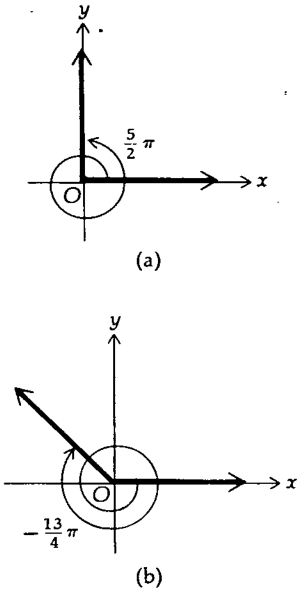


FIGURA 3

Na Definição 1.6.1, é possível ocorrer mais do que uma revolução completa na relação de OA.

► **ILUSTRAÇÃO 2** A Figura 3(a) mostra um ângulo cuja medida em radianos é $\frac{5}{2}\pi$, e a Figura 3(b) mostra um cuja medida em radianos é $-\frac{13}{4}\pi$. ◄

Um ângulo formado por uma revolução completa, de tal forma que OA seja coincidente com OB, tem por medida 360 graus e 2π como medida em radianos. Assim sendo, há a seguinte correspondência entre as medidas em graus e radianos (onde o símbolo $\sim$ indica que as medidas dadas são de ângulos iguais ou congruentes):

$$360^\circ \sim 2\pi \text{ rad} \qquad 180^\circ \sim \pi \text{ rad}$$

Disso segue que

$$1^\circ \sim \tfrac{1}{180}\pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} \sim \frac{180^\circ}{\pi}$$
$$\approx 57^\circ 18'$$

Note que o símbolo $\approx$ antes de $57^\circ 18'$ indica que 1 rad e aproximadamente $57^\circ 18'$ são medidas do mesmo ângulo ou de ângulos congruentes.

Dessa correspondência, a medida de um ângulo pode ser convertida de um sistema de unidades para o outro.

EXEMPLO 1 (a) Ache a medida em radianos equivalente a 162°; (b) encontre a medida equivalente em graus para $\frac{5}{12}\pi$ rad.

Solução

(a) $162^\circ \sim 162 \cdot \frac{1}{180}\pi \text{ rad}$ (b) $\frac{5}{12}\pi \text{ rad} \sim \frac{5}{12}\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$

$162^\circ \sim \frac{9}{10}\pi \text{ rad}$ $\frac{5}{12}\pi \text{ rad} \sim 75^\circ$

Tabela 1

Medida em graus	*Medida em radianos*
30	$\frac{1}{6}\pi$
45	$\frac{1}{4}\pi$
60	$\frac{1}{3}\pi$
90	$\frac{1}{2}\pi$
120	$\frac{2}{3}\pi$
135	$\frac{3}{4}\pi$
150	$\frac{5}{6}\pi$
180	π
270	$\frac{3}{2}\pi$
360	2π

A Tabela 1 dá a correspondência em graus e radianos da medida de alguns ângulos. Vamos definir agora as funções *seno* e *co-seno* de qualquer número real.

1.6.2 DEFINIÇÃO

Suponha que t seja um número real. Coloque na posição padrão um ângulo com t rad de medida e seja P a intersecção do lado final do ângulo com a circunferência do círculo unitário com centro na origem. Se P for o ponto (x, y), então a função **seno** será definida por

$$\text{sen } t = y$$

então a função **seno** será definida por

$$\cos t = x$$

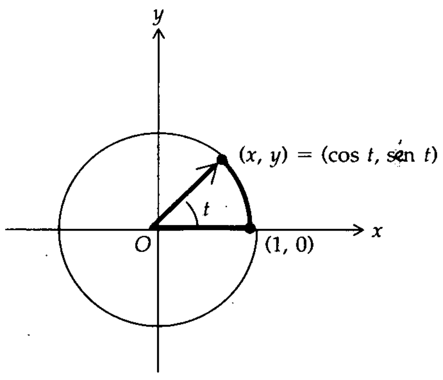


FIGURA 4

Da definição acima, vemos que sen t e cos t estão definidas para todos os valores de t. Assim sendo, o domínio das funções seno e co-seno é o conjunto de todos os números reais. A Figura 4 mostra o ponto (cos t, sen t) quando $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, e a Figura 5 mostra o ponto (cos t, sen t) quando $-\frac{3}{2}\pi < t < -\pi$.

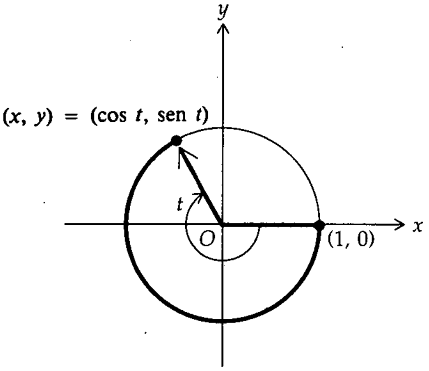


FIGURA 5

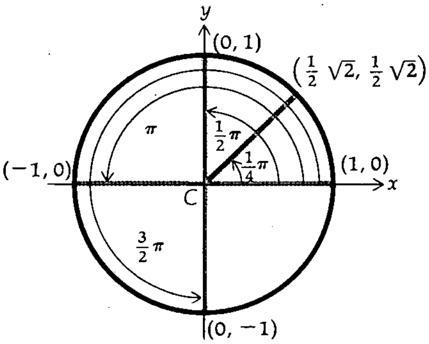


FIGURA 6

Tabela 2

t	sen t	cos t
0	0	1
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	0
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
π	0	-1
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0
2π	0	1

O maior valor de qualquer uma das duas funções é 1 e o menor é -1. Veremos posteriormente que as funções seno e co-seno assumem todos os valores entre -1 e 1; segue, portanto, que a imagem das duas funções é $[-1, 1]$.

Para certos valores de t, o seno e o co-seno são facilmente obtidos de uma figura. Da Figura 6 vemos que $\text{sen } 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$, $\text{sen } \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $\cos \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\text{sen } \frac{1}{2}\pi = 1$ e $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$, $\text{sen } \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$, $\text{sen } \frac{3}{2}\pi = -1$ e $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$. A Tabela 2 dá esses valores e outros muitos usados.

Uma equação da circunferência do círculo unitário com centro na origem é $x^2 + y^2 = 1$. Como $x = \cos t$ e $y = \text{sen } t$, segue que

$$\boxed{\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1} \tag{1}$$

Note que $\text{sen}^2 t + \cos^2 t$ significam $(\text{sen } t)^2$ e $(\cos t)^2$. A igualdade (1) é uma identidade, pois é válida para todo número real t. É chamada de **identidade fundamental de Pitágoras**, mostrando a relação entre os valores seno e co-seno, e pode ser usada para calcular um deles quando o outro é conhecido.

As Figuras 7 e 8 mostram ângulos com uma medida em radianos negativa $-t$ e os ângulos correspondentes tendo uma medida em radianos positiva t. Dessas figuras, observe que

$$\boxed{\text{sen}(-t) = -\text{sen } t \text{ e } \cos(-t) = \cos t}$$

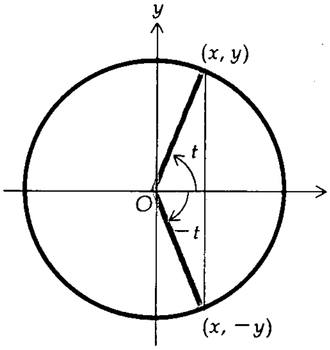


FIGURA 7

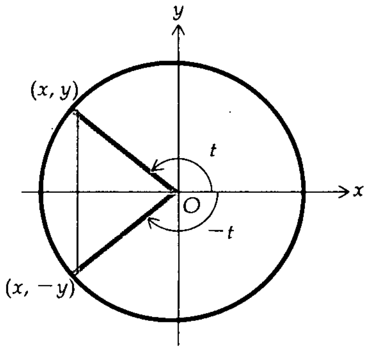


FIGURA 8

Essas equações valem para todo número real t, pois os pontos onde os lados finais dos ângulos (tendo medidas em radianos t e $-t$) interceptam a circunferência do círculo unitário, têm abscissas e ordenadas iguais que diferem somente em sinal. Logo, são identidades. Dessas igualdades, segue que seno é uma função ímpar e co-seno é uma função par.

Da Definição 1.6.2 são obtidas as seguintes identidades:

$$\boxed{\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen } t \text{ e } \cos(t + 2\pi) = \cos t} \tag{2}$$

A propriedade do seno e do co-seno estabelecida pelas igualdades (2) é chamada de **periodicidade**.

1.6.3 DEFINIÇÃO Uma função f será **periódica** se existir um número real $p \neq 0$ tal que quando x estiver no domínio de f, então $x + p$ estará também no domínio de f e

$$f(x + p) = f(x)$$

O menor número real positivo p é chamado de **período** de f.

Compare essa definição com as igualdades (2). Como podemos mostrar que 2π é o menor número positivo p com a propriedade segundo a qual $\operatorname{sen}(t + p) = \operatorname{sen} t$ e $\cos(t + p) = \cos t$, o seno e o co-seno são periódicos com período 2π, isto é, sempre que o valor da variável independente t aumentar em 2π, o valor de cada uma das funções será repetido. É devido à periodicidade do seno e do co-seno que essas funções têm importantes aplicações, associadas a fenômenos que se repetem periodicamente, tais como movimentos ondulatórios, correntes elétricas alternadas, cordas vibratórias, pêndulos oscilantes, ciclos de negócios e ritmos biológicos.

EXEMPLO 2 Use a periodicidade das funções seno e co-seno, bem como os valores de $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ quando $0 \leqslant t < 2\pi$ para determinar o valor exato de cada um dos seguintes: (a) $\operatorname{sen} \frac{17}{4}\pi$; (b) $\cos \frac{7}{3}\pi$; (c) $\operatorname{sen} \frac{15}{2}\pi$; (d) $\cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$

Solução

(a)
$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\tfrac{17}{4}\pi &= \operatorname{sen}(\tfrac{1}{4}\pi + 2 \cdot 2\pi)\\ &= \operatorname{sen}\tfrac{1}{4}\pi\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\cos\tfrac{7}{3}\pi &= \cos(\tfrac{1}{3}\pi + 2\pi)\\ &= \cos\tfrac{1}{3}\pi\\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\tfrac{15}{2}\pi &= \operatorname{sen}(\tfrac{3}{2}\pi + 3 \cdot 2\pi)\\ &= \operatorname{sen}\tfrac{3}{2}\pi\\ &= -1\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}\cos(-\tfrac{7}{6}\pi) &= \cos[\tfrac{5}{6}\pi + (-1)2\pi]\\ &= \cos\tfrac{5}{6}\pi\\ &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

Vamos definir agora mais quatro funções trigonométricas. Elas são definidas em termos do seno e co-seno.

1.6.4 DEFINIÇÃO

As funções **tangente** e **secante** são definidas por

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

para todo número real t para o qual $\cos t \neq 0$.
As funções **co-tangente** e **co-secante** são definidas por

$$\operatorname{cotg} t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \qquad \operatorname{cosec} t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

para todo número real t para o qual $\operatorname{sen} t \neq 0$.

As funções tangente e secante não estão definidas quando $\cos t = 0$. Assim sendo, o domínio das funções tangente e secante é o conjunto de todos os números reais exceto os números da forma $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, onde k é qualquer inteiro. Analogamente, como $\operatorname{cotg} t$ e cosec não estão definidas quando $\operatorname{sen} t = 0$, o domínio das funções co-tangente e co-secante é o conjunto de todos os números reais exceto os números da forma $k\pi$, onde k é qualquer inteiro.

Podemos mostrar que a tangente e a co-tangente são periódicas, com período π, isto é,

$$\boxed{\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg} t \text{ e } \operatorname{cotg}(t + \pi) = \operatorname{cotg} t}$$

Além disso, a secante e a co-secante são periódicas com período 2π, logo

$$\boxed{\sec(t + 2\pi) = \sec t \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec}(t + 2\pi) = \operatorname{cosec} t}$$

Usando a identidade fundamental de Pitágoras (1) e a Definição 1.6.4, obtemos duas outras identidades. Uma dessas identidades é obtida quando dividimos ambos os lados de (1) por $\cos^2 t$, e a outra é obtida ao dividirmos ambos os lados de (1) por $\operatorname{sen}^2 t$. Temos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 t + 1 = \sec^2 t \quad \text{e} \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 t = \operatorname{cosec}^2 t}$$

Essas duas identidades são chamadas de identidades de Pitágoras.

Três outras identidades importantes que seguem da Definição 1.6.4 são

$$\boxed{\operatorname{sen} t \operatorname{cosec} t = 1 \qquad \cos t \sec t = 1 \qquad \operatorname{tg} t \operatorname{cotg} t = 1}$$

Essas três identidades, as três identidades de Pitágoras, e as duas identidades na Definição 1.6.4 que definem a tangente e a co-tangente são as *oito identidades trigonométricas fundamentais*, as quais, como outras fórmulas da Trigonometria, aparecem no Apêndice.

Definimos as funções trigonométricas com domínios no conjunto dos números reais. Existem importantes aplicações das funções trigonométricas para as quais os domínios são conjuntos de ângulos. Para esse propósito, uma função trigonométrica do ângulo θ é a função correspondente do número real t, onde t é a medida de θ em radianos.

1.6.5 DEFINIÇÃO

Se θ for um ângulo cuja medida em radianos é t, então

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} t \qquad \cos \theta = \cos t \qquad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} t$$
$$\operatorname{cotg} \theta = \operatorname{cotg} t \qquad \sec \theta = \sec t \qquad \operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} t$$

Quando consideramos uma função trigonométrica de um ângulo θ, freqüentemente a medida do ângulo é usada em lugar de θ. Por exemplo, se a medida de um ângulo θ for 60° (ou, equivalentemente, a medida de θ em radianos for $\frac{1}{3}\pi$), então, em lugar de $\operatorname{sen} \theta$, poderemos escrever $\operatorname{sen} 60°$ ou $\operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi$. Observe que quando a medida de um ângulo for dada em graus, o símbolo de graus aparece escrito. Mas, quando não houver nenhum símbolo, devemos entender que a medida do ângulo é dada em radianos. Por exemplo, $\cos 2°$ significa o co-seno do ângulo cuja medida é 2 graus, enquanto que $\cos 2$ significa o co-seno do ângulo cuja medida é 2 rad. Isso é consistente com o fato de que o co-seno de um ângulo cuja medida em radianos é 2 é igual ao co-seno do número real 2.

Agora mostraremos como a função tangente pode ser usada em conjunto com a inclinação de uma reta. Primeiro definimos o *ângulo de inclinação* de uma reta.

1.6.6 DEFINIÇÃO

O **ângulo de inclinação** de uma reta não-paralela ao eixo x é o menor ângulo medido no sentido anti-horário, a partir do sentido positivo do eixo x até a reta. O ângulo de inclinação de uma reta paralela ao eixo x é definido como sendo zero.

Se α for o ângulo de inclinação de uma reta, então $0° \leqslant \alpha < 180°$. A Figura 9 mostra a reta L para a qual $0° < \alpha < 90°$ e a Figura 10 mostra aquela para a qual $90° < \alpha < 180°$.

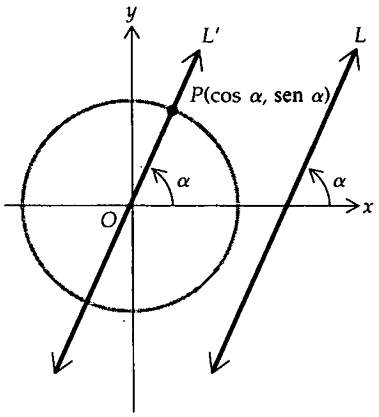


FIGURA 9

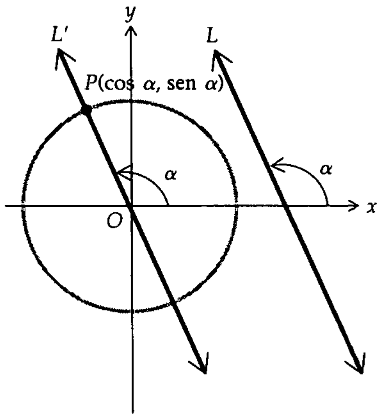


FIGURA 10

1.6.7 TEOREMA Se α for o ângulo de inclinação da reta L, não-paralela ao eixo y, então a inclinação m de L dada por

$$m = \text{tg}\ \alpha$$

Prova Veja as Figuras 9 e 10, que mostram a reta dada L, cujo ângulo de inclinação é α e cuja inclinação é m. A reta L' que passa pela origem e é paralela a L, também tem inclinação m e um ângulo de inclinação α. O ponto P (cos α, sen α) é a intersecção de L' com a circunferência do círculo unitário U. Como o ponto (0, 0) também está em L', segue, da Definição 1.2.2 que

$$m = \frac{\text{sen}\ \alpha - 0}{\cos \alpha - 0}$$

$$= \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \text{tg}\ \alpha$$

■

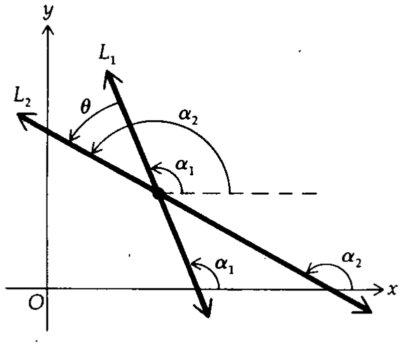


FIGURA 11

Se a reta L for vertical, o ângulo de inclinação de L será 90° e tg 90° não existe. Isso é consistente com o fato de que a inclinação de uma reta vertical não está definida.

O Teorema 1.6.7 pode ser usado para obter uma fórmula para encontrar o ângulo entre duas retas concorrentes não-verticais. Quando duas retas se interceptam, formam dois ângulos suplementares com vértice no ponto de intersecção. Para distinguir esses dois ângulos, seja L_2 a reta com o maior ângulo de inclinação α_2 e seja L_1 a outra reta cujo ângulo de inclinação é α_1. Se θ for o ângulo entre as duas retas, então definimos

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

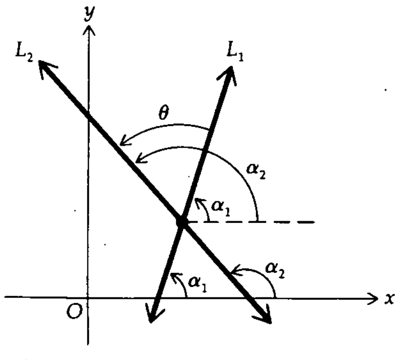


FIGURA 12

Se L_1 e L_2 forem paralelas, então $\alpha_1 = \alpha_2$ e o ângulo entre as duas retas será 0°. Assim, se L_1 e L_2 forem duas retas distintas, então $0° \leqslant \theta < 180°$. Veja as Figuras 11 e 12. O teorema a seguir possibilita-nos encontrar θ quando forem conhecidas as inclinações de L_1 e L_2.

1.6.8 TEOREMA Sejam L_1 e L_2 duas retas não-verticais que se interceptam e não são perpendiculares e seja L_2 a reta com maior ângulo de inclinação. Então, se m_1 for a inclinação de L_1, m_2, a de L_2 e θ for o ângulo entre L_1 e L_2,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

A prova do Teorema 1.6.8 é proposta como exercício (veja o Exercício 34).

EXEMPLO 3 Determine o ângulo entre as retas com as inclinações: (a) $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$; (b) 2 e $-\frac{2}{5}$.

Solução Quando usamos a fórmula do Teorema 1.6.8, m_2 deve ser a inclinação mais acentuada da reta. Para a parte (a), veja a Figura 13(a) onde $m_2 = \frac{3}{4}$ e $m_1 = \frac{2}{5}$. Para a parte (b), veja a Figura 13(b) onde $m_2 = -\frac{2}{5}$ e $m_1 = 2$. Em cada parte calculamos, com aproximação de 1 grau, o ângulo θ entre as retas.

$$\text{(a) } \operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{15 - 8}{20 + 6} = \frac{7}{26}$$

$$\theta = 15°$$

$$\text{(b) } \operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{2}{5} - 2}{1 + (-\frac{2}{5})(2)} = \frac{-2 - 10}{5 - 4} = -12$$

$$\theta = 95°$$

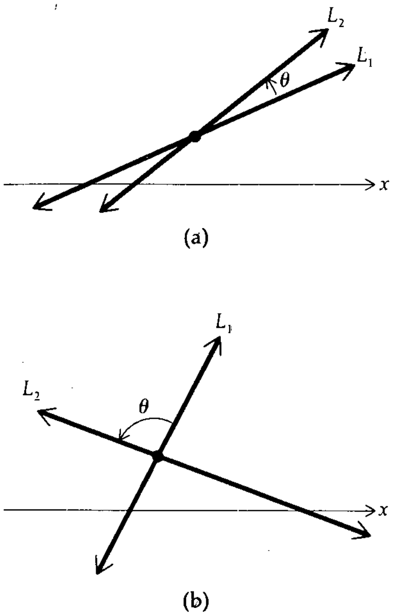


FIGURA 13

O procedimento usado no Exemplo 3 pode ser aplicado para encontrarmos os ângulos em um triângulo. Veja os Exercícios 41 e 42.

Os exercícios dessa secção destinam-se à revisão de alguns dos conceitos fundamentais de trigonometria. Ao fazê-los, você poderá achar útil consultar um texto de trigonometria.

EXERCÍCIOS 1.6

Nos Exercícios 1 e 2, ache a medida equivalente em radianos.

1. (a) 60°; (b) 135°; (c) 210°; (d) −150°; (e) 20°; (f) 450°; (g) −75°; (h) 100°
2. (a) 45°; (b) 120°; (c) 240°; (d) −225°; (e) 15°; (f) 540°; (g) −48°; (h) 2°

Nos Exercícios 3 e 4, ache a medida equivalente em graus.

3. (a) $\frac{1}{4}\pi$ rad; (b) $\frac{2}{3}\pi$ rad; (c) $\frac{11}{6}\pi$ rad; (d) $-\frac{1}{2}\pi$ rad; (e) $\frac{1}{2}$ rad; (f) 3π rad; (g) -2 rad; (h) $\frac{1}{12}\pi$ rad
4. (a) $\frac{1}{6}\pi$ rad; (b) $\frac{4}{3}\pi$ rad; (c) $\frac{3}{4}\pi$ rad; (d) -5π rad; (e) $\frac{1}{3}$ rad; (f) -5 rad; (g) $\frac{11}{12}\pi$ rad; (h) 0,2 rad

Nos Exercícios de 5 a 12, determine o valor exato da função.

5. (a) $\operatorname{sen} \frac{1}{6}\pi$; (b) $\cos \frac{1}{4}\pi$; (c) $\operatorname{sen}(-\frac{3}{2}\pi)$; (d) $\cos \frac{1}{3}\pi$
6. (a) $\cos \frac{1}{3}\pi$; (b) $\operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi$; (c) $\cos(-\frac{1}{2}\pi)$; (d) $\operatorname{sen}(-2\pi)$
7. (a) $\cos \frac{5}{6}\pi$; (b) $\operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi$; (c) $\cos 3\pi$; (d) $\operatorname{sen}(-5\pi)$
8. (a) $\operatorname{sen} \frac{4}{3}\pi$; (b) $\cos(-\frac{1}{6}\pi)$; (c) $\operatorname{sen} 7\pi$; (d) $\cos(-\frac{5}{2}\pi)$
9. (a) $\operatorname{tg} \frac{1}{3}\pi$; (b) $\operatorname{cotg} \frac{1}{4}\pi$; (c) $\sec(-\pi)$; (d) $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}\pi$

10. (a) cotg $\frac{1}{6}\pi$; (b) tg $\frac{1}{4}\pi$; (c) cosec$(-\frac{3}{2}\pi)$; (d) sec π

11. (a) sec$(-\frac{1}{6}\pi)$; (b) cosec $\frac{3}{4}\pi$; (c) tg $\frac{5}{6}\pi$; (d) cotg$(-\frac{3}{4}\pi)$

12. (a) cosec$(-\frac{1}{3}\pi)$; (b) sec $\frac{5}{6}\pi$; (c) tg $\frac{3}{4}\pi$; (d) cotg $\frac{3}{2}\pi$

Nos Exercícios de 13 a 20, use a periodicidade das funções do seno, co-seno, secante e co-secante, bem como os valores do sen t, cos t, sec t cosec t quando $0 \leqslant t\ 2\pi$, para determinar o valor exato da função.

13. (a) sen $\frac{9}{4}\pi$; (b) cos $\frac{9}{4}\pi$; (c) sec $\frac{9}{4}\pi$; (d) cosec $\frac{9}{4}\pi$

14. (a) sen $\frac{17}{6}\pi$; (b) cos $\frac{17}{6}\pi$; (c) sec $\frac{17}{6}\pi$; (d) cosec $\frac{17}{6}\pi$

15. (a) sen$(-\frac{2}{3}\pi)$; (b) cos$(-\frac{2}{3}\pi)$; (c) sec$(-\frac{2}{3}\pi)$; (d) cosec$(-\frac{2}{3}\pi)$

16. (a) sen$(-\frac{5}{4}\pi)$; (b) cos$(-\frac{5}{4}\pi)$; (c) sec$(-\frac{5}{4}\pi)$; (d) cosec$(-\frac{5}{4}\pi)$

17. (a) sen 8π; (b) cos 10π; (c) sec 7π; (d) cosec 9π

18. (a) sen $\frac{7}{2}\pi$; (b) cos $\frac{5}{2}\pi$; (c) sec $\frac{11}{2}\pi$; (d) cosec $\frac{9}{2}\pi$

19. (a) sen$(-\frac{7}{2}\pi)$; (b) cos$(-\frac{5}{2}\pi)$; (c) sec$(-\frac{11}{2}\pi)$; (d) cosec$(-\frac{9}{2}\pi)$

20. (a) sen(-8π); (b) cos(-10π); (c) sec(-7π); (d) cosec(-9π)

Nos Exercícios de 21 a 24, use a periodicidade das funções tangente e co-tangente, bem como os valores de tg t e cotg t, quando $0 \leqslant t < \pi$, para encontrar o valor exato da função.

21. (a) tg $\frac{7}{4}\pi$; (b) cotg $\frac{7}{4}\pi$; (c) tg$(-\frac{5}{6}\pi)$; (d) cotg$(-\frac{5}{6}\pi)$

22. (a) tg $\frac{4}{3}\pi$; (b) cotg $\frac{4}{3}\pi$; (c) tg$(-\frac{1}{6}\pi)$; (d) cotg$(-\frac{1}{6}\pi)$

23. (a) tg $\frac{11}{3}\pi$; (b) cotg $\frac{11}{3}\pi$; (c) tg(-5π); (d) cotg$(-\frac{9}{2}\pi)$

24. (a) tg$(-\frac{11}{4}\pi)$; (b) cotg$(-\frac{11}{4}\pi)$; (c) tg 11π; (c) cotg $\frac{15}{2}\pi$

Nos Exercícios de 25 a 30, encontre todos os valores de t no intervalo $[0, 2\pi)$ para os quais a equação está satisfeita.

25. (a) sen $t = 1$; (b) cos $t = -1$; (c) tg $t = 1$; (d) sec $t = 1$

26. (a) sen $t = -1$; (b) cos $t = 1$; (c) tg $t = -1$; (d) cosec $t = 1$

27. (a) sen $t = 0$; (b) cos $t = 0$; (c) tg $t = 0$; (d) cotg $t = 0$

28. (a) sen $t = \frac{1}{2}$; (b) cos $t = -\frac{1}{2}$; (c) cotg $t = 1$; (d) sec $t = 2$

29. (a) sen $t = -\frac{1}{2}$; (b) cos $t = \frac{1}{2}$; (c) cotg $t = -1$; (d) cosec $t = 2$

30. (a) sen $t = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (b) cos $t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) tg $t = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (d) cotg $t = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

31. Para que valores de t em $[0, 2\pi]$ temos (a) tg t indefinida e (b) cosec t indefinida?

32. Para que valores de t em $[0, \pi]$ temos (a) cotg t indefinida e (b) sec t indefinida?

33. Para que valores de t em $[\pi, 2\pi)$ temos (a) cotg t indefinida e (b) sec t indefinida?

34. Prove o Teorema 1.6.8. (*Sugestão:* Use a fórmula para tg $(u - v)$ encontrada no Apêndice.)

Nos Exercícios de 35 a 38, ache a tg θ se θ for o ângulo entre as retas com as inclinações dadas.

35. (a) 1 e $\frac{1}{4}$; (b) 4 e $-\frac{5}{3}$

36. (a) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{4}$; (b) $\frac{2}{7}$ e $\frac{7}{2}$

37. (a) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$; (b) $-\frac{5}{4}$ e $-\frac{7}{5}$

38. (a) $-\frac{3}{5}$ e 2; (b) $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{10}$

Nos Exercícios 39 e 40, ache, com aproximação de 1 grau, a medida do ângulo entre as retas com as inclinações dadas.

39. (a) 5 e $-\frac{7}{9}$; (b) $-\frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{4}$

40. (a) -3 e 2; (b) $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}$

41. Ache, com aproximação de 1 grau, as medidas dos ângulos internos do triângulo formado pelas retas que têm as equações $2x + y - 6 = 0$, $3x - y - 4 = 0$ e $3x + 4y + 8 = 0$.

42. Ache, com aproximação de 1 grau, as medidas dos ângulos internos do triângulo com vértices em $(1, 0)$, $(-3, 2)$ e $(2, 3)$.

43. Ache a equação de uma reta que passa pelo ponto $(-1, 4)$, formando um ângulo de $\frac{1}{4}\pi$ rad com a reta cuja equação é $2x + y - 5 = 0$ (duas soluções).

44. Encontre uma equação de uma reta que passa pelo ponto $(-3, -2)$, formando um ângulo de $\frac{1}{3}\pi$ rad com a reta cuja equação é $3x - 2y - 7 = 0$ (duas soluções).

Nos Exercícios de 45 a 48, defina a função f o g e determine o seu domínio.

45. (a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = 3x$; (b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \dfrac{x}{2}$

46. (a) $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2$; (b) $f(x) = \operatorname{cosec} x$, $g(x) = 2x$

47. (a) $f(x) = \operatorname{cotg} x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$; (b) $f(x) = \sec\dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x - \pi}$

48. (a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \dfrac{1}{2x}$; (b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = x + \pi$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 1

Nos Exercícios de 1 a 12, ache e mostre na reta numérica real, o conjunto-solução da desigualdade.

1. $3x - 7 \leq 5x - 17$

2. $8 < 5x + 4 \leq 10$

3. $\dfrac{x}{x - 1} > \dfrac{1}{4}$

4. $\dfrac{3}{x + 4} < \dfrac{2}{x - 5}$

5. $2x^2 + x < 3$

6. $|x - 2| < 4$

7. $|3 + 4x| \leq 9$

8. $|5 - 2x| \leq 3$

9. $|4 - 3x| < 8$

10. $|2x - 5| > 7$

11. $|2x + 7| > 5$

12. $\left|\dfrac{2 - 3x}{3 + x}\right| \geq \dfrac{1}{4}$

Nos Exercícios de 13 a 15 resolva para x.

13. $|3 - 4x| = 15$

14. $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 3}\right| = 4$

15. $|3x - 4| = |6 - 2x|$

16. Ache todos os valores de x para os quais $\sqrt{x^2 + 2x - 15}$ é real.

17. Ache as abscissas dos pontos tendo ordenada 4 e que estão a uma distância de $\sqrt{117}$ do ponto $(5, -2)$.

18. Ache uma equação que seja satisfeita pelas coordenadas de qualquer ponto cuja distância ao ponto $(-1, 2)$ seja o dobro da distância a $(3, -4)$. Faça um esboço do seu gráfico.

19. Ache uma equação que seja satisfeita pelas coordenadas de qualquer ponto cuja distância ao ponto $(-3, 4)$ é 10.

20. Defina os seguintes conjuntos de pontos por uma equação ou uma inequação: (a) o ponto $(3, -5)$; (b) o conjunto de todos os pontos cuja distância ao ponto $(3, -5)$ seja menor do que 4; (c) o conjunto de todos os pontos cuja distância ao ponto $(3, -5)$ seja no mínimo 5.

Nos Exercícios de 21 a 26, desenhe um esboço do gráfico da equação.

21. $y^2 = x - 4$
22. $y = |x - 4|$
23. $y = x^2 - 4$
24. $y = \sqrt{4 - x}$
25. $y = \sqrt{16 - x^2}$
26. $xy = 16$

27. Prove que o quadrilátero com vértices em $(1, 2)$, $(5, -1)$, $(11, 7)$ e $(7, 10)$ é um retângulo.

28. Prove que o triângulo com vértices em $(-8, 1)$, $(-1, -6)$ e $(2, 4)$ é isósceles e ache sua área.

29. Prove que os pontos $(2, 4)$, $(1, -4)$ e $(5, -2)$ são vértices de um triângulo retângulo e ache a área do triângulo.

30. Prove que os pontos $(1, -1)$, $(3, 2)$ e $(7, 8)$ são colineares de duas maneiras: (a) usando a fórmula da distância; (b) usando inclinações.

31. Dois vértices de um paralelogramo são $(-3, 4)$ e $(2, 3)$ e seu centro está em $(0, -1)$. Ache os outros dois vértices.

32. Os vértices opostos de um quadrado estão em $(3, -4)$ e $(9, -4)$. Ache os outros dois vértices.

33. Prove que os pontos $(2, 13)$, $(-2, 5)$, $(3, -1)$ e $(7, 7)$ são vértices de um paralelogramo.

34. Ache uma equação da circunferência com centro em $(-2, 4)$ e raio $\sqrt{5}$. Escreva a equação na forma geral.

35. Ache uma equação da circunferência onde os pontos $(-3, 2)$ e $(5, 6)$ são extremos de um diâmetro.

36. Ache uma equação da circunferência que passa pelos pontos $(3, -1)$, $(2, 2)$ e $(-4, 5)$.

37. Ache o centro e o raio da circunferência com a equação $4x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 9 = 0$.

38. Ache uma equação da reta que passa pelos pontos $(2, -4)$ e $(7, 3)$ e escreva a equação na forma intercepto-inclinação.

39. Ache uma equação da reta que passa pelo ponto $(-1, 6)$ e tem inclinação 3.

40. Ache uma equação da reta perpendicular à reta que passa pelos pontos $(-1, 5)$ e $(3, 2)$ no ponto médio desse segmento da reta.

41. Ache uma equação da reta que passa pelo ponto $(5, -3)$ e é perpendicular à reta cuja equação é $2x - 5y = 1$.

42. Ache uma equação da circunferência cujo diâmetro é a corda comum às circunferências $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$.

43. Ache uma equação da circunferência que circunscreve o triângulo cujos lados estão sobre as retas $x - 3y + 2 = 0$, $3x - 2y + 6 = 0$ e $2x + y - 3 = 0$.

44. Ache a menor distância do ponto $(2, -5)$ à reta $3x + y = 2$.

45. Ache uma equação da reta que passa pelo ponto de intersecção das retas $5x + 6y - 4 = 0$ e $x - 3y + 2 = 0$ e é perpendicular à reta $x - 4y - 20 = 0$, sem determinar o ponto de intersecção das retas. (*Sugestão:* veja o Exercício 58 nos Exercícios 1.2).

46. Os lados de um paralelogramo estão sobre as retas $x + 2y = 10$, $3x - y = -20$, $x + 2y = 15$ e $3x - y = -10$. Ache as equações das diagonais sem determinar os vértices do paralelogramo. (*Sugestão:* veja o Exercício 58 nos Exercícios 1.2.)

47. Determine todos os valores de k para os quais os gráficos das equações $x^2 + y^2 = k$ e $x + y = k$ interceptam-se.

48. Determine os valores de k e h se $3x + ky + 2 = 0$ e $5x - y + h = 0$ forem equações da mesma reta.

49. Dada $f(x) = 3x^2 - x + 5$, ache (a) $f(-3)$; (b) $f(-x^2)$; (c) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

50. Dada $g(x) = \sqrt{x - 1}$, ache $\dfrac{g(x + h) - g(x)}{h}$, $h \neq 0$.

51. Determine se a função é par, ímpar ou nem par e nem ímpar.
(a) $f(x) = 2x^3 - 3x$; (b) $g(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$;
(c) $h(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x$; (d) $F(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - x}$.

Nos Exercícios de 52 a 56, para as funções dadas f e g defina as seguintes funções e determine o domínio da função resultante: (a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f \cdot g$; (f) f/g; (e) g/f; (f) $f \circ g$; (g) $g \circ f$.

52. $f(x) = \sqrt{x + 2}$ e $g(x) = x^2 + 4$
53. $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = 4x - 3$
54. $f(x) = x^2 - 9$ e $g(x) = \sqrt{x + 5}$
55. $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ e $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$
56. $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Nos Exercícios de 57 a 64, determine o domínio e a imagem da função e desenhe um esboço de seu gráfico.

57. $f(x) = |3 - x|$
58. $f(x) = 3 - |x|$
59. $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$
60. $G(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$
61. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 3 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$
62. $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + x - 6}$
63. $F(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x < -2 \\ 4 - x^2 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3 - x & \text{se } 2 < x \end{cases}$
64. $f(x) = 2x - [\![x]\!]$

Nos Exercícios 65 e 66, determine o valor exato da função.

65. (a) sen $\frac{2}{3}\pi$; (b) cos $\frac{5}{4}\pi$; (c) tg$(-\frac{5}{6}\pi)$; (d) cotg $\frac{13}{12}\pi$; (e) sec π; (f) cosec$(-\frac{1}{8}\pi)$

66. (a) cos $\frac{7}{6}\pi$; (b)sen$(-\frac{7}{4}\pi)$; (c) cotg$(-\frac{1}{2}\pi)$; (d) tg $\frac{5}{8}\pi$; (e) sec$(-\frac{1}{12}\pi)$; (f) cosec $\frac{5}{3}\pi$

Nos Exercícios 67 e 68, ache todos os valores de t no intervalo [0, 2π) para os quais a equação dada é satisfeita.

67. (a) sen $t = \frac{1}{2}$; (b) cos $t = 1$; (c) tg $t = -1$; (d) cotg $t = \sqrt{3}$; (e) sec $t = -2$; (f) cosec $t = \sqrt{2}$

68. (a) sen $t = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) cos $t = -1$; (c) tg $t = -\sqrt{3}$; (d) cotg $t = 1$; (e) sec $t = -\sqrt{2}$; (f) cosec $t = 2$

69. Ache, com aproximação de 1 grau, as medidas dos quatro ângulos internos do quadrilátero com vértices em (5, 6), (−2, 4), (−2, 1) e (3, 1) e verifique que a soma deles é 360°.

70. Ache uma equação da reta que passa por (2, 5) e faz com a reta $3x - 4y + 7 = 0$ um ângulo cuja medida em radianos é $\frac{1}{4}\pi$ (duas soluções).

71. Ache as equações das retas que passam pela origem e são tangentes à circunferência com centro em (2, 1) e raio 2.

72. Prove que as duas retas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{e} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

são paralelas se e somente se $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

73. Prove analiticamente que se as diagonais de um retângulo forem perpendiculares, então o retângulo será um quadrado.

74. Prove analiticamente que o segmento de reta que liga os pontos médios de qualquer par de lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e seu comprimento é a metade do comprimento do terceiro lado.

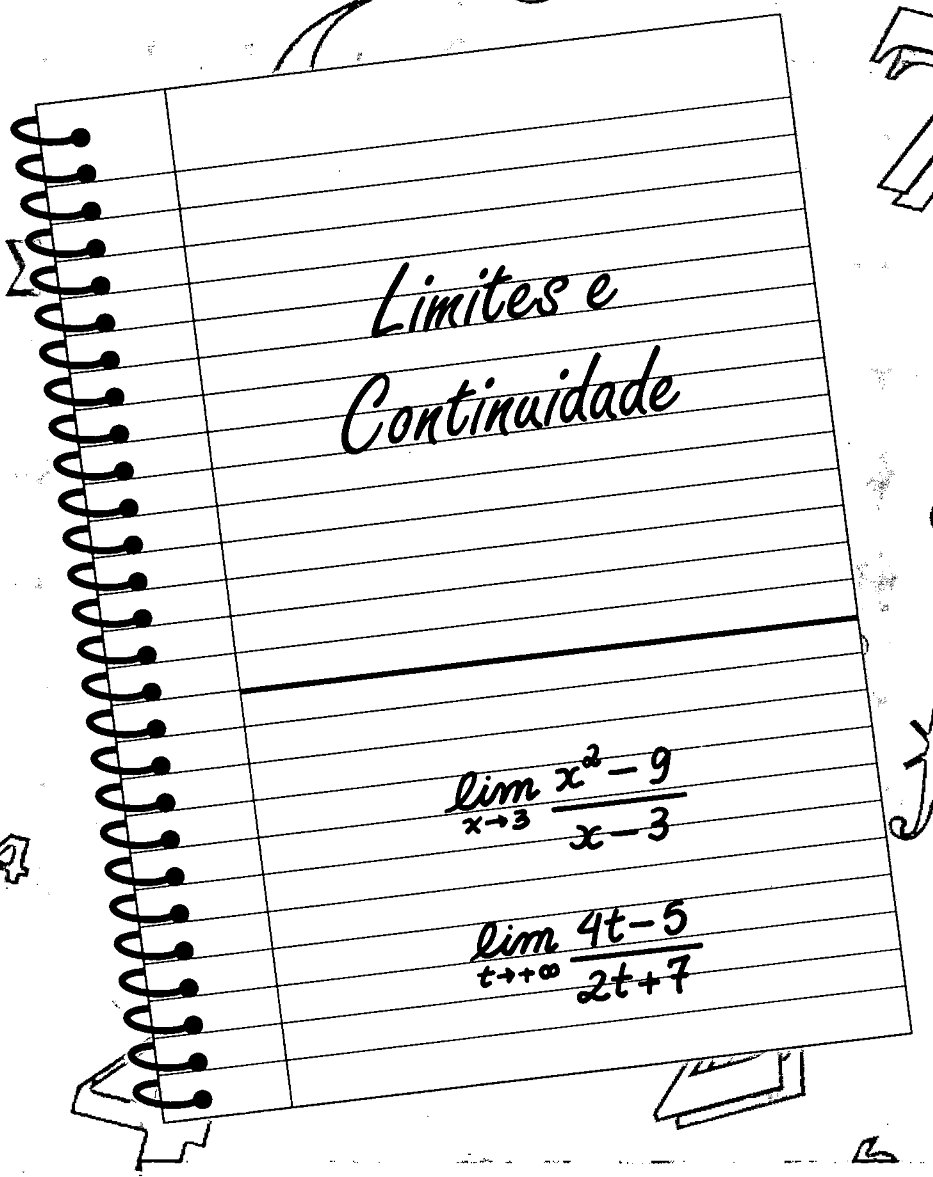
75. Num triângulo, o ponto de intersecção das medianas, das alturas e o centro da circunferência circunscrita são colineares. Ache esses três pontos e comprove que eles são colineares no triângulo com vértices (2, 8), (5, −1) e (6, 6).

76. Prove analiticamente que o conjunto de pontos equidistantes de dois pontos dados é a perpendicular pelo ponto médio do segmento que liga os pontos.

77. Prove que se x for qualquer número real, $|x| < x^2 + 1$.

78. Prove analiticamente que as três medianas de um triângulo encontram-se num ponto.

DOIS


Limites e
Continuidade
$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
$\lim_{t \to +\infty} \frac{4t - 5}{2t + 7}$

As duas operações matemáticas fundamentais em Cálculo são a *diferenciação* e a *integração*. Essas operações envolvem o cálculo da *derivada* e da *integral definida*, ambas baseadas na noção de *limite*.

Na Secção 2.1 a idéia de limite de uma função é dada através de uma exposição passo a passo, motivadora, que inclui desde a discussão do cálculo do valor de uma função na proximidade de um número através de um tratamento intuitivo do processo de limite, até uma definição rigorosa envolvendo epsilons e deltas. Os teoremas de limite são introduzidos na Secção 2.2 para simplificar o cálculo de limites de funções elementares. Na Secção 2.3 o conceito de limite é ampliado para incluir outros tipos de funções. Os limites envolvendo o infinito são tratados nas Secções 2.4 e 2.5 e são usados para definir as assíntotas vertical e horizontal de gráficos de funções.

Provavelmente a classe mais importante de funções estudada em Cálculo seja das funções *contínuas*. A continuidade de uma função em um número é definida na Secção 2.6, enquanto que a continuidade de uma função composta e a continuidade em um intervalo são tópicos da Secção 2.7. O *teorema do confronto de limites*, comumente chamado de *teorema do "sanduíche"*, que é um teorema-chave em Cálculo, será apresentado na Secção 2.8, sendo aplicado para estabelecer o limite da razão de sen t a t, quando t aproxima-se de zero. Esse resultado é importante na discussão sobre a continuidade de funções trigonométricas na Secção 2.8.

As duas secções finais do capítulo, 2.9 e 2.10, são suplementares e contêm demonstrações de alguns teoremas de limites de funções.

2.1 O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Para iniciar nosso estudo de limites, vamos considerar uma dada função:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} \qquad (1)$$

Observe que $f(x)$ existe para todo x, exceto $x = 1$. Investigaremos os valores da função quando x está próximo de 1, porém excluindo o 1. A ilustração seguinte mostra como a função definida por (1) pode surgir e por que estaríamos interessados em considerar tais valores funcionais.

► **ILUSTRAÇÃO 1** O ponto $P(1, 2)$ está sobre a curva de equação

$$y = 2x^2 + x - 1$$

Seja $Q(x, 2x^2 + x - 1)$ um outro ponto sobre essa curva, distinto de P. Veja as Figuras 1 e 2, cada uma mostrando parte do gráfico da equação e a reta secante passando pelos pontos P e Q, onde Q está próximo de P. Na Figura 1, a coordenada x de Q é menor do que 1 e na Figura 2 ela é maior do que 1. Suponhamos que $f(x)$ seja a inclinação da reta PQ. Então

$$f(x) = \frac{(2x^2 + x - 1) - 2}{x - 1} \qquad f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

que é a Igualdade (1). Além disso, $x \neq 1$, pois P e Q são pontos distintos. À medida que x fica cada vez mais próximo de 1, os valores de $f(x)$ tornam-se cada vez mais próximos do valor que iremos definir na Secção 3.1 como a inclinação da reta tangente à curva no ponto P. ◄

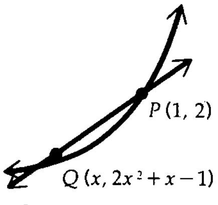


FIGURA 1

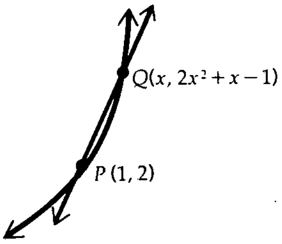


FIGURA 2

Para a função f definida por (1), vamos atribuir a x os valores 0, 0,25, 0,50, 0,75, 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999, e assim por diante. Estamos tomando valores de x cada vez mais próximos de 1, porém menores do que 1; em outras palavras, a variável x está aproximando-se de 1 através de valores menores do que 1. Isso está ilustrado na Tabela 1. Por outro lado, vamos deixar que a variável x aproxime-se de 1, através de valores maiores do que 1, isto é, vamos atribuir a x os valores 2, 1,75, 1,5, 1,25, 1,1, 1,01, 1,001, 1,0001, 1,00001, e assim por diante. Os valores funcionais desses números também são obtidos com uma calculadora e aparecem na Tabela 2.

Tabela 1

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0,25	3,5
0,5	4
0,75	4,5
0,9	4,8
0,99	4,98
0,999	4,998
0,9999	4,9998
0,99999	4,99998

Observe, de ambas as tabelas, que à medida que x fica cada vez mais próximo de 1, $f(x)$ torna-se cada vez mais próximo de 5 e quanto mais próximo x estiver de 1, mais próximo de 5 estará $f(x)$. Por exemplo, na Tabela 1, quando $x = 0{,}9$, $f(x) = 4{,}8$, isto é, quando x for 0,1 inferior a 1, $f(x)$ será 0,2 inferior a 5. Quando $x = 0{,}999$, $f(x) = 4{,}998$, isto é, quando x for 0,001 inferior a

Tabela 2

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1,75	6,5
1,5	6,0
1,25	5,5
1,1	5,2
1,01	5,02
1,001	5,002
1,0001	5,0002
1,00001	5,00002

1, $f(x)$ será 0,002 inferior a 5. Mais ainda, quando $x = 0{,}9999$, $f(x) = 0{,}49998$, isto é, quando x for 0,0001 inferior a 1, $f(x)$ será 0,0002 inferior a 5.

A Tabela 2 mostra que quando $x = 1{,}1$, $f(x) = 5{,}2$, isto é, quando x for 0,1 superior a 1, $f(x)$ será 0,2 superior a 5. Quando $x = 1{,}001$, $f(x) = 5{,}002$, isto é, quando x for 0,001 superior a 1, $f(x)$ será 0,002 superior a 5. Quando $x = 1{,}0001$, $f(x) = 5{,}0002$, isto é, quando x for 0,0001 superior a 1, $f(x)$ será 0,0002 superior a 5.

Logo, vemos que quando x difere de 1 de $\pm$ 0,001 (isto é, $x = 0{,}999$ ou $x = 1{,}001$), $f(x)$ difere de 5 de $\pm$ 0,002, isto é, $f(x) = 4{,}998$ ou $f(x) = 5{,}002$). E quando x difere de 1 de $\pm$ 0,0001, $f(x)$ difere de 5 de $\pm$ 0,0002.

Agora, analisando a situação de outra maneira, consideraremos os valores de $f(x)$ primeiro. Vemos que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1. Outra maneira de dizer isto é que podemos tornar o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e 5 tão pequeno quanto desejarmos, tomando o valor absoluto da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno. Isto é, $|f(x) - 5|$ pode se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando $|x - 1|$ suficientemente pequeno. Mas tenha em mente que $f(x)$ nunca assume o valor 5.

Uma maneira mais precisa de notar isso é através do uso de dois símbolos para essas pequenas diferenças. Os símbolos comumente usados são as letras gregas ϵ (epsilon) e δ (delta). Assim, enunciamos que para todo número ϵ dado positivo existe um número δ escolhido apropriadamente, tal que se $|x - 1|$ for menor do que δ e $|x - 1| \neq 0$ (isto é, $x \neq 1$), então $|f(x) - 5|$ será menor do que ϵ. É importante observar que o tamanho de δ depende do de ϵ. Ainda outra maneira de expressar isso é: dado um número ϵ positivo qualquer, podemos tornar $|f(x) - 5| < \epsilon$ tomando $|x - 1|$ suficientemente pequeno, isto é, existe um número δ positivo suficientemente pequeno, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < \epsilon \tag{2}$$

Observe que o numerador da fração em (1) pode ser fatorado de forma que

$$f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1}$$

Se $x \neq 1$, podemos dividir o numerador e o denominador por $x - 1$ para obter

$$f(x) = 2x + 3 \qquad x \neq 1 \tag{3}$$

A fórmula (3), com a estipulação de que $x \neq 1$, é tão adequada quanto (1) para uma definição de $f(x)$. De (3) e das duas tabelas, note que se $|x - 1| < 0{,}1$, então $|f(x) - 5| < 0{,}2$. Assim, dado $\epsilon = 0{,}2$, tomamos $\delta = 0{,}1$ e afirmamos:

$$\text{se } 0 < |x - 1| < 0{,}1 \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}2$$

Essa é a afirmativa (2), com $\epsilon = 0{,}2$ e $\delta = 0{,}1$.

Também, se $|x - 1| < 0{,}001$, então $|f(x) - 5| < 0{,}002$. Logo, se $\epsilon = 0{,}002$, tomamos $\delta = 0{,}001$ e afirmamos que

$$\text{se } 0 < |x - 1| < 0{,}001 \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}002$$

Essa é a afirmativa (2), com $\epsilon = 0{,}002$ e $\delta = 0{,}001$.

Da mesma forma, se $\epsilon = 0{,}0002$, tomamos $\delta = 0{,}0001$ e afirmamos que

$$\text{se } 0 < |x - 1| < 0{,}0001 \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}0002$$

Essa é a afirmativa (2), com $\epsilon = 0{,}0002$ e $\delta = 0{,}0001$.

Poderíamos prosseguir e atribuir a ϵ qualquer valor positivo, a fim de encontrar um valor adequado para δ, de tal forma que se $|x - 1|$ for menor do que

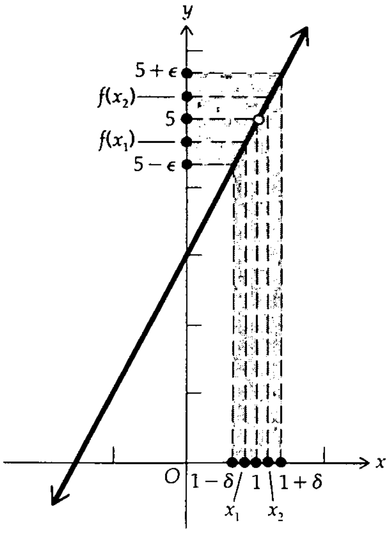


FIGURA 3

δ e $x \neq 1$ (ou $|x - 1| > 0$), então $|f(x) - 5|$ será menor do que ϵ. Agora, como para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - 1| < \delta$, então $|f(x) - 5| < \epsilon$, afirmamos que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 é igual a 5 ou, em símbolos

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

Observe que nessa equação temos um novo uso do símbolo "igual". Aqui, $f(x)$ não assume o valor 5 para nenhum valor de x. O símbolo "igual" é apropriado, pois o primeiro membro está escrito como $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

De (3) é evidente que $f(x)$ pode se tornar tão próximo de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1 e essa propriedade da função f não depende do fato de f estar definida em $x = 1$. Esse fato permite-nos distinguir entre $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ e o valor da função 1, isto é, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$, mas $f(1)$ não existe. Conseqüentemente, na afirmativa (2), $0 < |x - 1|$, pois estamos interessados somente nos valores de $f(x)$ para x próximo de 1, mas não para $x = 1$.

Vamos ver qual o significado geométrico disso tudo para a função definida em (1) ou (3). A Figura 3 ilustra o significado geométrico de ϵ e δ. Observe que se x (no eixo horizontal) estiver entre $1 - \delta$ e $1 + \delta$, então $f(x)$ (no eixo vertical) estará entre $5 - \epsilon$ e $5 + \epsilon$, ou

$$\text{se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < \epsilon$$

Outra maneira de estabelecer isso é que $f(x)$ (no eixo vertical) pode ser restrita a ficar entre $5 - \epsilon$ e $5 + \epsilon$, se restringirmos x (no eixo horizontal) a ficar entre $1 - \delta$ e $1 + \delta$.

Note que os valores de ϵ são escolhidos arbitrariamente e podem ser tão pequenos quanto desejarmos, e que o valor de δ depende do ϵ escolhido. Devemos ressaltar que quanto menor for o valor de ϵ, menor será o valor correspondente de δ.

Resumindo esse exemplo, afirmamos que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$, pois para qualquer $\epsilon > 0$, não importa o quão pequeno ele seja, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < \epsilon$$

Agora, definiremos o limite de uma função em geral.

2.1.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio número a. O **limite de $f(x)$ quando x tende a a será L**, escrito como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se a seguinte afirmativa for verdadeira:

Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon \tag{4}$$

Em palavras, a Definição 2.1.1 afirma que os valores da função $f(x)$ tendem a um limite L quando x tende a um número a, se o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e L puder se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

É importante perceber que na definição acima nada é mencionado sobre o valor da função quando $x = a$. Isto é, não é necessário que a função esteja

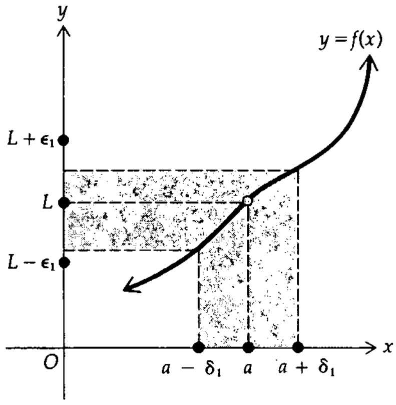


FIGURA 4

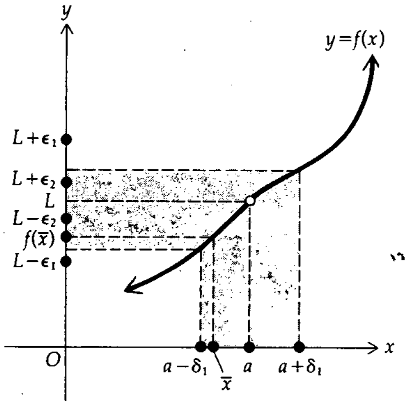


FIGURA 5

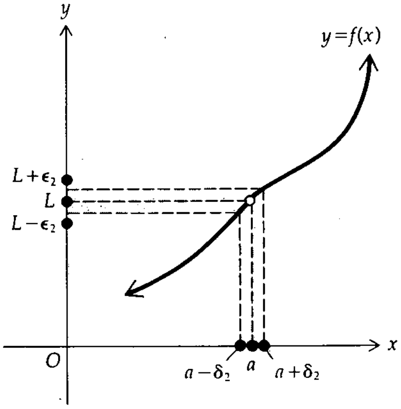


FIGURA 6

definida em $x = a$ para que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exista. Além disso, mesmo que a função seja definida por $x = a$, é possível que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exista sem ter o mesmo valor que $f(a)$ (veja o Exemplo 3 na Secção 2.2).

Uma interpretação geométrica da Definição 2.1.1 para a função f está na Figura 4, que mostra uma parte do gráfico de f próxima ao ponto onde $x = a$. Como f não é necessariamente definida em a, não precisa haver no gráfico um ponto com abscissa a. Observe que se x (no eixo horizontal) estiver entre $a - \delta_1$ e $a + \delta_1$, então $f(x)$ (no eixo vertical) estará entre $L - \epsilon_1$ e $L + \epsilon_1$. Expressando de outra maneira: se x (no eixo horizontal) for restringida a ficar entre $a - \delta_1$ e $a + \delta_1$, então $f(x)$ (no eixo vertical) poderá ser restringida a ficar entre $L - \epsilon_1$ e $L + \epsilon_1$. Assim,

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \epsilon_1$$

A Figura 5 mostra como um valor de ϵ menor pode requerer uma escolha diferente para δ. Na figura, vemos que para $\epsilon_2 < \epsilon_1$, o valor δ_1 é muito grande, isto é, existem valores de x para os quais $0 < |x - a| < \delta_1$, mas $|f(x) - L|$ não é menor do que ϵ_2. Por exemplo, $0 < |\bar{x} - a| < \delta_1$, mas $|f(\bar{x}) - L| > \epsilon_2$. Assim, precisamos escolher um valor menor δ_2, mostrado na Figura 6, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \epsilon_2$$

No entanto, para qualquer escolha de $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno seja, existe um $\delta > 0$, tal que a afirmativa (4) seja verdadeira. Logo, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Nos exemplos desta secção usaremos o símbolo ⇒ pela primeira vez. A seta ⇒ significa *implica*. Também usamos a seta dupla ⇔ que, como já comentamos anteriormente, significa que as afirmações que vêm antes e depois dela são *equivalentes*.

EXEMPLO 1 Seja f a função definida por

$$f(x) = 4x - 7$$

e suponha que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$$

(a) Usando uma figura similar à Figura 3, para $\epsilon = 0{,}01$, determine um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - 5| < 0{,}01$$

(b) Usando as propriedades das desigualdades, determine $\delta > 0$, tal que a afirmativa na parte (a) seja verdadeira.

Solução

(a) Veja a Figura 7 e observe que os valores funcionais aumentam à medida que x cresce. Assim, a figura indica que precisamos de um valor de x_1, tal que $f(x_1) = 4{,}99$ e um valor de x_2, tal que $f(x_2) = 5{,}01$, isto é, precisamos de x_1 e x_2 tais que

$$4x_1 - 7 = 4{,}99 \qquad 4x_2 - 7 = 5{,}01$$

$$x_1 = \frac{11{,}99}{4} \qquad x_2 = \frac{12{,}01}{4}$$

$$x_1 = 2{,}9975 \qquad x_2 = 3{,}0025$$

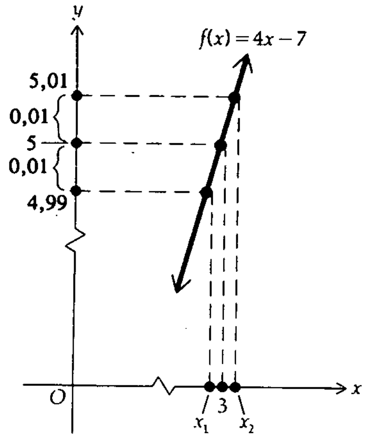


FIGURA 7

Como $3 - 2{,}9975 = 0{,}0025$ e $3{,}0025 - 3 = 0{,}0025$, escolhemos $\delta = 0{,}0025$ de tal forma que que temos a afirmativa

$$\text{se } 0 < |x - 3| < 0{,}0025 \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01$$

(b) Como $f(x) = 4x - 7$,

$$\begin{aligned} |f(x) - 5| &= |(4x - 7) - 5| \\ &= |4x - 12| \\ &= 4|x - 3| \end{aligned}$$

Queremos determinar um $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} &\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01 \\ \Leftrightarrow\ &\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } 4|x - 3| < 0{,}01 \\ \Leftrightarrow\ &\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |x - 3| < 0{,}0025 \end{aligned}$$

Essa afirmativa indica que uma escolha adequada para δ é 0,0025. Então, temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} & 0 < |x - 3| < 0{,}0025 \\ \Rightarrow\ & 4|x - 3| < 4(0{,}0025) \\ \Rightarrow\ & |4x - 12| < 0{,}01 \\ \Rightarrow\ & |(4x - 7) - 5| < 0{,}01 \\ \Rightarrow\ & |f(x) - 5| < 0{,}01 \end{aligned}$$

Mostramos que

$$\text{se } 0 < |x - 3| < 0{,}0025 \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01 \qquad ($$

Nesse exemplo, qualquer número positivo menor do que 0,0025 pode ser usad em lugar de 0,0025 como sendo o δ requerido. Observe esse fato na Figura 7. Além disso, se $0 < \gamma < 0{,}0025$ e a afirmativa (5) for verdadeira, temos

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \gamma \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01$$

pois todo número x que satisfaça a desigualdade $0 < |x - 3| < \gamma$ satisfará também a desigualdade $0 < |x - 3| < 0{,}0025$.

A solução do Exemplo 1 consistiu em encontrar um δ para um ϵ fixado. Se para todo $\epsilon > 0$ pudermos encontrar um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < \epsilon$$

teremos estabelecido que o limite é 5. Isso será feito no exemplo a seguir.

EXEMPLO 2 Use a Definição 2.1.1 para provar que

$$\lim_{x \to 3} (4x - 7) = 5$$

Solução A primeira exigência da Definição 2.1.1 é que $4x - 7$ seja definida em todo número de algum intervalo aberto contendo 3, exceto possivelmente em 3. Como $4x - 7$ está definida para todos os números reais, qualquer intervalo aberto contendo 3 irá satisfazer esse requisito. Precisamos mostrar agora que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |(4x - 7) - 5| < \epsilon \qquad (6)$$

No Exemplo 1 mostramos que $|(4x - 7) - 5| = 4|x - 3|$. Logo, (6) é equivalente à afirmativa

$$\begin{aligned} & \text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } 4|x - 3| < \epsilon \\ \Leftrightarrow\ & \text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |x - 3| < \tfrac{1}{4}\epsilon \end{aligned}$$

Essa afirmativa indica que $\frac{1}{4}\epsilon$ é um δ satisfatório. Com essa escolha de δ temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} & 0 < |x - 3| < \delta \\ \Rightarrow\ & 4|x - 3| < 4\delta \\ \Rightarrow\ & |4x - 12| < 4\delta \\ \Rightarrow\ & |(4x - 7) - 5| < 4\delta \\ \Rightarrow\ & |(4x - 7) - 5| < \epsilon \qquad (\text{pois } \delta = \tfrac{1}{4}\epsilon) \end{aligned}$$

Assim, estabelecemos que se $\delta = \frac{1}{4}\epsilon$, a afirmativa (6) é verdadeira. Isso prova que $\lim\limits_{x \to 3}(4x - 7) = 5$.

Especificamente, se $\epsilon = 0{,}01$, então tomamos $\delta = \frac{1}{4}(0{,}01)$, isto é, $\delta = 0{,}0025$. Esse valor de δ corresponde ao que foi encontrado no Exemplo 1.

Qualquer número positivo menor do que $\frac{1}{4}\epsilon$ pode ser usado em lugar de $\frac{1}{4}\epsilon$ como sendo o δ requerido.

EXEMPLO 3 Seja f a função definida por

$$f(x) = x^2$$

e suponha

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

Usando uma figura para $\epsilon = 0{,}001$, determine $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 2| < \delta \text{ então } |f(x) - 4| < 0{,}001$$

Solução Veja a Figura 8 e observe que se $x > 0$, os valores funcionais aumentam à medida que os valores de x crescem. Assim, a figura indica que precisamos de um valor positivo de x_1, tal que $f(x_1) = 3{,}999$ e um valor positivo de x_2, tal que $f(x_2) = 4{,}001$, isto é, precisamos de um x_1 e de um x_2, tal que

$$x_1{}^2 = 3{,}999 \qquad x_2{}^2 = 4{,}001$$

Cada uma dessas equações tem duas soluções. Em cada caso, rejeitamos a raiz quadrada negativa, pois x_1 e x_2 são positivos. Assim

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{3{,}999} & x_2 &= \sqrt{4{,}001} \\ x_1 &\approx 1{,}9997 & x_2 &\approx 2{,}0002 \end{aligned}$$

Então, $2 - 1{,}9997 = 0{,}0003$ e $2{,}0002 - 2 = 0{,}0002$. Como $0{,}0002 < 0{,}0003$, escolhemos $\delta = 0{,}0002$; assim temos a afirmativa

$$\text{se } 0 < |x - 2| < 0{,}0002 \text{ então } |f(x) - 4| < 0{,}001$$

Qualquer número positivo menor do que 0,0002 pode ser selecionado como o δ requerido.

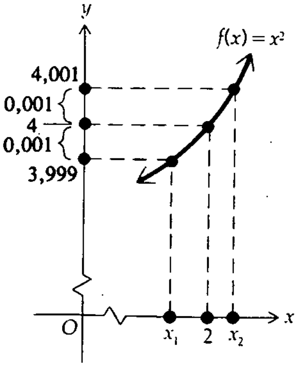


FIGURA 8

EXEMPLO 4 Use a Definição 2.1.1 para provar que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Solução Como x^2 está definido para todos os números reais, qualquer intervalo aberto contendo 2 satisfará o primeiro requisito da Definição 2.1.1. Precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} &\text{se } 0 < |x-2| < \delta \text{ então } |x^2 - 4| < \epsilon \\ \Leftrightarrow\ &\text{se } 0 < |x-2| < \delta \text{ então } |x-2||x+2| < \epsilon \qquad (7) \end{aligned}$$

Observe que no primeiro membro da última desigualdade, além do fator $|x - 2|$ temos o fator $|x + 2|$. Assim, para provar (7) desejamos colocar uma restrição sobre δ que nos dará uma desigualdade envolvendo $|x + 2|$. Tal restrição é feita para selecionarmos o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1 como sendo o intervalo (1, 3) e isto implica que $\delta \leqslant 1$. Então

$$\begin{aligned} & 0 < |x-2| < \delta \quad \text{e} \quad \delta \leqslant 1 \\ \Rightarrow\ & |x-2| < 1 \\ \Rightarrow\ & -1 < x-2 < 1 \\ \Rightarrow\ & 3 < x+2 < 5 \\ \Rightarrow\ & |x+2| < 5 \qquad (8) \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} & 0 < |x-2| < \delta \quad \text{e} \quad |x+2| < 5 \\ \Rightarrow\ & |x-2||x+2| < \delta \cdot 5 \qquad (9) \end{aligned}$$

Lembre-se de que nossa meta é obter $|x - 2|\ |x + 2| < \epsilon$. A afirmativa (9) indica que devemos requerer $\delta \cdot 5 \leqslant \epsilon$, isto é, $\delta \leqslant \epsilon/5$. Isso significa que devemos impor duas restrições sobre δ : $\delta \leqslant 1$ e $\delta \leqslant \epsilon/5$. Assim sendo, ambas as restrições estarão satisfeitas se tomarmos δ como o menor dos dois números 1 e $\epsilon/5$; em símbolos, escrevemos isso como $\delta = \min(1, \epsilon/5)$. Usando esse δ, temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} & 0 < |x-2| < \delta \\ \Rightarrow\ & |x-2||x+2| < \delta|x+2| \\ \Rightarrow\ & |(x-2)(x+2)| < \delta|x+2| \\ \Rightarrow\ & |x^2-4| < \delta|x+2| \qquad (10) \end{aligned}$$

No entanto, mostramos em (8) que se $\delta \leqslant 1$ e $0 < |x - 2| < \delta$, então $|x + 2| < 5$, isto é, $\delta|x + 2| < \delta \cdot 5$. Prosseguindo, de (10), temos

$$\begin{aligned} & |x^2-4| < \delta|x+2| \quad \text{e} \quad \delta|x+2| < \delta \cdot 5 \\ \Rightarrow\ & |x^2-4| < \delta \cdot 5 \\ \Rightarrow\ & |x^2-4| < \frac{\epsilon}{5} \cdot 5 \qquad (\text{pois } \delta \leqslant \epsilon/5) \\ \Rightarrow\ & |x^2-4| < \epsilon \end{aligned}$$

Demonstramos que, tendo escolhido $\delta = \min(1, \epsilon/5)$ para todo $\epsilon > 0$, a seguinte afirmativa é verdadeira:

$$\text{se } 0 < |x - 2| < \delta \text{ então } |x^2 - 4| < \epsilon$$

Isso prova que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

O teorema a seguir estabelece que uma função não pode tender a dois limites diferentes ao mesmo tempo. Ele é chamado de *teorema da unicidade*, pois garante que se o limite de uma função existir, ele será único. Vamos enunciar o teorema aqui, mas adiar a demonstração até a Secção Suplementar 2.9.

2.1.2 TEOREMA Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$

O Teorema 2.1.2 permite-nos afirmar que se a função f tiver um limite L no número a, então L será *o* limite de f em a.

EXERCÍCIOS 2.1

Nos Exercícios de 1 a 22 são dados $f(x)$, a e L, bem como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. (a) Usando argumentos similares àqueles dos Exemplos 1 e 3, determine um $\delta > 0$ para o ϵ dado, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon \qquad (11)$$

(b) Usando as propriedades das desigualdades, determine um $\delta > 0$, tal que a afirmativa (11) seja verdadeira para o valor dado de ϵ.

1. $\lim\limits_{x \to 4} (x - 1) = 3$; $\epsilon = 0{,}2$ **2.** $\lim\limits_{x \to 3} (x + 2) = 5$; $\epsilon = 0{,}02$

3. $\lim\limits_{x \to 3} (2x + 4) = 10$; $\epsilon = 0{,}01$ **4.** $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 1) = 5$; $\epsilon = 0{,}1$

5. $\lim\limits_{x \to 1} (5x - 3) = 2$; $\epsilon = 0{,}05$

6. $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 5) = 3$; $\epsilon = 0{,}001$

7. $\lim\limits_{x \to -1} (3 - 4x) = 7$; $\epsilon = 0{,}02$

8. $\lim\limits_{x \to -2} (2 + 5x) = -8$; $\epsilon = 0{,}002$

9. $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$; $\epsilon = 0{,}005$ **10.** $\lim\limits_{x \to -4} x^2 = 16$; $\epsilon = 0{,}03$

11. $\lim\limits_{x \to -2} x^2 = 4$; $\epsilon = 0{,}003$

12. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 5) = -4$; $\epsilon = 0{,}01$

13. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 2x + 1) = 1$; $\epsilon = 0{,}001$

14. $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 4x + 4) = 1$; $\epsilon = 0{,}002$

15. $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 3x - 4) = -4$; $\epsilon = 0{,}03$

16. $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - x - 6) = 0$; $\epsilon = 0{,}005$

17. $\lim\limits_{x \to -2} (2x^2 + 5x + 3) = 1$; $\epsilon = 0{,}004$

18. $\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 - 7x + 2) = -2$; $\epsilon = 0{,}02$

19. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$; $\epsilon = 0{,}01$

20. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{9x^2 - 1}{3x - 1} = 2$; $\epsilon = 0{,}01$

21. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{3x^2 - 8x - 3}{x - 3} = \dfrac{5}{2}$; $\epsilon = 0{,}001$

22. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{4x^2 - 4x - 3}{2x + 1} = 5$; $\epsilon = 0{,}003$

Nos Exercícios de 23 a 42, prove que o limite é o número indicado, aplicando a Definição 2.1.1.

23. $\lim\limits_{x \to 2} 7 = 7$ **24.** $\lim\limits_{x \to 5} (-4) = -4$

25. $\lim\limits_{x \to 4} (2x + 1) = 9$ **26.** $\lim\limits_{x \to 1} (4x + 3) = 7$

27. $\lim\limits_{x \to -1} (5x + 8) = 3$ **28.** $\lim\limits_{x \to 3} (3x - 5) = 4$

29. $\lim\limits_{x \to 3} (7 - 3x) = -2$ **30.** $\lim\limits_{x \to -4} (2x + 7) = -1$

31. $\lim\limits_{x \to -2} (1 + 3x) = -5$ **32.** $\lim\limits_{x \to -2} (7 - 2x) = 11$

33. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$ **34.** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

35. $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$ **36.** $\lim\limits_{x \to -3} x^2 = 9$

37. $\lim\limits_{x \to 5} (x^2 - 3x) = 10$ **38.** $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1) = 7$

39. $\lim\limits_{x \to -3} (5 - x - x^2) = -1$ **40.** $\lim\limits_{x \to -1} (3 + 2x - x^2) = 0$

41. $\lim\limits_{x \to 2} (6x^2 - 13x + 5) = 3$ **42.** $\lim\limits_{x \to 1} (4x^2 - 13x + 12) = 3$

43. Prove que $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, se a for qualquer número positivo.

44. Prove que $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, se a for qualquer número negativo.

2.2 TEOREMAS SOBRE LIMITES DE FUNÇÕES

Na Secção 2.1 provamos que o limite de uma função era um determinado número, aplicando a Definição 2.1.1. Para calcular limites de funções por métodos mais simples, usaremos teoremas cujas provas estejam baseadas na Definição 2.1.1. Esses teoremas, bem como outros sobre limites de funções que aparecem nas últimas secções deste capítulo, são chamados de "teoremas de limite" e serão assim designados sempre que aparecerem.

2.2.1 TEOREMA DE LIMITE 1

Se m e b forem constantes quaisquer,

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

Prova Para demonstrar esse teorema, usamos a Definição 2.1.1. Para todo $\epsilon > 0$, devemos provar que existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon \qquad (1)$$

Caso 1: $m \neq 0$.

Como $|(mx + b) - (ma + b)| = |m| \cdot |x - a|$, queremos encontrar um $\delta > 0$ tal que, para todo $\epsilon > 0$

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |m| \cdot |x - a| < \epsilon$$

ou, como $m \neq 0$

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |x - a| < \frac{\epsilon}{|m|}$$

A afirmativa acima será verdadeira se $\delta = \epsilon/|m|$; assim, concluímos que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ e } \delta = \frac{\epsilon}{|m|} \text{ então } |(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon$$

Isso prova o teorema no Caso 1.

Caso 2: $m = 0$.

Se $m = 0$, então $|(mx + b) - (ma + b)| = 0$ para todos os valores de x. Assim, tomamos δ como sendo qualquer número positivo, e a afirmativa (1) é verdadeira. Isso prova o teorema no Caso 2. ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Do Teorema de Limite 1, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} (3x + 5) &= 3 \cdot 2 + 5 \\ &= 11\end{aligned}$$ ◀

2.2.2 TEOREMA DE LIMITE 2

Se c for uma constante, então para qualquer número a,

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Prova Isso segue imediatamente do Teorema de Limite 1, tomando $m = 0$ e $b = c$. ■

2.2.3 TEOREMA DE LIMITE 3

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Prova Isso também segue imediatamente do Teorema de Limite 1, tomando $m = 1$ e $b = 0$. ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Do Teorema de Limite 2,

$$\lim_{x \to 5} 7 = 7$$

e do Teorema de Limite 3,

$$\lim_{x \to -6} x = -6$$ ◀

2.2.4 TEOREMA DE LIMITE 4

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

Prova Provaremos esse teorema com o sinal mais. Dado

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad (2)$$

e

$$\lim_{x \to a} g(x) = M \qquad (3)$$

queremos provar que

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Usamos a Definição 2.1.1, isto é, para todo $\epsilon > 0$ precisamos provar que existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \epsilon \qquad (4)$$

Como (2) foi dado, segue, da definição de limite, que para $\frac{1}{2}\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } |f(x) - L| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

Da mesma forma, de (3), para $\frac{1}{2}\epsilon > 0$ existe um $\delta_2 > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } |g(x) - M| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

Seja, agora, δ o menor dos dois números δ_1 e δ_2. Então, $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$. Assim,

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

e

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |g(x) - M| < \tfrac{1}{2}\epsilon$$

Logo, se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Dessa forma, obtivemos a afirmativa (4) e, portanto, provamos que

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

A prova do Teorema de Limite 4 usando o sinal menos será deixada como exercício (veja o Exercício 46). ■

O Teorema de Limite 4 pode ser aplicado a um número qualquer finito de funções.

2.2.5 TEOREMA DE LIMITE 5

Se $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, . . . , e $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, então

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$$

Esse teorema pode ser provado usando o Teorema de Limite 4 e a indução matemática (veja o Exercício 47).

2.2.6 TEOREMA DE LIMITE 6

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

A demonstração desse teorema é mais sofisticada do que as dos teoremas precedentes. As etapas da prova estão indicadas nos Exercícios 49 e 50.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Do Teorema de Limite 3, $\lim_{x \to 3} x = 3$ e do Teorema de Limite 1, $\lim_{x \to 3} (2x + 1) = 7$. Assim, do Teorema de Limite 6,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} [x(2x + 1)] &= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} (2x + 1) \\ &= 3 \cdot 7 \\ &= 21 \end{aligned}$$

◀

O Teorema de Limite 6 também pode ser estendido a um número qualquer finito de funções, se aplicarmos a indução matemática.

2.2.7 TEOREMA DE LIMITE 7

Se $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, . . . , $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, então

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)] = L_1 L_2 \ldots L_n$$

A demonstração será deixada como exercício (veja o Exercício 48).

2.2.8 TEOREMA DE LIMITE 8

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e n for um inteiro positivo qualquer, então

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$$

A demonstração segue imediatamente do Teorema de Limite 7, tomando $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, todas iguais a $f(x)$ e $L_1, L_2, \ldots, L_n$, todos iguais a L.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Do Teorema de Limite 1, $\lim_{x \to -2} (5x + 7) = -3$. Logo, do Teorema de Limite 8, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} (5x + 7)^4 &= \left[\lim_{x \to -2} (5x + 7) \right]^4 \\ &= (-3)^4 \\ &= 81 \end{aligned}$$

◀

2.2.9 TEOREMA DE LIMITE 9

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}} \quad \text{se } M \neq 0$$

A demonstração, baseada na Definição 2.1.1, será apresentada na Secção Suplementar 2.9.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Do Teorema de Limite 3, $\lim_{x \to 4} x = 4$ e do Teorema de Limite 1, $\lim_{x \to 4} (-7x + 1) = -27$. Logo, do Teorema de Limite 9,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 4} \frac{x}{-7x + 1} &= \frac{\lim_{x \to 4} x}{\lim_{x \to 4} (-7x + 1)} \\ &= \frac{4}{-27} \\ &= -\frac{4}{27}\end{aligned}$$

◀

2.2.10 TEOREMA DE LIMITE 10

Se n for um inteiro positivo e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

com a restrição de que se n for par, $L > 0$.

A demonstração desse teorema também será apresentada na Secção Suplementar 2.9.

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Do resultado da Ilustração 5 e do Teorema de Limite 10 segue que

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x + 1}} &= \sqrt[3]{\lim_{x \to 4} \frac{x}{-7x + 1}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{4}{27}} \\ &= -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\end{aligned}$$

◀

A seguir estão alguns exemplos ilustrando a aplicação dos teoremas acima. Para indicar o teorema de limite que está sendo usado, usamos a abreviatura "T.L." seguida do número do teorema; assim, "T.L. 2" refere-se ao Teorema de Limite 2.

EXEMPLO 1 Ache $\lim_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5)$ e, quando aplicável, indique o teorema de limite que está sendo usado.

Solução

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}(x^2+7x-5) &= \lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 7x - \lim_{x\to 3} 5 && \text{(T.L. 5)}\\
&= \lim_{x\to 3} x \cdot \lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 7 \cdot \lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 5 && \text{(T.L. 6)}\\
&= 3\cdot 3 + 7\cdot 3 - 5 && \text{(T.L. 3 e T.L. 2)}\\
&= 9 + 21 - 5\\
&= 25
\end{aligned}
$$

É importante, neste ponto, notar que o limite no Exemplo 1 foi calculado com a aplicação direta dos teoremas de limite. Para a função f, definida por $f(x) = x^2 + 7x - 5$, note que $f(3) = 25$, que é igual ao $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 + 7x - 5)$. Não é sempre verdade que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (veja Exemplo 3).

EXEMPLO 2 Ache

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}}$$

e, quando aplicável, indique o teorema de limite que está sendo usado.

Solução

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}} &= \sqrt{\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}} && \text{(T.L. 10)}\\
&= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2x+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)}} && \text{(T.L. 9)}\\
&= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 2} x^3 + \lim\limits_{x\to 2} 2x + \lim\limits_{x\to 2} 3}{\lim\limits_{x\to 2} x^2 + \lim\limits_{x\to 2} 5}} && \text{(T.L. 5)}\\
&= \sqrt{\frac{(\lim\limits_{x\to 2} x)^3 + \lim\limits_{x\to 2} 2 \cdot \lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 3}{(\lim\limits_{x\to 2} x)^2 + \lim\limits_{x\to 2} 5}} && \text{(T.L. 6 e T.L. 8)}\\
&= \sqrt{\frac{2^3+2\cdot 2+3}{2^2+5}} && \text{(T.L. 3 e T.L. 2)}\\
&= \sqrt{\frac{8+4+3}{9}}\\
&= \frac{\sqrt{15}}{3}
\end{aligned}
$$

EXEMPLO 3 Ache $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ dado que

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{se } x \neq 4\\ 5 & \text{se } x = 4\end{cases}$$

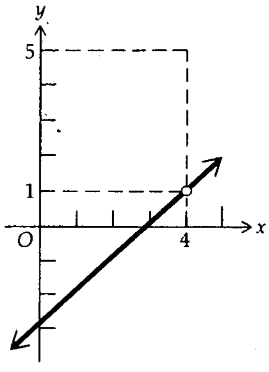


FIGURA 1

Solução Quando calculamos $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ estamos considerando valores de x próximos de 4, mas não iguais a 4. Assim

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 4} f(x) &= \lim_{x \to 4} (x - 3) \\ &= 1 \qquad \text{(T.L. 1)}\end{aligned}$$

No Exemplo 3, $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 1$ mas $f(4) = 5$; logo, $\lim\limits_{x \to 4} f(x) \neq f(4)$. Em termos geométricos, há uma quebra no gráfico da função no ponto onde $x = 4$ (veja a Figura 1). O gráfico da função consiste nos pontos (4, 5) e na reta cuja equação é $y = x - 3$, com a supressão do ponto (4, 1).

EXEMPLO 4 Dada

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

(a) Use uma calculadora para tabular os valores de $f(x)$ quando x for 4, 4,5, 4,9, 4,99, 4,999 e quando x for 6, 5,5, 5,1, 5,01, 5,001. A que $f(x)$ tende quando x aproxima-se de 5?

(b) Use teoremas de limite para calcular $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

Solução

(a) As Tabelas 1 e 2 dão os valores de $f(x)$ para valores atribuídos a x. Das tabelas, $f(x)$ parece estar se aproximando de 10 à medida que x aproxima-se de 5.

Tabela 1

x	$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$
4	9
4,5	9,5
4,9	9,9
4,99	9,99
4,999	9,999

Tabela 2

x	$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$
6	11
5,5	10,5
5,1	10,1
5,01	10,01
5,001	10,001

(b) Aqui temos uma situação diferente daquela dos exemplos precedentes. O Teorema de Limite 9 não pode ser aplicado ao quociente $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$, pois $\lim\limits_{x \to 5} (x - 5) = 0$. Entretanto, fatorando o numerador obtemos

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5}$$

Se $x \neq 5$, o numerador e o denominador podem ser divididos por $x - 5$ para obtermos $x + 5$. Lembre-se de que quando calculamos o limite de uma função, à medida que x aproxima-se de 5, estamos considerando valores de x próximos a 5 mas não iguais a 5. Portanto, é possível dividir o numerador e o denominador por $x - 5$. A solução toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} &= \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} \\ &= \lim_{x \to 5} (x + 5) \\ &= 10 \qquad \text{(T.L. 1)}\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Dada

$$g(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

(a) Use a calculadora para tabular até quatro casas decimais, os valores de $g(x)$ quando x for 3, 3,5, 3,9, 3,99, 3,999 e quando x for 5, 4,5, 4,1, 4,01, 4,001. A que $g(x)$ parece tender quando x aproxima-se de 4?

(b) Determine $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$ e, quando aplicável, indique os teoremas de limite usados.

Tabela 3

x	$g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
3	0,2679
3,5	0,2583
3,9	0,2516
3,99	0,2502
3,999	0,2500

Tabela 4

x	$g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
5	0,2361
4,5	0,2426
4,1	0,2485
4,01	0,2498
4,001	0,2500

Solução

(a) As Tabelas 3 e 4 fornecem os valores de $g(x)$ para os valores atribuídos a x. Pelas tabelas, $g(x)$ parece estar se aproximando de 0,2500, quando x se aproxima de 4.

(b) Como no Exemplo 4, o Teorema de Limite 9 não pode ser aplicado ao quociente $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$, pois $\lim\limits_{x \to 4} (x - 4) = 0$. Para simplificar o quociente, racionalizamos o numerador multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{x} + 2$.

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$
$$= \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

Como estamos calculando o limite da função para x tendendo a 4, estamos considerando valores de x próximos de 4, mas não iguais a 4. Logo, podemos dividir o numerador e o denominador por $x - 4$. Portanto

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \qquad \text{se } x \neq 4$$

A solução é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \\
&= \frac{\lim\limits_{x \to 4} 1}{\lim\limits_{x \to 4} (\sqrt{x} + 2)} && \text{(T.L. 9)} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} + \lim\limits_{x \to 4} 2} && \text{(T.L. 2 e T.L. 4)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x \to 4} x} + 2} && \text{(T.L. 10 e T.L. 2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} && \text{(T.L. 3)} \\
&= \tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

Às vezes necessitaremos de duas outras igualdades que são equivalentes a

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Elas são dadas nos dois teoremas a seguir.

2.2.11 TEOREMA $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0$

Prova Dado que o teorema envolve uma condição *se e somente se*, a demonstração requer duas partes.

Parte 1: Prove que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se $\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0$.

Começamos por $\lim_{x \to a} f(x)$ substituindo $f(x)$ por $[f(x) - L] + L$, e então aplicamos o Teorema de Limite 4.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} ([f(x) - L] + L) \\ &= \lim_{x \to a} [f(x) - L] + \lim_{x \to a} L \\ &= 0 + L \\ &= L\end{aligned}$$

Parte 2: Prove que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ somente se $\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0$.

Aqui precisamos mostrar que se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} [f(x) - L] = 0$. Aplicamos o Teorema de Limite 4 a $\lim_{x \to a} [f(x) - L]$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} [f(x) - L] &= \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} L \\ &= L - L \\ &= 0\end{aligned}$$

■

2.2.12 TEOREMA $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{t \to 0} f(t + a) = L$

Prova Seja $t + a = x$; então $x - a = t$. Há duas partes a serem provadas.

Parte 1: Prove que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se $\lim_{t \to 0} f(t + a) = L$.

Se $\lim_{t \to 0} f(t + a) = L$, da Definição 2.1.1, segue que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se} \quad 0 < |t| < \delta \quad \text{então} \quad |f(t + a) - L| < \epsilon \tag{5}$$

ou, equivalentemente, substituindo $t + a$ por x e t por $x - a$,

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \epsilon \tag{6}$$

Da Definição 2.1.1, a afirmativa (6) implica que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Parte 2: Prove que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ somente se $\lim_{t \to 0} f(t + a) = L$.

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então, pela Definição 2.1.1, para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que a afirmação (6) seja verdadeira. Substituindo x por $t + a$ e $x - a$ por t, temos a afirmação (5). Assim, da Definição 2.1.1, podemos concluir que

$$\lim_{t \to 0} f(t + a) = L \qquad \blacksquare$$

EXERCÍCIOS 2.2

Nos Exercícios de 1 a 14, ache o limite e, quando aplicável, indique os teoremas de limite usados.

1. $\lim\limits_{x \to 5} (3x - 7)$

2. $\lim\limits_{x \to -4} (5x + 2)$

3. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$

4. $\lim\limits_{x \to 3} (2x^2 - 4x + 5)$

5. $\lim\limits_{z \to -2} (z^3 + 8)$

6. $\lim\limits_{y \to -1} (y^3 - 2y^2 + 3y - 4)$

7. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x - 5}{5x - 1}$

8. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x + 4}{8x - 1}$

9. $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 5}{2t^3 + 6}$

10. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4}$

11. $\lim\limits_{r \to 1} \sqrt{\dfrac{8r + 1}{r + 3}}$

12. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + 1}}$

13. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 - x - 1}}$

14. $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt[3]{\dfrac{5 + 2x}{5 - x}}$

Nos Exercícios de 15 a 20, faça o seguinte: (a) Use uma calculadora para tabular, até quatro casas decimais, os valores de $f(x)$ para os valores fixados dos de x. Do que $f(x)$ parece tender quando x se aproxima de c? (b) Encontre o $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ e, quando aplicável, indique os teoremas de limite usados.

15. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$; x é 1, 1,5, 1,9, 1,99, 1,999, e x é 3, 2,5, 2,1, 2,01, 2,001; $c = 2$

16. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 6x - 16}$; x é, -3, $-2{,}5$, $-2{,}1$, $-2{,}01$, $-2{,}001$ e x é -1, $-1{,}5$, $-1{,}9$, $-1{,}99$, $-1{,}999$; $c = -2$

17. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$; x é -4, $-3{,}5$, $-3{,}1$, $-3{,}01$, $-3{,}001$, $-3{,}0001$ e x é -2, $-2{,}5$, $-2{,}9$, $-2{,}99$, $-2{,}999$, $-2{,}9999$; $c = -3$

18. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{4x^2 - 9}$; x é 1, 1,4, 1,49, 1,499, 1,4999 e x é 2, 1,6, 1,51, 1,501, 1,5001; $c = \frac{3}{2}$

19. $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$; x é 8, 8,5, 8,9, 8,99, 8,999 e x é 10, 9,5, 9,1, 9,01, 9,001; $c = 9$

20. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$; x é -1, $-0{,}5$, $-0{,}1$, $-0{,}01$, $-0{,}001$ e x é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001; $c = 0$

Nos Exercícios de 21 a 39, encontre o limite e, quando aplicável, indique os teoremas de limite usados.

21. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$

22. $\lim\limits_{z \to -5} \dfrac{z^2 - 25}{z + 5}$

23. $\lim\limits_{x \to -3/2} \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

24. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1}$

25. $\lim\limits_{s \to 4} \dfrac{3s^2 - 8s - 16}{2s^2 - 9s + 4}$

26. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$

27. $\lim\limits_{y \to -2} \dfrac{y^3 + 8}{y + 2}$

28. $\lim\limits_{s \to 1} \dfrac{s^3 - 1}{s - 1}$

29. $\lim\limits_{y \to -3} \sqrt{\dfrac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}}$

30. $\lim\limits_{t \to 3/2} \sqrt{\dfrac{8t^3 - 27}{4t^2 - 9}}$

31. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

32. $\lim\limits_{h \to -1} \dfrac{\sqrt{h + 5} - 2}{h + 1}$

33. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

34. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

35. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h + 1} - 1}{h}$

36. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$

37. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$

38. $\lim\limits_{y \to 4} \dfrac{2y^3 - 11y^2 + 10y + 8}{3y^3 - 17y^2 + 16y + 16}$

39. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$

40. Se $f(x) = x^2 + 5x - 3$, mostre que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

41. Se $F(x) = 2x^3 + 7x - 1$, mostre que $\lim\limits_{x \to -1} F(x) = F(-1)$.

42. Se $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$, mostre que $\lim\limits_{x \to 4} g(x) = 8$, mas que $g(4)$ não é definida.

43. Se $h(x) = \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x}$, mostre que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \frac{1}{6}$, mas que $h(0)$ não está definida.

44. Dado que f é a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

(a) Ache $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ e mostre que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$. (b) Faça um esboço do gráfico de f.

45. Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{se } x \neq -3 \\ 4 & \text{se } x = -3 \end{cases}$$

(a) Ache $\lim_{x \to -3} f(x)$ e mostre que $\lim_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$. (b) Faça um esboço do gráfico de f.

46. Use a Definição 2.1.1 para provar que se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

então

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = L - M$$

47. Prove o Teorema de Limite 5 aplicando o Teorema de Limite 4 e usando indução matemática.

48. Prove o Teorema de Limite 7 aplicando o Teorema de Limite 6 e usando indução matemática.

49. Use a Definição 2.1.1 para provar que se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

então

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

(*Sugestão*: para provar que $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$ precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) \cdot g(x)| < \epsilon$. Primeiro mostre que existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_1$, então $|f(x)| < 1 + |L|$, aplicando a Definição 2.1.1 ao $\lim_{x \to a} f(x) = L$ com $\epsilon = 1$ e $\delta = \delta_1$, então use a desigualdade triangular. Mostre então que existe um $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então $|g(x)| < \epsilon/(1 + |L|)$ aplicando a Definição 2.1.1 a $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Tomando δ como o menor dos dois números δ_1 e δ_2, o teorema está provado.)

50. Prove o Teorema de Limite 6: Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

(*Sugestão*: escreva $f(x) \cdot g(x) = [f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M] + L \cdot M$. Aplique o Teorema de Limite 5, e o resultado do Exercício 49.)

2.3 LIMITES LATERAIS

Quando consideramos $\lim_{x \to a} f(x)$, estamos interessados em valores de x no intervalo aberto contendo a, mas não no próprio a, isto é, em valores de x próximos a a, maiores ou menores do que a. Mas, suponha que tenhamos a função f como por exemplo, $f(x) = \sqrt{x - 4}$. Como $f(x)$ não existe para $x < 4$, f não está definida em nenhum intervalo aberto contendo 4. Logo, $\lim_{x \to 4} \sqrt{x - 4}$ não tem significado. No entanto, se x estiver restrito a valores maiores do que 4, o valor de $\sqrt{x - 4}$ poderá se tornar tão próximo de zero quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 4, mas maior do que 4. Em tal caso, deixamos x aproximar-se de 4 pela direita e consideramos o **limite lateral direito** ou o **limite direito**, que será definido agora.

2.3.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função que está definida em todos os números de algum intervalo aberto (a, c). Então, o **limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < x - a < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

Note que na afirmativa precedente não existem barras de valor absoluto em torno de $x - a$, pois $x - a > 0$, uma vez que $x > a$.

Segue, da Definição 2.3.1, que

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = 0$$

Se, ao considerarmos o limite de uma função, a variável independente x estiver restrita a valores menores do que um número a, dizemos que x tende a a pela esquerda; o limite é chamado, então, de **limite lateral esquerdo** ou **limite esquerdo**.

2.3.2 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em todos os números de algum intervalo aberto (d, a). Então, o **limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < a - x < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

Podemos nos referir ao $\lim_{x \to a} f(x)$ como o **limite bilateral**, para distingui-lo dos limites laterais.

Os Teoremas de Limite de 1 a 10, dados na Secção 2.2, permanecem válidos quando trocamos "$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

EXEMPLO 1 A **função sinal** é definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

Signum é a palavra em latim para sinal.

(a) Faça um esboço do gráfico dessa função. (b) Determine $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x$ e $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x$, se existirem.

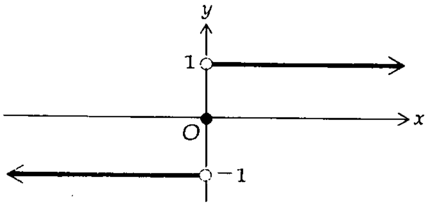


FIGURA 1

Solução

(a) Um esboço do gráfico aparece na Figura 1.

(b) Como $\operatorname{sgn} x = -1$ se $x < 0$ e $\operatorname{sgn} x = 1$ se $x > 0$, temos

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

No Exemplo 1, $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x \neq \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x$. Como os limites à esquerda e à direita não são iguais, o limite bilateral não existe. O fato de a desigualdade dos limites laterais implicar a inexistência do limite bilateral será objeto do próximo teorema.

2.3.3 TEOREMA $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e será igual a L se e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existirem e forem iguais a L.

A prova do Teorema 2.3.3 será deixada como exercício (veja o Exercício 34).

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Um atacadista vende um produto por quilo (ou fração de quilo); se forem pedidos não mais de 10 quilos, o atacadista cobrará \$ 1 por quilo. No entanto, para incentivar pedidos maiores, ele cobra \$ 0,90 por quilo, se mais do que 10 quilos forem comprados. Assim, se x quilos do produto forem comprados e $C(x)$ for o custo total do pedido, então

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0{,}9x & \text{se } 10 < x \end{cases}$$

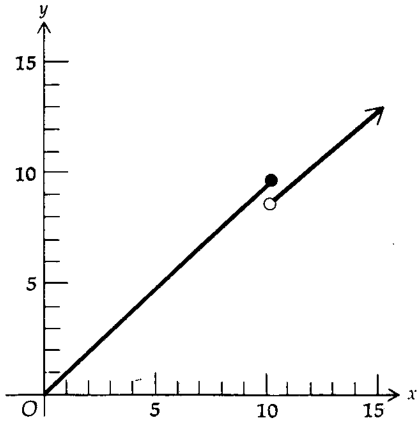


FIGURA 2

Um esboço do gráfico de C está na Figura 2. Observe que $C(x)$ foi obtido da igualdade $C(x) = x$ quando $0 \leqslant x \leqslant 10$ e da igualdade $C(x) = 0{,}9x$ quando $10 < x$. Devido a essa situação, ao considerar o limite de $C(x)$ para x tendendo a 10, precisamos distinguir entre o limite lateral esquerdo e o limite lateral direito em 10. Para a função C, temos

$$\lim_{x \to 10^-} C(x) = \lim_{x \to 10^-} x \qquad \lim_{x \to 10^+} C(x) = \lim_{x \to 10^+} 0{,}9x$$
$$= 10 \qquad\qquad\qquad = 9$$

Como $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x) \neq \lim\limits_{x \to 10^+} C(x)$, concluímos pelo Teorema 2.3.3 que $\lim\limits_{x \to 10} C(x)$ não existe. Observe na Figura 2 que em $x = 10$ há uma quebra no gráfico da função C. Vamos retornar a essa função na Secção 2.6. ◀

EXEMPLO 2 Seja g definida por

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de g. (b) Ache $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$, se existir.

Solução

(a) Um esboço do gráfico está na Figura 3.

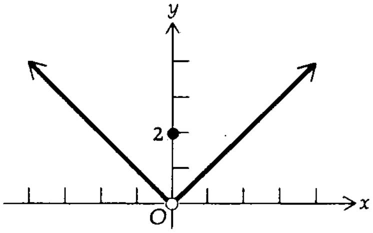


FIGURA 3

(b) $$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) \qquad \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} x$$
$$= 0 \qquad\qquad\qquad = 0$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$, segue do Teorema 2.3.3 que $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ existe e é igual a zero.

Observe no Exemplo 2 que $g(0) = 2$, o que não afeta $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$. Observe também que há uma quebra no gráfico de g em $x = 0$.

EXEMPLO 3 Seja h definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2 + x^2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de h. (b) Ache cada um dos seguintes limites, se existirem: $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

Solução

(a) Um esboço do gráfico está na Figura 4.

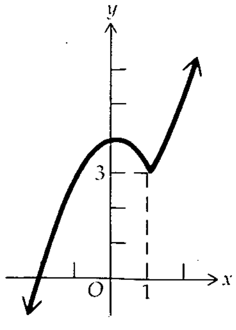


FIGURA 4

(b) $$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} (4 - x^2) \qquad \lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} (2 + x^2)$$
$$= 3 \qquad\qquad\qquad = 3$$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$ e ambos são iguais a 3, segue do Teorema 2.3.3 que $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 3$.

EXEMPLO 4 Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{se } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 3 - x & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Ache, se existirem, cada um dos seguintes limites: $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

Solução

(a) Um esboço do gráfico de f está na Figura 5.

(b) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} (x + 5) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$

Como $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$, então $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ não existe.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (3 - x) = 0$

Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, então $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ não existe.

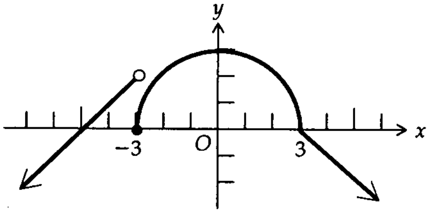


FIGURA 5

EXERCÍCIOS 2.3

Nos Exercícios de 1 a 22, faça um esboço do gráfico e ache o limite indicado, se existir; se não existir, indique a razão disto.

1. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ -3 & \text{se } 1 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

2. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

3. $f(t) = \begin{cases} t + 4 & \text{se } t \leqslant -4 \\ 4 - t & \text{se } -4 < t \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{t \to -4^+} f(t)$; (b) $\lim\limits_{t \to -4^-} f(t)$; (c) $\lim\limits_{t \to -4} f(t)$

4. $g(s) = \begin{cases} s + 3 & \text{se } s \leqslant -2 \\ 3 - s & \text{se } -2 < s \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{s \to -2^+} g(s)$; (b) $\lim\limits_{s \to -2^-} g(s)$; (c) $\lim\limits_{s \to -2} g(s)$

5. $F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ 8 - 2x & \text{se } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 2^+} F(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 2^-} F(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 2} F(x)$

6. $h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x < 3 \\ 10 - x & \text{se } 3 \leqslant x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 3^+} h(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 3^-} h(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$

7. $g(r) = \begin{cases} 2r + 3 & \text{se } r < 1 \\ 2 & \text{se } r = 1 \\ 7 - 2r & \text{se } 1 < r \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{r \to 1^+} g(r)$; (b) $\lim\limits_{r \to 1^-} g(r)$; (c) $\lim\limits_{r \to 1} g(r)$

8. $g(t) = \begin{cases} 3 + t^2 & \text{se } t < -2 \\ 0 & \text{se } t = -2 \\ 11 - t^2 & \text{se } -2 < t \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{t \to -2^+} g(t)$; (b) $\lim\limits_{t \to -2^-} g(t)$; (c) $\lim\limits_{t \to -2} g(t)$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{se } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

10. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x < 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \\ x^2 + 2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

11. $F(x) = |x - 5|$
(a) $\lim\limits_{x\to 5^+} F(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 5^-} F(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 5} F(x)$

12. $f(x) = 3 + |2x - 4|$
(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

13. $G(x) = |2x - 3| - 4$
(a) $\lim\limits_{x\to 3/2^+} G(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 3/2^-} G(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 3/2} G(x)$

14. $F(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{se } x < -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ |1-x| & \text{se } -1 < x \end{cases}$
(a) $\lim\limits_{x\to -1^+} F(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to -1^-} F(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to -1} F(x)$

15. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$
(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

16. $S(x) = |\operatorname{sgn} x|$ (sgn x é definido no Exemplo 1)
(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} S(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} S(x)$

17. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ -2 & \text{se } 2 < x \end{cases}$
(a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$; (d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; (e) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; (f) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

18. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \end{cases}$
(a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; (d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; (e) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; (f) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

19. $f(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t} & \text{se } t < 0 \\ \sqrt{t} & \text{se } 0 \leq t \end{cases}$
(a) $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$; (b) $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t)$; (c) $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$

20. $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{se } 0 < x \end{cases}$
(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

21. $F(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} & \text{se } x \leq -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{se } -3 < x < 3 \\ \sqrt{x^2 - 9} & \text{se } 3 \leq x \end{cases}$
(a) $\lim\limits_{x\to -3^-} F(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to -3^+} F(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to -3} F(x)$; (d) $\lim\limits_{x\to 3^-} F(x)$; (e) $\lim\limits_{x\to 3^+} F(x)$; (f) $\lim\limits_{x\to 3} F(x)$

22. $G(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t+1} & \text{se } t \leq -1 \\ \sqrt{1 - t^2} & \text{se } -1 < t < 1 \\ \sqrt[3]{t-1} & \text{se } 1 \leq t \end{cases}$
(a) $\lim\limits_{t\to -1^-} G(t)$; (b) $\lim\limits_{t\to -1^+} G(t)$; (c) $\lim\limits_{t\to -1} G(t)$; (d) $\lim\limits_{t\to 1^-} G(t)$; (e) $\lim\limits_{t\to 1^+} G(t)$; (f) $\lim\limits_{t\to 1} G(t)$

23. $F(x) = x - 2\operatorname{sgn} x$, onde sgn x está definido no Exemplo 1. Ache, se existirem: (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$.

24. $h(x) = \operatorname{sgn} x - U(x)$, onde sgn x está definido no Exemplo 1 e U é uma função escada definida por

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$$

Ache, se existirem: (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

25. Ache, se existirem: (a) $\lim\limits_{x\to 2^+} [\![x]\!]$; (b) $\lim\limits_{x\to 2^-} [\![x]\!]$; (c) $\lim\limits_{x\to 2} [\![x]\!]$.

26. Ache, se existirem: (a) $\lim\limits_{x\to 4^+} [\![x - 3]\!]$; (b) $\lim\limits_{x\to 4^-} [\![x - 3]\!]$; (c) $\lim\limits_{x\to 4} [\![x - 3]\!]$.

27. Seja $h(x) = (x - 1)\operatorname{sgn} x$. Faça um esboço do gráfico de h. Ache, se existirem: (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

28. Seja $G(x) = [\![x]\!] + [\![4 - x]\!]$. Faça um esboço do gráfico de G. Ache, se existirem: (a) $\lim\limits_{x\to 3^+} G(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 3^-} G(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 3} G(x)$.

29. Dada $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{se } x < 4 \\ 5x + k & \text{se } 4 \leq x \end{cases}$. Ache o valor de k para o qual $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ existe.

30. Dada $f(x) = \begin{cases} kx - 3 & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 + k & \text{se } -1 < x \end{cases}$. Ache o valor de k para o qual $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ existe.

31. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -2 \\ ax + b & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2x - 6 & \text{se } 2 \leq x \end{cases}$. Ache os valores de a e b, tais que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ambos existam.

32. Dada $f(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{se } x < -3 \\ ax + 2b & \text{se } -3 \leq x \leq 3 \\ b - 5x & \text{se } 3 < x \end{cases}$. Ache os valores de a e b, tais que existam os limites: $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

33. Seja $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe, porém $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)|$ não existe.

34. Prove o Teorema 2.3.3.

35. As taxas para despachar cargas por navio são freqüentemente baseadas em fórmulas que oferecem um preço menor por quilo quando o tamanho da carga é maior. Suponha que x quilos sejam o peso de uma carga, $C(x)$ seja o seu custo total e

$$C(x) = \begin{cases} 0{,}80x & \text{se } 0 < x \leq 50 \\ 0{,}70x & \text{se } 50 < x \leq 200 \\ 0{,}65x & \text{se } 200 < x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de C. Ache cada um dos seguintes limites: (b) $\lim\limits_{x\to 50^-} C(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 50^+} C(x)$; (d) $\lim\limits_{x\to 200^-} C(x)$; (e) $\lim\limits_{x\to 200^+} C(x)$.

36. Dada $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{se } x \leqslant 1 \\ x+1 & \text{se } 1 < x \end{cases}$ e $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$

(a) Mostre que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ambos existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ não existe.

(b) Mostre que $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ ambos existem, mas não são iguais e, portanto, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ não existe.

(c) Ache fórmulas para $f(x) \cdot g(x)$.

(d) Prove que $\lim\limits_{x\to 1} [f(x) \cdot g(x)]$ existe mostrando que $\lim\limits_{x\to 1^-} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^+} [f(x) \cdot g(x)]$.

2.4 LIMITES INFINITOS

Nesta secção discutiremos funções cujos valores aumentam ou diminuem sem limitação, quando a variável independente aproxima-se cada vez mais de um número fixo. Primeiro consideraremos a função definida por

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$$

O domínio de f é o conjunto de todos os números reais exceto 2 e a imagem é o conjunto de todos os números positivos. Vamos pesquisar os valores funcionais de f quando x está próximo de 2. Façamos x aproximar-se de 2 pela direita; seja x 3, 2,5, 2,25, 2,1, 2,01 e 2,001 e usamos uma calculadora para calcular os valores correspondentes de $f(x)$ mostrados na Tabela 1. Dessa tabela você vê intuitivamente que à medida que x se aproxima de 2 por valores maiores do que 2, $f(x)$ cresce indefinidamente. Em outras palavras, podemos tornar $f(x)$ maior do que qualquer número positivo prefixado (isto é, $f(x)$ pode se tornar tão grande quanto desejarmos) para todos os valores de x suficientemente próximos de 2 e x maior do que 2.

Tabela 1

x	$f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$
3	3
2,5	12
2,25	48
2,1	300
2,01	30.000
2,001	3.000.000

Para indicar que $f(x)$ cresce indefinidamente quando x tende a 2 por valores maiores do que 2, escrevemos

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Façamos agora x aproximar-se de 2 pela esquerda; consideraremos os valores de x iguais a 1, 1,5, 1,75, 1,9, 1,99 e 1,999 e usaremos uma calculadora para obter os valores correspondentes de $f(x)$ que aparecem na Tabela 2. Você vê intuitivamente, dessa tabela, que à medida que x aproxima-se de 2 por valores menores do que 2, $f(x)$ cresce sem limites e escrevemos

Tabela 2

x	$f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$
1	3
1,5	12
1,75	48
1,9	300
1,99	30.000
1,999	3.000.000

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Assim sendo, quando x tende a 2 pela direita ou pela esquerda, $f(x)$ cresce sem limites e escrevemos

$$\lim_{x\to 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty$$

Dos dados apresentados nas Tabelas 1 e 2 obtemos o esboço do gráfico de f mostrado na Figura 1. Observe que ambos os "ramos" da curva aproximam-se da reta pontilhada $x = 2$, quando x cresce indefinidamente. Essa reta pontilhada é chamada de *assíntota vertical* e será definida mais adiante, nesta secção.

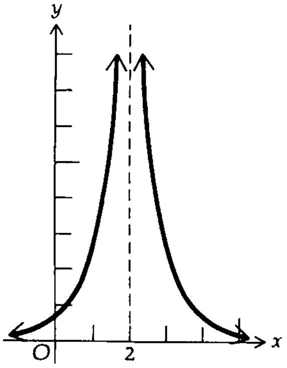


FIGURA 1

Apresentaremos agora a definição formal de *valores funcionais que crescem indefinidamente.*

2.4.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em todo número de um intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no próprio a. **Quando x tende a a, $f(x)$ cresce indefinidamente** e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \tag{1}$$

se para qualquer número $N > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) > N$$

Outra maneira de dar a Definição 2.4.1 é a seguinte: "Os valores funcionais de $f(x)$ crescem indefinidamente quando x tende a um número a, se $f(x)$ puder se tornar tão grande quanto desejarmos (isto é, maior do que qualquer número positivo N) para todos os valores de x suficientemente próximos de a, mas não iguais a a."

Devemos enfatizar novamente que $+\infty$ não é o símbolo de um número real; logo, ao escrevermos $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, isto não tem o mesmo significado que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, onde L é um número real. A igualdade (1) pode ser lida como "o limite de $f(x)$ quando x tende a a é infinito positivo". Em tal caso, o limite não existe, mas o símbolo $+\infty$ indica o comportamento dos valores funcionais $f(x)$ quando x aproxima-se cada vez mais de a.

Analogamente, podemos indicar o comportamento de uma função cujos valores funcionais decrescem indefinidamente. Para tanto, consideremos a função g definida pela igualdade

$$g(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

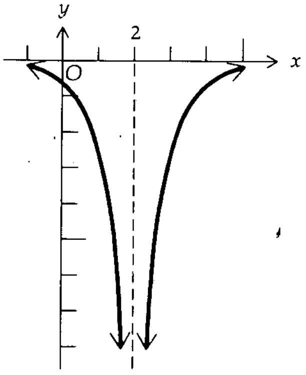


FIGURA 2

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 2.

Os valores funcionais dados por $g(x) = -3/(x-2)^2$ são os negativos dos valores dados por $f(x) = 3/(x-2)^2$. Assim, para a função g, quando x tende a 2, pela direita ou pela esquerda, $g(x)$ decresce indefinidamente e escrevemos

$$\lim_{x \to 2} \frac{-3}{(x-2)^2} = -\infty$$

2.4.2 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em todo número de algum intervalo I contendo a, exceto possivelmente no próprio a. **Quando x tende a a, $f(x)$ decresce indefinidamente** e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

se para todo número $N < 0$, existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) < N$$

Nota: A igualdade (2) pode ser lida como "o limite de $f(x)$ quando x tende a a é infinito negativo", observando novamente que o limite não existe e que o símbolo $-\infty$ indica somente o comportamento dos valores funcionais quando x tende a a.

Podemos considerar limites laterais "infinitos". Especificando, $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, se f estiver definida em todo número de algum intervalo aberto (a, c) e se para todo número $N > 0$ existir em $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < x - a < \delta \text{ então } f(x) > N$$

Definições análogas podem ser dadas para $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Suponha, agora, que h seja a função definida pela igualdade

$$h(x) = \frac{2x}{x-1} \tag{3}$$

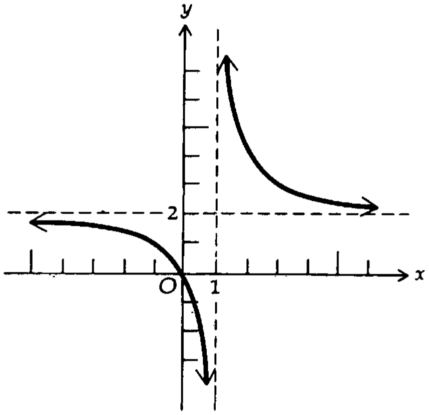


FIGURA 3

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 3. Observando as Figuras 1, 2 e 3, note a diferença entre o comportamento da função cujo gráfico está esboçado na Figura 3 e o das funções das duas outras figuras. Observe que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty \tag{4}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty \tag{5}$$

Isto é, para a função definida por (3), à medida que x se aproxima de 1 por valores menores do que 1, a função decresce indefinidamente e, à medida que x se aproxima de 1 por valores maiores do que 1, os valores funcionais crescem indefinidamente.

Antes de dar alguns exemplos, precisamos de dois teoremas que tratam de limites "infinitos".

2.4.3 TEOREMA DE LIMITE 11

Se r for um inteiro positivo qualquer, então

(i) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$

(ii) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{se } r \text{ for ímpar} \\ +\infty & \text{se } r \text{ for par} \end{cases}$

Prova Vamos demonstrar a parte (i). A prova da parte (ii) é análoga e será deixada como exercício (veja o Exercício 45). Precisamos mostrar que para todo $N > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < x < \delta \text{ então } \frac{1}{x^r} > N$$

ou, equivalentemente, como $x > 0$ e $N > 0$,

$$\text{se } 0 < x < \delta \text{ então } x^r < \frac{1}{N}$$

ou, equivalentemente, como $r > 0$,

$$\text{se } 0 < x < \delta \text{ então } x < \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$$

A afirmativa acima é válida se $\delta = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$. Assim sendo, quando $\delta = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$

$$\text{se } 0 < x < \delta \text{ então } \frac{1}{x^r} > N$$

■

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Do Teorema de Limite 11(i) segue que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

Do Teorema de Limite 11(ii)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$$ ◀

O Teorema de Limite 12, a seguir, trata do limite de uma função racional para a qual o limite do denominador é 0 e o limite do numerador é uma constante não-nula. Tal situação ocorre em (4) e (5).

2.4.4 TEOREMA DE LIMITE 12

Se a for um número real qualquer e se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, onde c é uma constante não-nula, então

(i) se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(ii) se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iii) se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$$

(iv) se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

O teorema também será válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Prova Provaremos a parte (i) e deixaremos as demonstrações das outras partes como exercícios (veja os Exercícios 46-48).

Para provar que

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

precisamos mostrar que para todo $N > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad \frac{g(x)}{f(x)} > N \tag{6}$$

Como $\lim_{x\to a} g(x) = c > 0$, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}c$ na Definição 2.1.1, segue que existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{então} \quad |g(x) - c| < \tfrac{1}{2}c$$

Aplicando o Teorema 1.1.10 à desigualdade da página anterior, segue que existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } -\tfrac{1}{2}c < g(x) - c < \tfrac{1}{2}c$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } \tfrac{1}{2}c < g(x) < \tfrac{3}{2}c$$

Assim, existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } g(x) > \tfrac{1}{2}c \tag{7}$$

Agora, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Assim, para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } |f(x)| < \epsilon$$

Como $f(x)$ está se aproximando de zero por valores positivos de $f(x)$, as barras de valor absoluto em $f(x)$ podem ser removidas; assim, para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } 0 < f(x) < \epsilon \tag{8}$$

Das afirmações (7) e (8), podemos concluir que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ e um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } \frac{g(x)}{f(x)} > \frac{\frac{1}{2}c}{\epsilon}$$

Logo, se $\epsilon = c/(2N)$ e $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ então

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } \frac{g(x)}{f(x)} > \frac{\frac{1}{2}c}{c/(2N)} = N$$

que é a afirmativa (6). Assim sendo, a parte (i) está provada. ■

Aplicando o Teorema de Limite 12, podemos freqüentemente obter uma indicação de que o resultado será $+\infty$ ou $-\infty$, tomando um *valor adequado* de x próximo de a para nos assegurarmos de que o quociente é positivo ou negativo, conforme mostra a ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Em (4) tínhamos

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x - 1}$$

O Teorema de Limite 12 é aplicável, pois $\lim\limits_{x \to 1^-} 2x = 2$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1) = 0$. Queremos determinar se temos $+\infty$ ou $-\infty$. Como $x \to 1^-$, vamos tomar um valor de x próximo e menor do que 1; por exemplo, seja $x = 0{,}9$. Então

$$\frac{2x}{x - 1} = \frac{2(0{,}9)}{0{,}9 - 1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x - 1} = -18$$

O quociente negativo leva-nos a suspeitar que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x - 1} = -\infty$$

Esse resultado segue da parte (ii) do Teorema de Limite 12, pois quando $x \to 1^-$, $x - 1$ está tendendo a 0 por valores negativos.

Para o limite em (5), como $x \to 1^+$, vamos tomar $x = 1{,}1$. Então

$$\frac{2x}{x-1} = \frac{2(1{,}1)}{1{,}1-1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} = 22$$

Como o quociente é positivo, suspeitamos que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty$$

Esse resultado segue da parte (i) do Teorema de Limite 12, pois quando $x \to 1^+$, $x - 1$ está tendendo a 0 por valores positivos. ◀

Ao usar o procedimento descrito na Ilustração 2, certifique-se de que os valores escolhidos de x estejam suficientemente próximos de a para obter o verdadeiro comportamento do quociente. Por exemplo, ao calcular $\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x-1}$, o valor de x escolhido deve ser não somente menor do que 1, mas também maior do que 0.

EXEMPLO 1 Ache

(a) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$ (b) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$

Solução

(a) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2+x+2}{(x-3)(x+1)}$

O limite do numerador é 14, o que pode ser facilmente verificado.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3^+} (x-3)(x+1) &= \lim_{x \to 3^+} (x-3) \cdot \lim_{x \to 3^+} (x+1)\\ &= 0 \cdot 4\\ &= 0\end{aligned}$$

O limite do denominador é 0 e ele está tendendo a 0 por valores positivos. Então, do Teorema de Limite 12(i),

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3} = +\infty$$

(b) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2+x+2}{(x-3)(x+1)}$

Como na parte (a), o limite do numerador é 14.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3^-} (x-3)(x+1) &= \lim_{x \to 3^-} (x-3) \cdot \lim_{x \to 3^-} (x+1)\\ &= 0 \cdot 4\\ &= 0\end{aligned}$$

Nesse caso, o limite do denominador é 0, mas ele está tendendo a 0 por valores negativos. Do Teorema de Limite 12(ii),

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3} = -\infty$$

EXEMPLO 2 Ache

(a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ (b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

Solução

(a) Como $x \to 2^+$, $x - 2 > 0$; então $x - 2 = \sqrt{(x-2)^2}$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{(x-2)^2}} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}\end{aligned}$$

O limite do numerador é 2. O limite do denominador é 0 e ele está tendendo a 0 por valores positivos. Logo, do Teorema de Limite 12(i), segue que

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = +\infty$$

(b) Como $x \to 2^-$, $x - 2 < 0$; então $x - 2 = -\sqrt{(2-x)^2}$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}\sqrt{2-x}} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}}\end{aligned}$$

O limite do numerador é 2. O limite do denominador é 0 e ele está tendendo a 0 por valores negativos. Logo, pelo Teorema de Limite 12(ii),

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = -\infty$$

EXEMPLO 3 Ache

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{[\![x]\!] - 4}{x-4}$$

Solução $\lim\limits_{x \to 4^-} [\![x]\!] = 3$. Logo, $\lim\limits_{x \to 4^-} ([\![x]\!] - 4) = 1$. Além disso, $\lim\limits_{x \to 4^-} (x - 4) = 0$ e $x - 4$ tende a 0 por valores negativos. Assim, do Teorema de Limite 12(iv),

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{[\![x]\!] - 4}{x-4} = +\infty$$

Lembre-se de que como $+\infty$ e $-\infty$ não são símbolos de números reais, os Teoremas de Limite 1 – 10 da Secção 2.2 não são válidos para limites "infinitos". Mas existem propriedades referentes a tais limites, que serão dadas a seguir. As demonstrações serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 49-51).

2.4.5 TEOREMA

(i) se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, onde c é uma constante qualquer, então $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

(ii) se $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, onde c é uma constante qualquer, então $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = -\infty$

O teorema continua válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Como $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ e $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$, segue do Teorema 2.4.5(i) que

$$\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right] = +\infty$$ ◀

2.4.6 TEOREMA

Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, onde c é uma constante não-nula, então

(i) se $c > 0$, $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = +\infty$;

(ii) se $c < 0$, $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty$.

O teorema continua válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

▶ **ILUSTRAÇÃO 4**

$$\lim_{x\to 3}\frac{5}{(x-3)^2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 3}\frac{x+4}{x-4} = -7$$

Logo, pelo Teorema 2.4.6 (ii),

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{5}{(x-3)^2}\cdot\frac{x+4}{x-4}\right] = -\infty$$ ◀

2.4.7 TEOREMA

Se $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, onde c é uma constante não-nula, então

(i) se $c > 0$, $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty$;

(ii) se $c < 0$, $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = +\infty$.

O teorema permanecerá válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

ILUSTRAÇÃO 5 No Exemplo 2(b) mostramos que

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = -\infty$$

Além disso

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x+2}=-\frac{1}{4}$$

Assim, do Teorema 2.4.7 (ii), segue que

$$\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}\cdot\frac{x-3}{x+2}\right]=+\infty$$ ◀

Os limites infinitos são aplicados para encontrarmos *assíntotas verticais* de um gráfico, se elas existirem. Veja a Figura 4 que mostra um esboço do gráfico da função definida por

$$f(x)=\frac{1}{(x-a)^2} \tag{9}$$

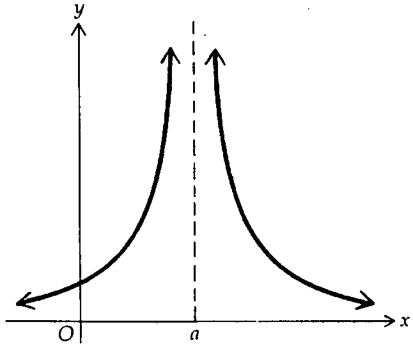


FIGURA 4

Qualquer reta paralela e acima do eixo x interceptará esse gráfico em dois pontos: um ponto à esquerda da reta $x = a$ e outro à sua direita. Assim, para todo $k > 0$, não importa quão grande, a reta $y = k$ interceptará o gráfico de f em dois pontos; a distância desses pontos à reta $x = a$ torna-se cada vez menor, à medida que k é tomado cada vez maior. A reta $x = a$ é chamada de *assíntota vertical* do gráfico de f.

2.4.8 DEFINIÇÃO A reta $x = a$ será uma **assíntota vertical** do gráfico da função f, se pelo menos uma das afirmativas for verdadeira:

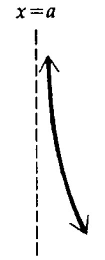
(i) $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

(ii) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

(iii) $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

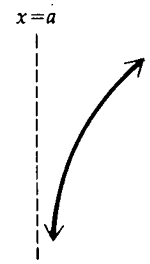
(iv) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Cada uma das Figuras de 5 a 8 mostra parte do gráfico de uma função para a qual a reta $x = a$ é uma assíntota vertical. Na Figura 5 a parte (i) da Definição 2.4.8 se aplica; na Figura 6 aplica-se a parte (ii) e nas Figuras 7 e 8 aplicam-se as partes (iii) e (iv), respectivamente. ◀



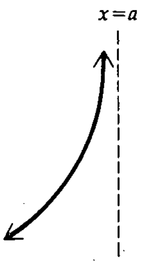
$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

FIGURA 5



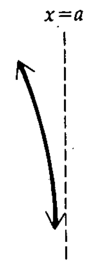
$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

FIGURA 6



$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

FIGURA 7



$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

FIGURA 8

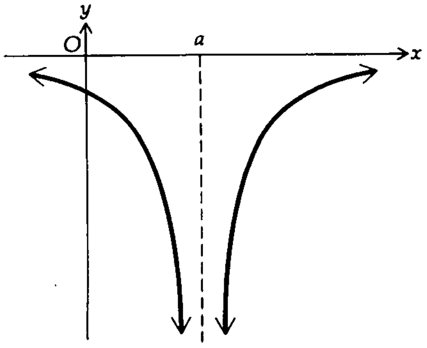


FIGURA 9

Para a função definida por (9), ambas as partes (i) e (iii) da definição acima são verdadeiras. Veja a Figura 4 se g for a função definida por

$$g(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}$$

então ambas as partes (ii) e (iv) serão verdadeiras e a reta $x = a$ será uma assíntota vertical do gráfico de g. Isso é ilustrado pela Figura 9.

EXEMPLO 4 Ache a assíntota vertical e faça um esboço do gráfico da função definida

$$f(x) = \frac{3}{x-3}$$

Solução

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{3}{x-3} = +\infty \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{3}{x-3} = -\infty$$

Segue, da Definição 2.4.8, que a reta $x = 3$ é uma assíntota vertical do gráfico de f, cujo esboço está na Figura 10.

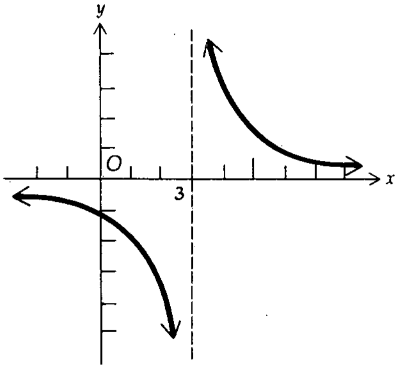


FIGURA 10

EXERCÍCIOS 2.4

Nos Exercícios de 1 a 12, faça o seguinte: (a) use uma calculadora para tabular valores de f(x) para valores fixados de x e, a partir deles, faça uma afirmação a respeito do comportamento evidente de f(x). (b) Ache o limite indicado.

1. (a) $f(x) = \frac{1}{x-5}$; x é 6, 5,5, 5,1, 5,01, 5,001, 5,0001; (b) $\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{x-5}$

2. (a) $f(x) = \frac{1}{x-5}$; x é 4, 4,5, 4,9, 4,99, 4,999, 4,9999; (b) $\lim_{x \to 5^-} \frac{1}{x-5}$

3. (a) $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$; x é 6, 5,5, 5,1, 5,01, 5,001, 5,0001 e x é 4, 4,5, 4,9, 4,99, 4,999, 4,9999; (b) $\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^2}$

4. (a) $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$; x é 0, 0,5, 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999; (b) $\lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{1-x}$

5. (a) $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$; x é 2, 1,5, 1,1, 1,01, 1,001, 1,0001; (b) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{1-x}$

6. (a) $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2}$; x 0, 0,5, 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999 e x é 2, 1,5, 1,1, 1,01, 1,001, 1,0001; (b) $\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}$

7. (a) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$; x é 0, −0,5, −0,9, −0,99, −0,999, −0,9999; (b) $\lim_{x \to -1^+} \frac{x-2}{x+1}$

8. (a) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$; x é −2, −1,5, −1,1, −1,01, −1,001, −1,0001; (b) $\lim_{x \to -1^-} \frac{x-2}{x+1}$

9. (a) $f(x) = \frac{x}{x+4}$; x é −5, −4,5, −4,1, −4,01, −4,001, −4,0001; (b) $\lim_{x \to -4^-} \frac{x}{x+4}$

10. (a) $f(x) = \frac{x}{x-4}$; x é 5, 4,5, 4,1, 4,01, 4,001, 4,0001; (b) $\lim_{x \to 4^+} \frac{x}{x-4}$

11. (a) $f(x) = \frac{4x}{9-x^2}$; x é −4, −3,5, −3,1, −3,01, −3,001, −3,0001; (b) $\lim_{x \to -3^-} \frac{4x}{9-x^2}$

12. (a) $f(x) = \dfrac{4x^2}{9 - x^2}$; x é 4, 3,5, 3,1, 3,01, 3,001, 3,0001;
(b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{4x^2}{9 - x^2}$

Nos Exercícios de 13 a 32, ache o limite.

13. $\lim\limits_{t \to 2^+} \dfrac{t + 2}{t^2 - 4}$

14. $\lim\limits_{t \to 2^-} \dfrac{-t + 2}{(t - 2)^2}$

15. $\lim\limits_{t \to 2^-} \dfrac{t + 2}{t^2 - 4}$

16. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{3 + x^2}}{x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{3 + x^2}}{x}$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3 + x^2}}{x^2}$

19. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3}$

20. $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{x - 4}$

21. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

22. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 3}{x^3 + x^2}$

23. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2 - 4x^3}{5x^2 + 3x^3}$

24. $\lim\limits_{s \to 2^-} \left(\dfrac{1}{s - 2} - \dfrac{3}{s^2 - 4}\right)$

25. $\lim\limits_{t \to -4^-} \left(\dfrac{2}{t^2 + 3t - 4} - \dfrac{3}{t + 4}\right)$

26. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x^3 - 5x^2}{x^2 - 1}$

27. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{[\![x]\!] - x}{3 - x}$

28. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{[\![x^2]\!] - 1}{x^2 - 1}$

29. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^3 + 9x^2 + 20x}{x^2 + x - 12}$

30. $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{6x^2 + x - 2}{2x^2 + 3x - 2}$

31. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 1}{\sqrt{2x - x^2} - 1}$

32. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x - 2}{2 - \sqrt{4x - x^2}}$

33. Para cada uma das funções a seguir, ache a assíntota vertical do gráfico e faça um esboço dele:
(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$; (c) $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$; (d) $\phi(x) = \dfrac{1}{x^4}$.

34. Para cada uma das funções a seguir, ache a assíntota vertical do gráfico e faça um esboço dele:
(a) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$; (b) $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; (c) $h(x) = -\dfrac{1}{x^3}$;
(d) $\phi(x) = -\dfrac{1}{x^4}$.

Nos Exercícios de 35 a 42, ache a(s) assíntota(s) vertical(is) do gráfico da função e faça um esboço dele.

35. $f(x) = \dfrac{2}{x - 4}$

36. $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}$

37. $f(x) = \dfrac{-2}{x + 3}$

38. $f(x) = \dfrac{-4}{x - 5}$

39. $f(x) = \dfrac{-2}{(x + 3)^2}$

40. $f(x) = \dfrac{4}{(x - 5)^2}$

41. $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 8x + 15}$

42. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x - 6}$

43. Prove que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{(x - 2)^2} = +\infty$, usando a Definição 2.4.1.

44. Prove que $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{-2}{(x - 4)^2} = -\infty$, usando a Definição 2.4.2.

45. Prove o Teorema 2.4.3 (ii).

46. Prove o Teorema 2.4.4 (ii).

47. Prove o Teorema 2.4.4 (iii).

48. Prove o Teorema 2.4.4 (iv).

49. Prove o Teorema 2.4.5.

50. Prove o Teorema 2.4.6.

51. Prove o Teorema 2.4.7.

52. Use a Definição 2.4.1 para provar que $\lim\limits_{x \to -3} \left|\dfrac{5 - x}{3 + x}\right| = +\infty$.

2.5 LIMITES NO INIFINITO

A secção anterior foi dedicada a limites infinitos onde os valores funcionais aumentavam ou diminuíam indefinidamente, enquanto a variável independente aproximava-se de um número real. Agora vamos considerar limites de funções, quando a variável independente cresce ou diminui indefinidamente. Começaremos com a função definida por

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

Atribuímos a x os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000 e assim por diante, permitindo que aumente indefinidamente. Os valores funcionais correspondentes, exatos ou aproximados, encontrados com o uso de uma calculadora com seis casas, são dados na Tabela 1. Observe na tabela que quando x cresce, tomando valores positivos, os valores funcionais aproximam-se de 2.

Tabela 1

x	$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$
0	0
1	1
2	1,6
3	1,8
4	1,882353
5	1,923077
10	1,980198
100	1,999800
1000	1,999998

Em particular, quando $x = 4$.

$$2 - \frac{2x^2}{x^2+1} = 2 - 1{,}882353$$
$$= 0{,}117647$$

Logo, a diferença entre 2 e $f(x)$ é 0,117647, quando $x = 4$. Para $x = 100$,

$$2 - \frac{2x^2}{x^2+1} = 2 - 1{,}999800$$
$$= 0{,}000200$$

Assim, a diferença entre 2 e $f(x)$ é 0,000200, quando $x = 100$.

Continuando, vemos intuitivamente que o valor de $f(x)$ pode ser obtido tão próximo de 2 quanto desejarmos, escolhendo x suficientemente grande. Em outras palavras, podemos obter uma diferença entre 2 e $f(x)$ tão pequena quanto desejarmos escolhendo x como qualquer número maior do que algum número positivo suficientemente grande. Ou, avançando um pouco, para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, podemos encontrar um número $N > 0$, tal que se $x > N$, então $|f(x) - 2| < \epsilon$.

Quando uma variável independente x for crescente indefinidamente, através de valores positivos, escrevemos "$x \to +\infty$". Do exemplo acima, então, podemos dizer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$$

2.5.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em um intervalo $(a, +\infty)$ o **limite de $f(x)$ quando x cresce indefinidamente, é L,** escrito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, existir um número $N > 0$ tal que

se $x > N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$

Nota: Quando escrevemos $x \to +\infty$, isto não tem o mesmo significado que, por exemplo, $x \to 1000$. O símbolo $x \to +\infty$ indica o comportamento da variável x tal como definido acima.

Vamos considerar a mesma função e atribuir a x os valores -1, -2, -3, -4, -5, -10, -100, -1000, e assim por diante, permitindo que x decresça através de valores negativos indefinidamente. A Tabela 2 dá os valores correspondentes de $f(x)$.

Observe que os valores funcionais para os números negativos são os mesmos que aqueles para os números positivos correspondentes. Assim, vemos intuitivamente que quando x decresce indefinidamente, $f(x)$ tende a 2; isto é, $|f(x) - 2|$ pode ser obtido tão pequeno quanto desejarmos, escolhendo x como qualquer número menor do que algum número negativo tendo um valor absoluto suficientemente grande. Formalmente, dizemos que para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, podemos encontrar um número $N < 0$ tal que se $x < N$, então $|f(x) - 2| < \epsilon$. Usando o símbolo $x \to -\infty$ para mostrar que a variável x de-

Tabela 2

x	$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$
-1	1
-2	1,6
-3	1,8
-4	1,882353
-5	1,923077
-10	1,980198
-100	1,999800
-1000	1,999998

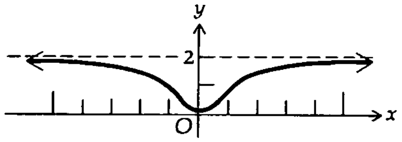


FIGURA 1

cresce indefinidamente, escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$$

A Figura 1 mostra um esboço do gráfico de nossa função. A reta $x = 2$ aparece como uma linha pontilhada, chamada *assíntota horizontal*, que definiremos mais adiante, nesta secção.

2.5.2 DEFINIÇÃO

Seja f uma função que está definida em um intervalo $(-\infty, a)$. O **limite de $f(x)$ quando x decresce indefinidamente é L**, notado por

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, existir um número $N < 0$ tal que

se $x < N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$

Nota: como na nota seguindo a Definição 2.5.1, o símbolo $x \to -\infty$ indica somente o comportamento da variável x.

Os Teoremas de Limite 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 da Secção 2. 2, bem como os Teoremas de Limite 11 e 12 da Secção 2.4, permanecem inalterados quando substituímos "$x \to a$" por "$x \to +\infty$" ou "$x \to -\infty$". Temos ainda os teoremas adicionais enunciados a seguir:

2.5.3 TEOREMA DE LIMITE 13

Se r for um inteiro positivo qualquer, então

(i) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

(ii) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Prova de (i) Para demonstrar a parte (i), precisamos mostrar que a Definição 2.5.1 é válida para $f(x) = 1/x^r$ e $L = 0$; isto é, precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um número N tal que

$$\text{se } x > N \text{ então } \left|\frac{1}{x^r} - 0\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } x > N \text{ então } |x|^r > \frac{1}{\epsilon}$$

ou, equivalentemente, como $r > 0$,

$$\text{se } x > N \text{ então } |x| > \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/r}$$

Para que isso seja válido, tomamos $N = (1/\epsilon)^{1/r}$. Assim

$$\text{se } N = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/r} \text{ e } x > N \text{ então } \left|\frac{1}{x^r} - 0\right| < \epsilon$$

Isto prova a parte (i). ■

A demonstração da parte (ii) é análoga e será deixada como um exercício (veja o Exercício 66).

EXEMPLO 1 Ache

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 3}{2x + 5}$$

Solução Para usar o Teorema de Limite 13, vamos dividir o numerador e o denominador por x, obtendo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 3}{2x + 5} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - \dfrac{3}{x}}{2 + \dfrac{5}{x}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \lim\limits_{x \to +\infty} 3 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \lim\limits_{x \to +\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}} \\
&= \frac{4 - 3 \cdot 0}{2 + 5 \cdot 0} \\
&= 2
\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Ache

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$$

Solução Para usar o Teorema de Limite 13, dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x que ocorre neles; neste caso, x^3.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{5}{x^3}}{4 - \dfrac{1}{x^3}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} 2 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} - \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} + \lim\limits_{x \to -\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x \to -\infty} 4 - \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3}} \\
&= \frac{2 \cdot 0 - 0 + 5 \cdot 0}{4 - 0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Ache

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$$

Solução Como a maior potência de x é 2 e ela aparece sob o radical, dividimos o numerador e o denominador por $\sqrt{x^2}$, que é $|x|$. Temos, então,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{3x}{\sqrt{x^2}} + \dfrac{4}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{\sqrt{2x^2-5}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{3x}{|x|} + \dfrac{4}{|x|}}{\sqrt{2 - \dfrac{5}{x^2}}}$$

Como $x \to +\infty$, $x > 0$; então $|x| = x$. Assim temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{3x}{x} + \dfrac{4}{x}}{\sqrt{2 - \dfrac{5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \lim\limits_{x \to +\infty} 4 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \lim\limits_{x \to +\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{3 + 4 \cdot 0}{\sqrt{2 - 5 \cdot 0}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

EXEMPLO 4 Ache

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$$

Solução A função é igual a do Exemplo 3. Novamente, começamos por dividir o numerador e o denominador por $\sqrt{x^2}$ ou, equivalentemente, $|x|$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{3x}{|x|} + \dfrac{4}{|x|}}{\sqrt{2 - \dfrac{5}{x^2}}}$$

Como $x \to -\infty$, $x < 0$; portanto $|x| = -x$. Temos, então,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{3x}{-x} + \dfrac{4}{-x}}{\sqrt{2 - \dfrac{5}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty}(-3) - \lim\limits_{x \to -\infty} 4 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} 2 - \lim\limits_{x \to -\infty} 5 \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{-3 - 4 \cdot 0}{\sqrt{2 - 5 \cdot 0}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

O limite "infinito" para valores da função quando a variável independente se aproxima do infinito também pode ser considerado por meio das seguintes definições formais:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Por exemplo, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se a função f estiver definida em algum intervalo $(a, +\infty)$ e se para todo $N > 0$ existir um $M > 0$ tal que se $x > M$ então $f(x) > N$. As demais definições serão deixadas como exercícios (veja o Exercício 63).

EXEMPLO 5 Ache

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1}$$

Solução Dividimos o numerador e o denominador por x^2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

Calculando o limite do denominador, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

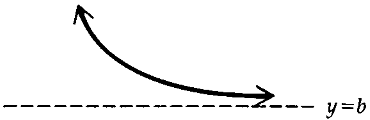
Logo, o limite do denominador é 0, e o denominador tende a 0 por valores positivos.

O limite do numerador é 1, e assim, pelo Teorema de Limite 12 (i) (2.4.4), segue que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

EXEMPLO 6 Ache

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5}$$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

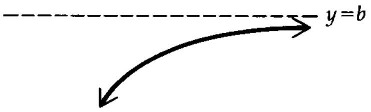
FIGURA 2

Solução

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

Os limites do numerador e do denominador serão considerados separadamente.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} - 1\right) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \to +\infty} 1 \\ &= 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x^2} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

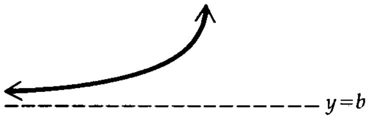


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

FIGURA 3

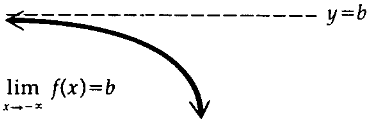
Assim sendo, temos o limite de um quociente no qual o limite do numerador é -1 e o limite do denominador é 0, onde o denominador está tendendo a zero por valores positivos. Pelo Teorema de Limite 12 (iii) segue que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = -\infty$$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

FIGURA 4



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

FIGURA 5

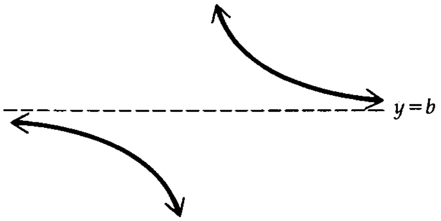
Na secção anterior discutimos assíntotas verticais de um gráfico como uma aplicação de limites infinitos. As *assíntotas horizontais* de um gráfico fornecem uma aplicação de limites no infinito uma assíntota horizontal é uma reta paralela ao eixo x, e a seguir temos uma definição formal.

2.5.4 DEFINIÇÃO

A reta $y = b$ é denominada uma **assíntota horizontal** do gráfico da função f se pelo menos uma das seguintes afirmações for válida:

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ e para um número N, se $x > N$, então $f(x) \neq b$;

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ e para um número N, se $x < N$, então $f(x) \neq b$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

e

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

FIGURA 6

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Em cada uma das figuras, de 2 a 5, há uma parte do gráfico de uma função para a qual a reta $y = b$ é uma assíntota horizontal. Nas Figuras 2 e 3, a parte (i) da Definição 2.5.4 se aplica, e nas Figuras 4 e 5 a parte (ii) é verdadeira. Ambas as parte (i) e (ii) são verificadas para a função cujo gráfico aparece na Figura 6. ◀

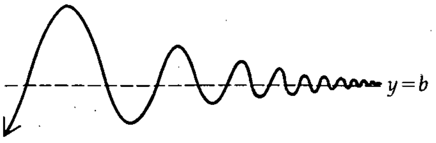


FIGURA 7

Na Figura 7 há um esboço do gráfico de uma função f para a qual $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, mas não existe um número N tal que se $x > N$, então $f(x) \neq b$. Conseqüentemente, a reta $y = b$ não é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Um exemplo de tal função aparece no Exercício 59 dos Exercícios 7.5

EXEMPLO 7 Ache as assíntotas horizontais e faça um esboço do gráfico da função definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Solução Primeiro considere $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Dividimos o numerador e o denominador por $\sqrt{x^2}$ ou, equivalentemente, por $|x|$ e obtemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

Como $x \to +\infty$, $x > 0$; logo $|x| = x$. Assim

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to +\infty} 1}{\sqrt{\lim_{x \to +\infty} 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}}$$

$$= 1$$

Logo, pela Definição 2.5.4 (i), a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Considere, agora, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Novamente, dividimos o numerador e o denominador por $\sqrt{x^2}$, que é $|x|$; como $x \to -\infty$, $x < 0$ e assim $|x| = -x$. Temos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{x}{-x}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -\infty} (-1)}{\sqrt{\lim_{x \to -\infty} 1 + \lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+0}}$$

$$= -1$$

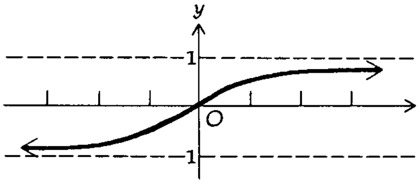


FIGURA 8

Assim, de acordo com a Definição 2.5.4 (ii), a reta $y = -1$ é uma assíntota horizontal. Um esboço do gráfico está na Figura 8.

EXEMPLO 8 Ache as assíntotas vertical e horizontal e faça um esboço do gráfico da equação

$$xy^2 - 2y^2 - 4x = 0$$

Solução Resolvendo em y a equação dada, obtemos

$$y = \pm 2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

Essa equação define duas funções:

$$y = f_1(x), \text{ onde } f_1 \text{ é definida por } f_1(x) = +2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

e

$$y = f_2(x), \text{ onde } f_2 \text{ é definida por } f_2(x) = -2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

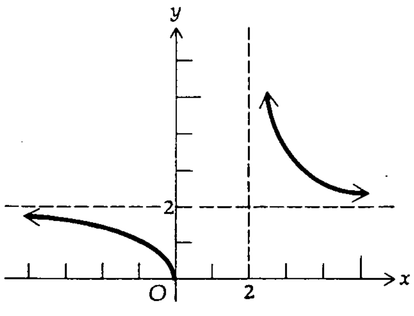


FIGURA 9

O gráfico da equação dada é composto pelos gráficos de duas funções, f_1 e f_2. Os domínios das duas funções consistem naqueles valores de x para os quais $x/(x-2) \geqslant 0$. Usando o resultado do Exemplo 8 da Secção 1.5 e excluindo $x = 2$, vemos que o domínio de f_1 e f_2 é $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$.

Consideremos agora f_1. Como

$$\lim_{x \to 2^+} f_1(x) = \lim_{x \to 2^+} 2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

$$= +\infty$$

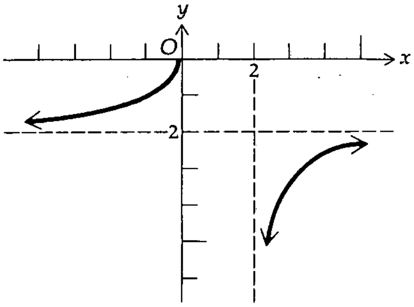


FIGURA 10

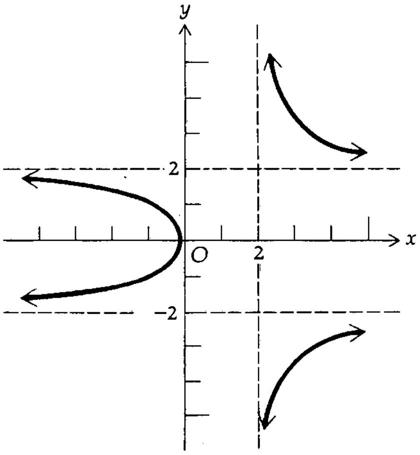


FIGURA 11

pela Definição 2.4.8 (i), a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico de f_1

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}$$
$$= 2$$

Assim, pela Definição 2.5.4 (i), a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f_1.

Do mesmo modo, $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 2$. Um esboço do gráfico de f_1 está na Figura 9.

$$\lim_{x\to2^+} f_2(x) = \lim_{x\to2^+}\left[-2\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right]$$
$$= -\infty$$

Logo, para Definição 2.4.8 (ii), a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico de f_2.

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[-2\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}\right]$$
$$= -2$$

Assim, pela Definição 2.5.4 (i), a reta $y = -2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f_2.

Também $\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = -2$. Um esboço do gráfico de f_2 está na Figura 10.

O gráfico da equação dada é a união dos gráficos de f_1 e f_2 e um esboço está na Figura 11.

EXERCÍCIOS 2.5

Nos Exercícios de 1 a 10, faça o seguinte: Use uma calculadora para tabular os valores de $f(x)$ para valores fixados de x. (a) Do que $f(x)$ parece estar se aproximando, enquanto x cresce indefinidamente? (b) Do que $f(x)$ parece estar se aproximando enquanto x decresce indefinidamente? (c) Ache $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (d) Ache $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

1. $f(x) = \frac{4}{x^2}$; x é 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.

2. $f(x) = \frac{3}{x^4}$; x é 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2 -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.

3. $f(x) = \frac{1}{x^3}$; x é 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.

4. $f(x) = -\frac{2}{x^3}$; x é 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.

5. $f(x) = -\frac{3x^2}{x^2+1}$; x é 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -1, -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1.000.

6. $f(x) = \frac{x^3}{x^3+2}$; x é 2, 4, 6, 8, 10, 100, 1.000 e x é -2, -4, -6, -8, -10, -100, -1000.

7. $f(x) = \frac{4x+1}{2x-1}$; x é 2, 6, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e x é -2, -6, -10, -100, -1.000, -10.000, -100.000.

8. $f(x) = \frac{5x-3}{10x+1}$; x é 2, 6, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e x é -2, -6, -10, -100, -1.000, -10.000, -100.000.

9. $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$; x é 2, 6, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e x é -2, -6, -10, -100, -1000, -10.000, -100.000.

10. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$; x é 2, 6, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e x é -2, -6, -10, -100, -1000, -10.000, -100.000.

Nos Exercícios de 11 a 30, ache o limite.

11. $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{2t+1}{5t-2}$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x-4}{3x+1}$

13. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+7}{4-5x}$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+5x}{2-3x}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^2-2x+1}{3x^2+8x+5}$

16. $\lim\limits_{s\to-\infty} \dfrac{4s^2+3}{2s^2-1}$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+4}{3x^2-5}$

18. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5}{x^3}$

19. $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{2y^2-3y}{y+1}$

20. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+5}{7x^3+x+1}$

21. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2}$

22. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^4-7x^2+2}{2x^4+1}$

23. $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{2y^3-4}{5y+3}$

24. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3-12x+7}{4x^2-1}$

25. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x+\dfrac{1}{x^2}\right)$

26. $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\dfrac{2}{t^2}-4t\right)$

27. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$

28. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$

29. $\lim\limits_{w\to-\infty} \dfrac{\sqrt{w^2-2w+3}}{w+5}$

30. $\lim\limits_{y\to-\infty} \dfrac{\sqrt{y^4+1}}{2y^2-3}$

Nos Exercícios de 31 a 36, ache o limite (Sugestão: primeiro obtenha uma fração com um numerador racional).

31. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$

32. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$

33. $\lim\limits_{r\to+\infty} (\sqrt{3r^2+r}-2r)$

34. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+1}-x)$

35. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3+1})$

36. $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}}{\sqrt{t+1}}$

Nos Exercícios de 37 a 48, encontre as assíntotas horizontal e vertical e trace um esboço do gráfico da função.

37. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$

38. $f(x)=\dfrac{4-3x}{x+1}$

39. $g(x)=1-\dfrac{1}{x}$

40. $h(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$

41. $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

42. $F(x)=\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2+3}}$

43. $G(x)=\dfrac{4x^2}{x^2-9}$

44. $g(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$

45. $h(x)=\dfrac{2x}{6x^2+11x-10}$

46. $f(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+5x+6}}$

47. $f(x)=\dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2-2}}$

48. $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

Nos Exercícios de 49 a 56, encontre as assíntotas horizontal e vertical e faça um esboço do gráfico da equação.

49. $3xy-2x-4y-3=0$

50. $2xy+4x-3y+6=0$

51. $x^2y^2-x^2+4y^2=0$

52. $xy^2+3y^2-9x=0$

53. $(y^2-1)(x-3)=6$

54. $2xy^2+4y^2-3x=0$

55. $x^2y-2x^2-y-2=0$

56. $x^2y+4xy-x^2+x+4y-6=0$

Nos Exercícios de 57 a 60, prove que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, *aplicando a Definição 2.5.1; isto é, dado* $\epsilon>0$, *mostre que existe um número* $N>0$ tal que se $x>N$, *então* $|f(x)-1|<\epsilon$.

57. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

58. $f(x)=\dfrac{2x}{2x+3}$

59. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

60. $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$

61. Prove que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x+3}{2x-1}=4$, mostrando que para todo $\epsilon>0$ existe um número $N<0$, tal que se $x<N$ então $\left|\dfrac{8x+3}{2x-1}-4\right|<\epsilon$.

62. Prove a parte (i) do Teorema de Limite 12 (2.4.4) se "$x\to a$" for substituído por "$x\to+\infty$".

63. Dê uma definição para cada um dos seguintes:
(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$;
(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

64. Prove que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-4)=+\infty$, mostrando que para todo $N>0$ existe um $M>0$ tal que se $x>M$ tal que se $x>M$ então $x^2-4<N$.

65. Prove que $\lim\limits_{x\to+\infty} (6-x-x^2)=-\infty$ aplicando a definição do Exercício 63(a).

66. Prove a parte (ii) do Teorema de Limite 13 (2.5.3).

2.6 CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO EM UM NÚMERO

Na Ilustração 1 da Secção 23 discutimos a função C definida por

$$C(x)=\begin{cases} x & \text{se } 0\leqslant x\leqslant 10 \\ 0{,}9x & \text{se } 10<x \end{cases} \tag{1}$$

onde \$ $C(x)$ é o custo total de x quilos de um produto. Mostramos que $\lim\limits_{x\to 10} C(x)$ não existe pois $\lim\limits_{x\to 10^-} C(x)\neq\lim\limits_{x\to 10^+} C(x)$. Um esboço do gráfico de C está na Figura 1. Observe que há uma quebra no gráfico de C em $x=10$.

Afirmamos que C é *descontínua* em 10. Essa descontinuidade é causada pelo fato de $\lim\limits_{x \to 10} C(x)$ não existir. Iremos nos referir a essa função novamente na Ilustração 1.

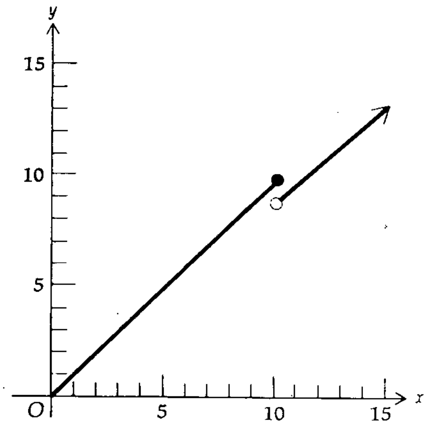


FIGURA 1

Na secção 2.1, consideramos a função f definida por

$$f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1} \qquad (2)$$

Observamos que f está definida para todos os valores de x, exceto 1. Um esboço do gráfico que consiste em todos os pontos da reta $y = 2x + 3$, exceto (1,5), está na Figura 2. Há uma quebra no gráfico, no ponto (1, 5) e afirmamos que essa função f é *descontínua* no número 1. A descontinuidade ocorre porque $f(1)$ não existe.

Se f for a função definida por (2) quando $x \neq 1$ e se definirmos $f(1) = 2$, por exemplo, a função estará definida para todos os valores de x, mas ainda existirá uma quebra no gráfico (veja a Figura 3), sendo a função descontínua em 1. Se, contudo, definirmos $f(1) = 5$, não haverá quebra no gráfico e a função será *contínua* para todos os valores de x. Temos a definição a seguir.

2.6.1 DEFINIÇÃO

Dizemos que a função f é **contínua** no número a se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe;

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em a, a função f será **descontínua** em a.

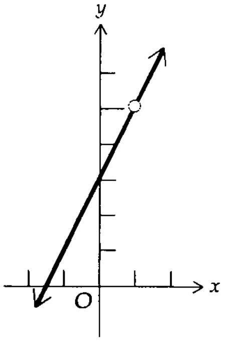


FIGURA 2

▶ ILUSTRAÇÃO 1 A função C, definida por (1), tem seu gráfico mostrado na Figura 1 como existe uma quebra no gráfico, no ponto onde $x = 10$, vamos investigar as condições da Definição 2.6.1 em 10.

Como $C(10) = 10$, a condição (i) está satisfeita.

Como $\lim\limits_{x \to a} C(x)$ não existe, a condição (ii) não está verificada em 10. Concluímos que C é descontínua em 10.

Observe que devido à descontinuidade de C, seria vantajoso aumentar o tamanho de alguns pedidos para tirar vantagem de um custo total menor. Seria insensato comprar $9\frac{1}{2}$ kg por $ 9,50 quando $10\frac{1}{2}$ kg podem ser comprados por $ 9,45. ◀

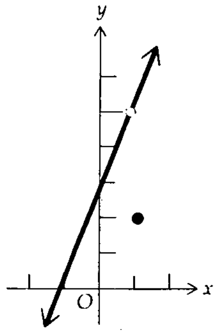


FIGURA 3

Na Ilustração 2 aparece outra situação na qual a fórmula para calcular o custo de mais do que 10 kg de um produto é diferente da fórmula para o cálculo do custo de 10 kg ou menos. Mas aqui a função custo é contínua em 10.

▶ ILUSTRAÇÃO 2 Um atacadista que vende um produto por quilo (ou fração de quilo), cobra $ 1 por quilo se o pedido for de até 10 kg. Mas se o pedido ultrapassar esse peso, ele cobrará $ 10 mais $ 0,7 por quilo excedente. Assim, se x quilos do produto forem pedidos e $C(x)$ for o custo total, então $C(x) = x$, se $0 \leqslant x \leqslant 10$ e $C(x) = 10 + 0{,}7\,(x - 10)$, se $10 < x$. Logo,

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0{,}7x + 3 & \text{se } 10 < x \end{cases}$$

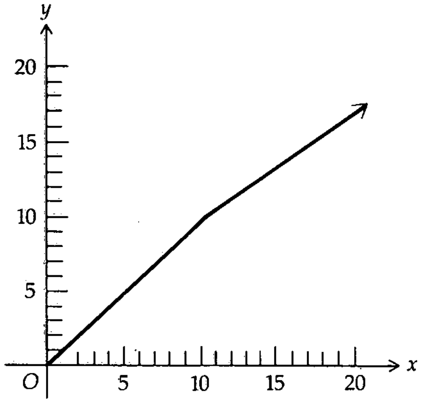


FIGURA 4

Um esboço do gráfico de C está na Figura 4. Para essa função $C(10) = 10$ e

$$\lim_{x\to 10^-} C(x) = \lim_{x\to 10^-} x \qquad \lim_{x\to 10^+} C(x) = \lim_{x\to 10^+} (0{,}7x + 3)$$
$$= 10 \qquad\qquad\qquad = 10$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 10} C(x)$ existe e é igual a $C(10)$. Assim, C é contínua em 10. ◀

Vamos considerar agora algumas ilustrações de funções descontínuas. Para cada ilustração, há um esboço do gráfico da função. Vamos determinar os pontos onde há uma quebra no gráfico e mostraremos qual das condições na definição de continuidade não é satisfeita em cada caso de descontinuidade.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 3. Observe que há uma quebra no gráfico, no ponto onde $x = 1$. Assim, vamos verificar aí as condições da Definição 2.6.1.

$f(1) = 2$; logo, a condição (i) é satisfeita.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$: logo, a condição (ii) está satisfeita.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$; mas $f(1) = 2$; logo, a condição (iii) não está satisfeita.

Assim, f é descontínua em 1. ◀

Note que se na Ilustração 3 $f(1)$ for definida como sendo 5, então $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ e f seria contínua em 1.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Seja f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Um esboço do gráfico f é dado na Figura 5. Há uma quebra no gráfico, no ponto onde $x = 2$, e assim sendo vamos examinar ai as condições da Definição 2.6.1

Como $f(2)$ não está definida, a condição (i) não é satisfeita. Logo, f é descontínua em 2. ◀

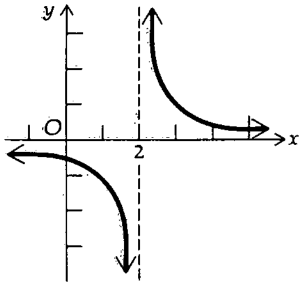


FIGURA 5

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Seja g definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

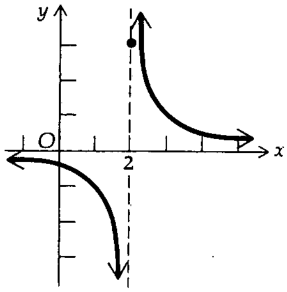


FIGURA 6

Um esboço do gráfico de g está na Figura 6. As três condições da Definição 2.6.1 serão testadas em 2.

Uma vez que $g(2) = 3$, a condição (i) é satisfeita.

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}$$

$$= -\infty \qquad\qquad\qquad = +\infty$$

Como $\lim_{x\to 2} g(x)$ não existe, a condição (ii) não é satisfeita. Logo, g é descontínua em 2. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Seja h definida por

$$h(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{se } x \leqslant 1 \\ 3 - x & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

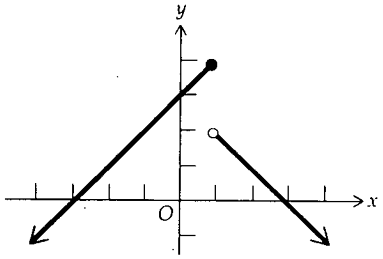


FIGURA 7

Um esboço do gráfico de h está na Figura 7. Como há uma quebra no gráfico, no ponto onde $x = 1$, investigaremos as condições da Definição 2.6.1 em 1.

Como $h(1) = 4$, a condição (i) é verificada.

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} (3 + x) \qquad \lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} (3 - x)$$

$$= 4 \qquad\qquad\qquad = 2$$

Como $\lim_{x\to 1} h(x) \neq \lim_{x\to 1} h(x)$, então $\lim_{x\to 1} h(x)$ não existe, assim sendo, a condição (ii) não é verificada em 1. Logo, h é descontínua em 1. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 7** Seja F definida por

$$F(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

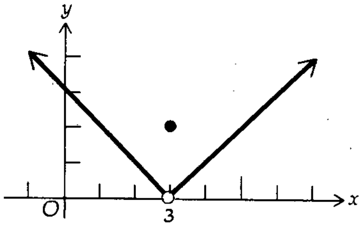


FIGURA 8

um esboço do gráfico de F aparece na Figura 8. Vamos verificar as três condições da Definição 2.6.1 no ponto $x = 3$.

Uma vez que $F(3) = 2$, a condição (i) é satisfeita.

$$\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3^-} (3 - x) \qquad \lim_{x\to 3^+} F(x) = \lim_{x\to 3^+} (x - 3)$$

$$= 0 \qquad\qquad\qquad = 0$$

Logo, $\lim_{x\to 3} F(x) = 0$ e assim a condição (ii) é verificada. O $\lim_{x\to 3} F(x) = 0$; porém, $F(3) = 2$, assim sendo, a condição (iii) não é verificada. Portanto, F é descontínua em 3. ◀

Deve estar claro que a noção geométrica de quebra em certo ponto no gráfico tem o mesmo significado do conceito de descontinuidade de uma função num certo valor da variável independente.

Seguindo a Ilustração 3 foi mencionado que se $f(1)$ tivesse sido definida como sendo 5, então f seria contínua em 1. Isso ilustra o conceito de *descontinuidade removível*. Em geral, suponha que f seja uma função descontínua em um número a, mas para a qual $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Assim, $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$ ou então $f(a)$ *não existe. Tal descontinuidade é chamada de* **descontinuidade removível,** pois se f for redefinida em a de tal forma que $f(a)$ seja igual ao $\lim_{x\to a} f(x)$, a nova função tornar-se-á contínua em a. Se a descontinuidade não for removível, ela será chamada de **descontinuidade essencial.**

EXEMPLO 1 Em cada uma das Ilustrações de 3 até 7, determine se a descontinuidade é removível ou essencial.

Solução Na Ilustração 3 a função é descontínua em 1, mas $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$. Redefinindo $f(1) = 5$, então $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$: logo descontinuidade é removível.

Na Ilustração 4 a função f é descontínua em 2; $\lim_{x \to 2} f(x)$ não existe; logo, a descontinuidade é essencial.

Na Ilustração 5, $\lim_{x \to 2} g(x)$ não existe; assim, a descontinuidade é essencial.

Na Ilustração 6 a função h é descontínua pois $\lim_{x \to 1} h(x)$ não existe; assim, de novo, a descontinuidade é essencial.

Na Ilustração 7, $\lim_{x \to 3} F(x) = 0$, mas $F(3) = 2$; assim F é descontínua em 3. Se, contudo, $F(3)$ for redefinida como sendo 0, então a função ficará contínua em 3; assim, a descontinuidade será removível.

EXEMPLO 2 A função definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

é descontínua em 4. Mostre que a descontinuidade é removível e redefina $f(4)$ de tal modo que a descontinuidade seja removida.

Solução A função f é descontínua em 4, pois $f(4)$ não existe. Se $\lim_{x \to 4} f(x)$ existir, a descontinuidade poderá ser removida, redefinindo $f(4) = \lim_{x \to 4} f(x)$. Vamos calcular o limite.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4} f(x) &= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Logo, expressando $f(4) = \frac{1}{4}$, teremos a nova função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ \frac{1}{4} & \text{se } x = 4 \end{cases}$$

e essa função é contínua em 4.

Obtemos o teorema a seguir sobre funções que são contínuas em um número, aplicando a Definição 2.6.1 e os teoremas de limite.

2.6.2 TEOREMA Se f e g forem funções contínuas em um número a, então

(i) $f + g$ será contínua em a;
(ii) $f - g$ será contínua em a;
(iii) $f \cdot g$ será contínua em a;
(iv) f/g será contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

Para ilustrar o tipo de prova que cada uma das partes desse teorema exige, vamos demonstrar a parte (i).

Como f e g são contínuas em a, da Definição 2.6.1 segue que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Logo, desses limites e do Teorema de Limite 4,

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = f(a) + g(a)$$

a qual é a condição para que $f + g$ seja contínua em a. Assim, demonstramos a parte (i).

As provas das partes (ii), (iii) e (iv) são similares.

Considere a função polinomial f definida por

$$f(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n \qquad b_0 \neq 0$$

onde n é um inteiro não negativo e b_0, b_1, ..., b_n são números reais. Através de sucessivas aplicações dos teoremas de limite, podemos mostrar que se a for um número qualquer,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b_0a^n + b_1a^{n-1} + b_2a^{n-2} + \ldots + b_{n-1}a + b_n$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

estabelecendo assim o teorema a seguir.

2.6.3 TEOREMA Uma função polinomial é contínua em qualquer número.

▶ **ILUSTRAÇÃO 8** Se $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$, então f será uma função polinomial e, portanto, pelo Teorema 2.6.3, contínua em qualquer número. Em particular, como f é contínua em 3, então $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} (x^3 - 2x^2 + 5x + 1) &= 3^3 - 2(3)^2 + 5(3) + 1 \\ &= 27 - 18 + 15 + 1 \\ &= 25\end{aligned}$$

◀

2.6.4 TEOREMA Uma função racional é contínua em todos os números do seu domínio.

Prova Se f for uma função racional, ela poderá ser expressa como o quociente de duas funções polinomiais. Assim, f pode ser definida por

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

onde g e h são duas funções polinomiais e o domínio de f consiste em todos os números, exceto aqueles para os quais $h(x) = 0$.

Se a for qualquer número no domínio de f, então $h(a) \neq 0$; assim, pelo Teorema de Limite 9,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} g(x)}{\lim\limits_{x \to a} h(x)} \tag{3}$$

Como g e h são funções polinomiais, pelo Teorema 2.6.3 elas são contínuas em a; assim, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$ e o $\lim\limits_{x \to a} h(x) = h(a)$. Conseqüentemente, de (3),

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{g(a)}{h(a)}$$

Assim, f é contínua em qualquer número de seu domínio. ■

EXEMPLO 3 Determine os números nos quais a função a seguir é contínua:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 9}$$

Solução O domínio de f é o conjunto R dos números reais, exceto aqueles para os quais $x^2 - 9 = 0$. Como $x^2 - 9 = 0$ quando $x = \pm 3$, segue que o domínio de f é o conjunto de todos os números reais, exceto 3 e -3.

Como f é uma função racional, segue do Teorema 2.6.4 que f será contínua em todos os números reais, exceto 3 e -3.

EXEMPLO 4 Determine os números nos quais a função a seguir é contínua.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

Solução As funções tendo valores $2x - 3$ e x^2 são funções polinomiais e, portanto, contínuas em qualquer número. Assim, o único número no qual a continuidade é questionável é 1. Vamos testar as três condições de continuidade em 1.

(i) $f(1) = -1$. Assim, a condição (i) é verificada.

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 3) = -1$ $\qquad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, o limite bilateral $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ não existe. Logo, f é descontínua em 1. Mas f é contínua em todo número real, exceto 1.

Na Secção Suplementar 2.9 provaremos o teorema a seguir sobre a continuidade da função definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

2.6.5 TEOREMA Se n for um inteiro positivo e

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

então

(i) se n for ímpar, f será contínua em qualquer número;
(ii) se n for par, f será contínua em todo número positivo.

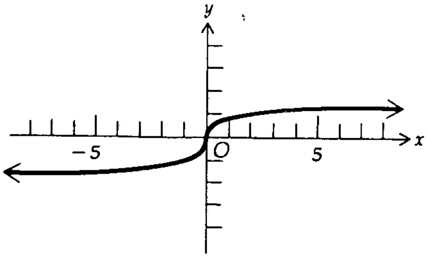


FIGURA 9

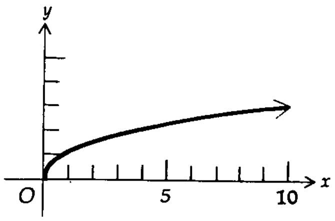


FIGURA 10

▶ **ILUSTRAÇÃO 9** (a) Se $f(x) = \sqrt[3]{x}$, segue do Teorema 2.6.5 (i) que f será contínua em todo número real. Um esboço do gráfico de f está na Figura 9.

(b) se $g(x) = \sqrt{x}$, então do Teorema 2.6.5 (ii) segue que g será contínua em todo número positivo. Na Figura 10 há um esboço do gráfico de g. ◀

Na Secção 2.7 aplicamos a definição de continuidade de uma função usando ϵ e δ. Para obter essa definição alternativa partimos da Definição 2.6.1 a qual estabelece que a função f é contínua em um número a. Se $f(a)$ existir, se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existir e se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{4}$$

Aplicando a Definição 2.1.1 onde L é $f(a)$, segue que (4) será verdadeira se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{5}$$

Se f for contínua em a, $f(a)$ deverá existir; assim, na afirmativa (5) a condição $|x - a| > 0$ não é necessária, pois quando $x = a$, $|f(x) - f(a)|$ será 0 e, portanto, menor do que ϵ. Temos, então, o teorema a seguir, que irá servir como a definição alternativa de continuidade que desejamos.

2.6.6 TEOREMA A função f será contínua no número a se f estiver definida em algum intervalo aberto contendo a e se para todo $\epsilon > 0$ exitir um $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$

EXERCÍCIOS 2.6

Nos Exercícios de 1 a 22, faça um esboço do gráfico da função; então, observando onde há quebras no gráfico, determine os valores da variável independente nos quais a função é descontínua e mostre por que a Definição 2.6.1 não é satisfeita em cada descontinuidade.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

2. $F(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$

3. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3} & \text{se } x \neq -3 \\ 1 & \text{se } x = -3 \end{cases}$

4. $G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ 2 & \text{se } x = 4 \end{cases}$

5. $h(x) = \dfrac{5}{x - 4}$

6. $H(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ 2 & \text{se } x = 4 \end{cases}$

8. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ 0 & \text{se } x = -2 \end{cases}$

9. $F(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$

10. $h(x) = \dfrac{(x - 1)(x^2 - x - 12)}{x^2 - 5x + 4}$

11. $G(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^4 - 16}$

12. $H(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{(x-1)(x^2 - x - 12)}$

13. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } 0 < x \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ 1 - x & \text{se } 1 < x \end{cases}$

15. $g(t) = \begin{cases} t^2 - 4 & \text{se } t < 2 \\ 4 & \text{se } t = 2 \\ 4 - t^2 & \text{se } 2 < t \end{cases}$

16. $H(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x \leqslant -2 \\ 2 - x & \text{se } -2 < x \leqslant 2 \\ 2x - 1 & \text{se } 2 < x \end{cases}$

17. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt[3]{x+1} & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$

18. $f(t) = \begin{cases} |t + 2| & \text{se } t \neq -2 \\ 3 & \text{se } t = -2 \end{cases}$

19. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

20. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

21. A função maior inteiro.

22. A função sinal (veja o Exemplo 1 na Secção 2.3).

Nos Exercícios de 23 a 32, prove que a função é descontínua no número a. Então determine se a descontinuidade é removível ou essencial. Se a descontinuidade for removível, redefina f(a) de tal modo que seja removida.

23. $f(x) = \dfrac{9x^2 - 4}{3x - 2}$; $a = \dfrac{2}{3}$

24. $f(s) = \left\{\begin{matrix} \dfrac{1}{s+5} & \text{se } s \neq -5 \\ 0 & \text{se } s = -5 \end{matrix}\right\}$; $a = -5$

25. $f(t) = \left\{\begin{matrix} 9 - t^2 & \text{se } t \leqslant 2 \\ 3t + 2 & \text{se } 2 < t \end{matrix}\right\}$; $a = 2$

26. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}$; $a = -3$

27. $f(x) = \left\{\begin{matrix} |x - 3| & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{matrix}\right\}$; $a = 3$

28. $f(x) = \left\{\begin{matrix} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 5 & \text{se } x = 3 \end{matrix}\right\}$; $a = 3$

29. $f(t) = \left\{\begin{matrix} t^2 - 4 & \text{se } t \leqslant 2 \\ t & \text{se } 2 < t \end{matrix}\right\}$; $a = 2$

30. $f(y) = \dfrac{\sqrt{y+5} - \sqrt{5}}{y}$; $a = 0$

31. $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x+9}}{x}$; $a = 0$

32. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$; $a = 0$

Nos Exercícios de 33 a 42, determine os números nos quais a função dada é contínua.

33. $f(x) = x^2(x+3)^2$

34. $f(x) = (x-5)^3(x^2+4)^5$

35. $g(x) = \dfrac{x}{x-3}$

36. $h(x) = \dfrac{x+1}{2x+5}$

37. $F(x) = \dfrac{x^3 + 7}{x^2 - 4}$

38. $G(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 2x - 8}$

39. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x < 2 \\ 4 - x^2 & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } 0 < x \end{cases}$

41. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{se } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } 1 < x \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x < 4 \\ \sqrt{x-4} & \text{se } 4 \leqslant x \end{cases}$

43. A função C do Exercício 35, nos Exercícios 2.3, está definida por

$$C(x) = \begin{cases} 0{,}80x & \text{se } 0 < x \leqslant 50 \\ 0{,}70x & \text{se } 50 < x \leqslant 200 \\ 0{,}65x & \text{se } 200 < x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de C. (b) Em quais números C é descontínua? (c) Mostre por que a Definição 2.6.1 não é satisfeita em cada descontinuidade da parte (b).

44. Suponha que a taxa postal de uma carta seja calculada da seguinte forma; $ 0,22 por qualquer peso até os 30 primeiros gramas e então $ 0,17 a cada 30 gramas, ou fração adicional, até 330 gramas adicionais. Se x gramas for o peso da carta e $0 < x \leqslant 360$, expresse a taxa postal como função de x. (a) faça um esboço do gráfico dessa função. (b) Em quais números do intervalo aberto (0, 360) a função é descontínua? (c) Mostre por que a Definição 2.6.1 não é satisfeita em cada descontinuidade da parte (b).

45. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x - [\![x]\!]| & \text{se } [\![x]\!] \text{ for par} \\ |x - [\![x + 1]\!]| & \text{se } [\![x]\!] \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Faça um esboço do gráfico de f. Em quais números f é descontínua?

46. A função f definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 8}$$

é descontínua em 8. Mostre que a descontinuidade é removível e redefina $f(8)$ de modo a removê-la.

47. A função g definida por

$$g(x) = \frac{\sqrt[3]{x + a^3} - a}{x}$$

é descontínua no 0. Mostre que a descontinuidade é removível e redefina $g(0)$, de modo a removê-la.

48. A função f é definida por

$$f(x) = \lim_{n \to 0} \frac{2nx}{n^2 - nx}$$

Faça um esboço do gráfico de f. Em que valores de x f é descontínua?

49. Se

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$$

Prove que f e g são ambas descontínuas em 0, mas o produto $f \cdot g$ é contínuo em 0.

50. Dê um exemplo para mostrar que o produto de duas funções f e g pode ser contínuo em um número a, onde f é contínua mas g é descontínua.

51. Dê um exemplo de duas funções que sejam ambas descontínuas em um número a, mas cuja soma seja contínua em a.

52. Prove que se f for contínua em a e g for descontínua em a, então $f + g$ será descontínua em a.

2.7 CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO COMPOSTA E CONTINUIDADE EM UM INTERVALO

Na Secção 1.4 uma função composta foi definida da seguinte forma:

Dadas as duas funções f e g, a função composta, denotada por $f \circ g$, é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

e o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 4 - x^2$ e se h for a função composta $f \circ g$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4 - x^2) \\ &= \sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

Como o domínio de g é o conjunto de todos os números reais e o domínio de f é o conjunto de todos os números não negativos, o domínio de h será o conjunto de todos os números reais, tais que $4 - x^2 \geqslant 0$, isto é, todos os números no intervalo fechado $[-2, 2]$. Um esboço do gráfico de h está na Figura 1. ◀

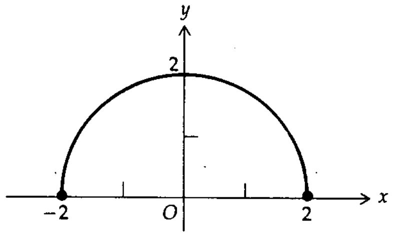


FIGURA 1

Da Figura 1 podemos ver que h parece ser contínua em todo número do intervalo aberto $(-2, 2)$. Mostraremos mais adiante, no Exemplo 1, como esse fato pode ser provado pelos teoremas sobre continuidade. Mas primeiro necessitamos de um importante teorema a respeito do limite de uma função composta. A demonstração desse teorema faz uso do Teorema 2.6.6, que é a definição de continuidade envolvendo ϵ e δ.

2.7.1 TEOREMA

Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ e se a função f for contínua em b,

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

Prova Como f é contínua em b, temos do Teorema 2.6.6 a seguinte afirmativa: para todo $\epsilon_1 > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } |y - b| < \delta_1 \quad \text{então } |f(y) - f(b)| < \epsilon_1 \tag{1}$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = b$, para todo $\delta_1 > 0$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } |g(x) - b| < \delta_1 \tag{2}$$

Se $0 < |x - a| < \delta_2$, substituímos y na afirmativa (1) por $g(x)$ e obtemos o seguinte: para todo $\epsilon_1 > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } |g(x) - b| < \delta_1 \text{ então } |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon_1 \tag{3}$$

Das afirmativas (2) e (3) concluímos que para todo $\epsilon_1 > 0$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon_1$$

de onde segue que

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) \qquad \blacksquare$$

O Teorema 2.7.1 será aplicado na Secção Suplementar 2.9 para provar os Teoremas de Limite 9 e 10. Outra aplicação do Teorema 2.7.1 está na demonstração do teorema a seguir, sobre continuidade de uma função composta.

2.7.2 TEOREMA Se a função g for contínua em a e a função f for contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ será contínua em a.

Prova Como g é contínua em a

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \tag{4}$$

Agora, como f é contínua em $g(a)$, podemos então aplicar o Teorema 2.7.1 à função composta $f \circ g$, obtendo

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) &= \lim_{x \to a} f(g(x)) \\ &= f(\lim_{x \to a} g(x)) \\ &= f(g(a)) \quad \text{(pela igualdade (4))} \\ &= (f \circ g)(a)\end{aligned}$$

o que prova que $f \circ g$ é contínua em a. $\blacksquare$

O Teorema 2.7.2 estabelece que uma *função contínua de uma função contínua é contínua*. O exemplo a seguir mostra como usá-lo para determinar os números nos quais uma determinada função é contínua.

EXEMPLO 1 Determine os valores em que a função a seguir é contínua:

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Solução A função h é aquela obtida na Ilustração 1 como a função composta $f \circ g$, onde $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 4 - x^2$. Como g é uma função polinomial, ela será contínua em toda parte. Além disso, f é contínua em todo número positivo pelo Teorema 2.6.5 (ii). Logo, pelo Teorema 2.7.2, h é contínua em todo número x para o qual $g(x) > 0$, isto é, quando $4 - x^2 > 0$. Logo, h é contínua em todos os números do intervalo aberto $(-2, 2)$.

Como a função h do Exemplo 1 é contínua em todos os números do intervalo aberto $(-2, 2)$, dizemos que h é *contínua no intervalo aberto* $(-2, 2)$.

2.7.3 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função é **contínua em um intervalo aberto** se e somente se ela for contínua em todos os números do intervalo aberto.

Vamos voltar novamente à função h do Exemplo 1. Como h não está definida em nenhum intervalo aberto contendo ou -2 ou 2, não podemos considerar $\lim\limits_{x \to -2} h(x)$ ou $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$. Portanto, nossa definição (2.6.1) de continuidade em um número não permite que h seja contínua em -2 e 2. Assim sendo, para discutir a questão da continuidade de h no intervalo fechado $[-2, 2]$, precisamos estender o conceito de continuidade para incluir a continuidade nos extremos de um intervalo fechado. Faremos isso definindo primeiro *continuidade à direita* e *continuidade à esquerda*.

2.7.4 DEFINIÇÃO A função f será **contínua à direita em um número a** se e somente se forem satisfeitas as três condições a seguir:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe;

(iii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

2.7.5 DEFINIÇÃO A função f será **contínua à esquerda em um número a** se e somente se forem satisfeitas as três condições a seguir:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existe;

(iii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

2.7.6 DEFINIÇÃO Uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$ será **contínua em $[a, b]$** se e somente se ela for contínua no intervalo aberto (a, b), contínua à direita em a e contínua à esquerda em b.

EXEMPLO 2 Prove que a função h do Exemplo 1 é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$.

Solução A função h é definida por

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

e no Exemplo 1 mostramos que *h* é contínua no intervalo aberto $(-2, 2)$. Aplicando o Teorema 2.7.1 calculamos $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^+} h(x) &= \lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} \\ &= 0 \\ &= h(-2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} h(x) &= \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} \\ &= 0 \\ &= h(2) \end{aligned}$$

Assim, *h* é contínua à direita, em -2 e contínua à esquerda, em 2. Logo, pela Definição 2.7.6, *h* é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$.

Um esboço do gráfico de *h* está na Figura 1.

Observe a diferença na terminologia que usamos nos Exemplos 1 e 2. No Exemplo 1 estabelecemos que *h é contínua em todo número no intervalo aberto* $(-2, 2)$, enquanto que no Exemplo 2 concluímos que *h é contínua no intervalo fechado* $[-2, 2]$.

2.7.7 DEFINIÇÃO

(i) Uma função cujo domínio inclui o intervalo semi-aberto $[a, b)$ será **contínua em $[a, b)$** se e somente se ela for contínua no intervalo aberto (a, b) e contínua à direita em a.

(ii) Uma função cujo domínio inclui o intervalo semi-aberto $(a, b]$ será **contínua em $(a, b]$** se e somente se ela for contínua no intervalo aberto (a, b) e contínua à esquerda em b.

Definições similares àquelas apresentadas na Definição 2.7.7 podem ser dadas para a continuidade nos intervalos $[a, +\infty)$ e $(-\infty, b]$.

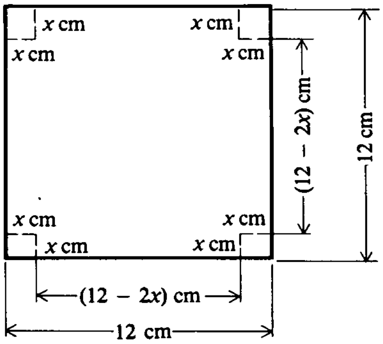


FIGURA 2

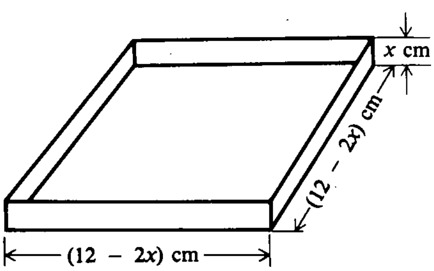


FIGURA 3

EXEMPLO 3 Determine o maior intervalo (ou união de intervalos) em que a função a seguir é contínua:

$$f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 3}$$

Solução Primeiro determinamos o domínio de f. A função é definida em qualquer parte, exceto quando $x = 3$ ou $25 - x^2 < 0$ (isto é, quando $x > 5$ ou $x < -5$). Portanto, o domínio de f é $[-5, 3) \cup (3, 5]$. Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -5^+} f(x) &= 0 \\ &= f(-5) \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 5^-} f(x) &= 0 \\ &= f(5) \end{aligned}$$

f é contínua à direita, em -5 e à esquerda, em 5. Além disso, f é contínua nos intervalos abertos $(-5, 3)$ e $(3, 5)$. Logo, f é contínua em $[-5, 3) \cup (3, 5]$.

EXEMPLO 4 Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas de pedaços quadrados de papelão com 12 cm de lado. Para isso, ele pretende retirar quadrados iguais dos quatro cantos, dobrando a seguir os lados. (a) Se x cm for o comprimento dos quadrados a serem cortados, expresse o volume da caixa em centímetros cúbicos como função de x. (b) Qual é o domínio da função? (c) Prove que a função é contínua em seu domínio.

Solução

(a) A Figura 2 representa um pedaço quadrado de papelão e a Figura 3 ilustra a caixa de papelão obtida. As medidas em centímetros das dimensões da caixa são x, $12 - 2x$ e $12 - 2x$. O volume da caixa é o produto das três dimensões. Logo, se $V(x)$ cm³ for o volume da caixa,

$$\begin{aligned} V(x) &= x(12 - 2x)(12 - 2x) \\ &= 144x - 48x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

(b) Observe que $V(0) = 0$ e $V(6) = 0$. Das condições do problema, temos que x não pode ser negativo, nem maior do que 6. Assim, o domínio de V é o intervalo fechado $[0, 6]$.

(c) Como V é uma função polinomial, será contínua em toda parte. Assim sendo, V é contínua no intervalo fechado $[0, 6]$.

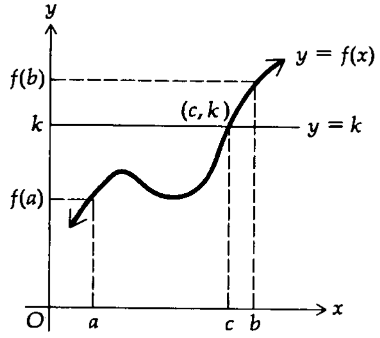


FIGURA 4

A função do Exemplo 4 será discutida novamente na Secção 4.2, onde usaremos o fato de que V é contínua no intervalo fechado $[0, 6]$ para determinar o valor de x que resultará uma caixa com o maior volume possível.

Agora discutiremos um teorema importante sobre funções que são contínuas num intervalo fechado. Ele é chamado de **teorema do valor intermediário.**

2.7.8 TEOREMA
Teorema do Valor Intermediário

Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e se $f(a) \neq f(b)$, então, para todo número k entre $f(a)$ e $f(b)$ existirá um número c entre a e b tal que $f(c) = k$.

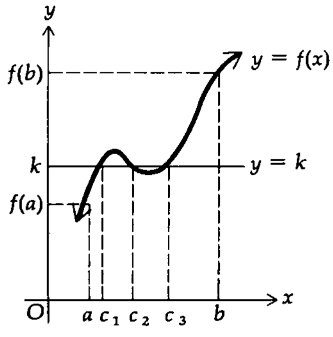


FIGURA 5

A demonstração desse teorema está fora do contexto deste livro; ela poderá ser encontrada num texto de Cálculo Avançado. Discutiremos, contudo, a interpretação geométrica do teorema. Na Figura 4, $(0, k)$ é um ponto qualquer sobre o eixo y entre os pontos $(0, f(a))$ e $(0, f(b))$. O Teorema 2.7.8 estabelece que a reta $y = k$ deve interceptar a curva cuja equação é $y = f(x)$ no ponto (c, k), onde e está entre a e b. A Figura 4 mostra essa intersecção.

Note que para alguns valores de k pode existir mais de um valor possível para c. O teorema estabelece que existe pelo menos um valor de c, mas que ele não é necessariamente único. A Figura 5 mostra três valores possíveis de c (c_1, c_2 e c_3) para um dado k.

O Teorema 2.7.8 estabelece que se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f assumirá todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, enquanto x assumirá todos os valores entre a e b. A importância da continuidade de f em $[a, b]$ é demonstrada na ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 & \text{se } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 6.

A função f é descontínua em 2, que está no intervalo fechado $[0, 3]$; $f(0) = -1$ e $f(3) = 9$. Se k for qualquer número entre 1 e 4, não existe um valor de c tal que $f(c) = k$, pois não existem valores da função entre 1 e 4.

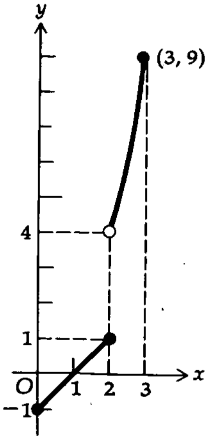


FIGURA 6

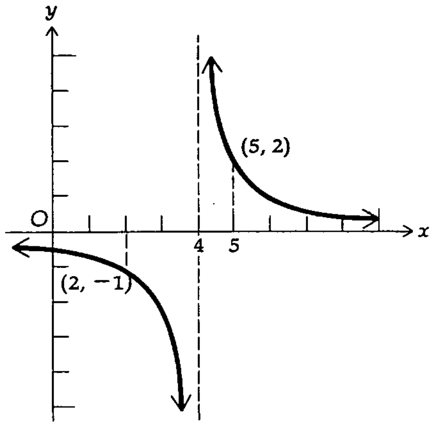


FIGURA 7

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Seja g a função definida por

$$g(x) = \frac{2}{x-4}$$

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 7.

A função g é descontínua em 4 que está no intervalo fechado [2, 5]; $g(2) = -1$ e $g(5) = 2$. Se k for qualquer número entre -1 e 2, não existe valor de c entre 2 e 5 tal que $g(c) = k$. Especificando, se $k = 1$, então $g(6) = 1$, mas 6 não está em [2, 5]. ◀

EXEMPLO 5 Dada a função f definida por

$$f(x) = 4 + 3x - x^2 \qquad 2 \leqslant x \leqslant 5$$

(a) verifique o teorema do valor intermediário se $k = 1$; isto é, ache um número c no intervalo [2, 5] tal que $f(c) = 1$. (b) Faça um esboço do gráfico de f em [2, 5] e mostre o ponto $(c, 1)$.

Solução

(a) Como f é uma função polinomial, ela será contínua em toda parte e assim será contínua em [2, 5]. Uma vez que $f(2) = 6$ e $f(5) = -6$, o teorema do valor intermediário garante que existe um número e entre 2 e 5 tal que $f(c) = 1$; isto é,

$$4 + 3c - c^2 = 1$$

$$c^2 - 3c - 3 = 0$$

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{9+12}}{2}$$

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Rejeitamos $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{21})$, pois esse número está fora do intervalo [2, 5]. O número $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{21})$ está no intervalo [2, 5] e

$$f\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) = 1$$

(b) O esboço pedido está na Figura 8.

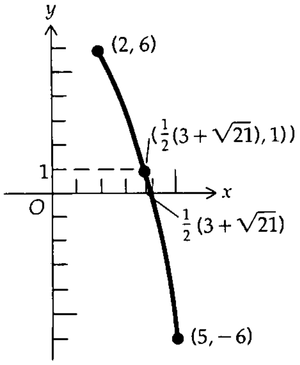


FIGURA 8

EXERCÍCIOS 2.7

Nos Exercícios de 1 a 14 defina $f \circ g$ e determine os números nos quais $f \circ g$ é contínua.

1. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 9 - x^2$

2. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 16 - x^2$

3. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 16$

4. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 4$

5. $f(x) = x^3$; $g(x) = \sqrt{x}$

6. $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 - 3$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = x - 2$

8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $g(x) = x + 3$

9. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$

10. $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = \sqrt{x+1}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $g(x) = \sqrt{x}$

12. $f(x) = \sqrt{x+1}$; $g(x) = \sqrt[3]{x}$

13. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x-1}}$; $g(x) = |x|$

14. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{4-x}}$; $g(x) = |x|$

Nos Exercícios de 15 a 24, ache o domínio da função dada e então determine se a função é contínua ou descontínua em cada um dos intervalos indicados.

15. $f(x) = \dfrac{2}{x+5}$; $(3, 7)$, $[-6, 4]$, $(-\infty, 0)$, $(-5, +\infty)$, $[-5, +\infty)$, $[-10, -5)$

16. $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$; $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$, $(0, 2)$, $(0, 2]$, $[2, +\infty)$, $(2, +\infty)$

17. $f(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1}$; $(0, 1)$, $(-1, 1)$, $[0, 1]$, $(-1, 0]$, $(-\infty, -1]$, $(1, +\infty)$

18. $f(r) = \dfrac{r+3}{r^2-4}$; $(0, 4]$, $(-2, 2)$, $(-\infty, -2]$, $(2, +\infty)$, $[-4, 4]$, $(-2, 2]$

19. $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$; $(-\infty, -3)$, $(-\infty, -3]$, $(3, +\infty)$, $[3, +\infty)$, $(-3, 3)$

20. $f(x) = [\![x]\!]$; $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(1, 2)$, $[1, 2)$, $(1, 2]$

21. $f(t) = \dfrac{|t-1|}{t-1}$; $(-\infty, 1)$ $(-\infty, 1]$, $[-1, 1]$, $(-1, +\infty)$, $(1, +\infty)$

22. $h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } x < -2 \\ x - 5 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3 - x & \text{se } 1 < x \end{cases}$; $(-\infty, 1)$, $(-2, +\infty)$, $(-2, 1)$, $[-2, 1)$, $[-2, 1]$

23. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $(-2, 2)$, $[-2, 2]$, $[-2, 2)$, $(-2, 2]$, $(-\infty, -2]$, $(2, +\infty)$

24. $F(y) = \dfrac{1}{3 + 2y - y^2}$; $(-1, 3)$, $[-1, 3]$, $[-1, 3)$, $(-1, 3]$

Nos exercícios de 25 a 34, determine o maior intervalo (ou a união de intervalos) em que a função $f \circ g$ do exercício indicado é contínua.

25. Exercício 1.
26. Exercício 2.
27. Exercício 3.
28. Exercício 4.
29. Exercício 9.
30. Exercício 10.
31. Exercício 11.
32. Exercício 12.
33. Exercício 13.
34. Exercício 14.

Nos Exercícios de 35 a 38, faça um esboço do gráfico da função f que satisfaça as condições dadas.

35. f é contínua em $(-\infty, 2]$ e $(2, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0$

36. f é contínua em $(-\infty, 0)$ e $[0, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$

37. f é contínua em $(-\infty, -3]$, $(-3, 3)$, e $[3, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -5$; $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 0$

38. f é contínua em $(-\infty, -2)$, $[-2, 4]$, e $(4, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 0$

39. Determine o intervalo maior (ou união de intervalos) em que a função do Exercício 17 nos Exercícios 2.3 é contínua.

40. Determine o intervalo maior (ou união de intervalos) em que a função do Exemplo 4 na Secção 2.3 é contínua.

41. Um fabricante de latas quadradas sem tampa deseja usar pedaços de folha-de-flandres com dimensões 8 e 15 cm, cortando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando os lados. (a) Se x cm for o comprimento do lado do quadrado a ser cortado, expresse o volume da caixa em centímetros cúbicos como uma função de x. (b) Qual o domínio da função? (c) Prove que a função é contínua em seu domínio.

42. Suponha que o fabricante do Exercício 41 produza as latas com folhas-de-flandres que medem k cm de lado. (a) Se x cm for o comprimento do lado dos quadrados a serem cortados, expresse o volume da lata em centímetros cúbicos como uma função de x. (b) Qual é o domínio da função? (c) Prove que a função é contínua em seu domínio.

43. Um terreno retangular deve ser fechado com 240 metros de cerca. (a) Se x metros for o seu comprimento, expresse a área do terreno em metros quadrados como uma função de x. (b) Qual o domínio da função? (c) Prove que a função é contínua em seu domínio.

44. Um jardim retangular deve ser feito, de modo que o lado da casa sirva de limite e 100 metros de cerca sejam usados para os outros três lados. (a) Se x metros for o comprimento do lado do jardim paralelo à casa, expresse a área do jardim em metros quadrados como uma função de x. (b) Qual é o domínio da função? (c) Prove que a função é contínua em seu domínio.

Nos Exercícios de 45 a 48, ache os valores das constantes c e k que tornam a função contínua em $(-\infty, +\infty)$ e faça um esboço do gráfico da função resultante.

45. $f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{se } x \leqslant 4 \\ kx - 1 & \text{se } 4 < x \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} kx - 1 & \text{se } x < 2 \\ kx^2 & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$

47. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leqslant 1 \\ cx + k & \text{se } 1 < x < 4 \\ -2x & \text{se } 4 \leqslant x \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} x + 2c & \text{se } x < -2 \\ 3cx + k & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3x - 2k & \text{se } 1 < x \end{cases}$

Nos Exercícios de 49 a 56, são dados uma função f e um intervalo fechado [a, b]. Determine se o teorema do valor intermediário se aplica para o valor de k dado. Se o teorema for aplicável, ache um número c tal que f(c) = k. Caso contrário, explique porquê. Faça um esboço da curva e da reta y = k.

49. $f(x) = 2 + x - x^2$; $[a, b] = [0, 3]$; $k = 1$

50. $f(x) = x^2 + 5x - 6$; $[a, b] = [-1, 2]$; $k = 4$

51. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $[a, b] = [-4.5, 3]$; $k = 3$

52. $f(x) = -\sqrt{100 - x^2}$; $[a, b] = [0, 8]$; $k = -8$

53. $f(x) = \dfrac{4}{x+2}$; $[a, b] = [-3, 1]$; $k = \frac{1}{2}$

54. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } -4 \leqslant x \leqslant -2 \\ 2 - x & \text{se } -2 < x \leqslant 1 \end{cases}$; $[a, b] = [-4, 1]$; $k = \frac{1}{2}$

55. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } -2 \leqslant x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$; $[a, b] = [-2, 3]$; $k = -1$

56. $f(x) = \dfrac{5}{2x - 1}$; $[a, b] = [0, 1]$; $k = 2$

57. Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } a \leqslant x < b \\ h(x) & \text{se } b \leqslant x \leqslant c \end{cases}$$

Se g for contínua em $[a, b)$ e h for contínua em $[b, c]$, podemos concluir que f é contínua em $[a, c]$? Se sua resposta for sim, prove-a. Se sua resposta for não, que condição ou condições adicionais assegurariam a continuidade de f em $[a, c]$?

58. Prove que se a função f for contínua em a, então $\lim\limits_{t \to 0} t(a - t) = f(a)$.

59. Ache o maior valor de k para o qual a função definida por $f(x) = x^2 - 2$ é contínua no intervalo $[3, 3 + k)$.

60. Suponha que f seja uma função para a qual $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ se $0 \leqslant x \leqslant 1$. Prove que se f for contínua em $[0, 1]$, existirá pelo menos um número c em $[0, 1]$ tal que $f(c) = c$. (*Sugestão*: se nem 0 nem 1 servirem como c, então $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Considere a função g para a qual $g(x) = f(x) - x$ e aplique o teorema do valor intermediário a g em $[0, 1]$.)

61. Mostre que o teorema do valor intermediário garante que a equação $x^3 - 4x + x + 3 = 0$ tenha raiz entre 1 e 2.

62. Mostre que o teorema do valor intermediário garante que a equação $x^3 + x + 3 = 0$ tenha raiz entre -2 e -1.

2.8 CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E O TEOREMA DO CONFRONTO DE LIMITES (OU TEOREMA DO "SANDUÍCHE")

Tabela 1

t	$\dfrac{\text{sen } t}{t}$
1,0	0,84147
0,9	0,87036
0,8	0,89670
0,7	0,92031
0,6	0,94107
0,5	0,95885
0,4	0,97355
0,3	0,98507
0,2	0,99335
0,1	0,99833
0,01	0,99998

Tabela 2

t	$\dfrac{\text{sen } t}{t}$
−1,0	0,84147
−0,9	0,87036
−0,8	0,89670
−0,7	0,92031
−0,6	0,94107
−0,5	0,95885
−0,4	0,97355
−0,3	0,98507
−0,2	0,99335
−0,1	0,99833
−0,01	0,99998

Em nossa discussão sobre continuidade das funções trigonométricas, faremos uso do seguinte limite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} \tag{1}$$

Vemos que a função dada por $\dfrac{\text{sen } t}{t}$ não é definida quando $t = 0$. Para termos uma idéia intuitiva da existência do limite em (1), consideremos valores de sen t/t para t próximo de 0. Na Tabela 1 estão os valores da função obtidos com uma calculadora quando t é 1,0, 0,9, 0,8,..., 0,1 e 0,01; na Tabela 2 estão os valores da função quando t é $-1{,}0$, $-0{,}9$, -8,..., $-0{,}1$ e $-0{,}01$.

Das duas tabelas, notamos que o limite em (1) existe e é igual a 1. Que, de fato, o limite existe e é igual a 1 será provado no Teorema 2.8.2, mas na sua demonstração usaremos um outro teorema conhecido como **teorema do "sanduíche"**. O teorema do "sanduíche" não é importante apenas na demonstração do Teorema 2.8.2, mas também nas demonstrações de alguns teoremas fundamentais enunciados em secções subseqüentes.

2.8.1 TEOREMA TEOREMA DO "SANDUÍCHE"

Suponha que as funções f, g e h estejam definidas em algum intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no próprio a e que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todo x em I, tal que $x \neq a$. Suponha também que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ ambos existam e tenham o mesmo valor L. Então $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe e é igual a L.

Antes de provar o Teorema 2.8.1, consideremos a seguinte ilustração que o interpreta geometricamente:

► **ILUSTRAÇÃO 1** Sejam f, g e h as funções definidas por

$$f(x) = -4(x - 2)^2 + 3$$

$$g(x) = \frac{(x - 2)(x^2 - 4x + 7)}{x - 2}$$

$$h(x) = 4(x - 2)^2 + 3$$

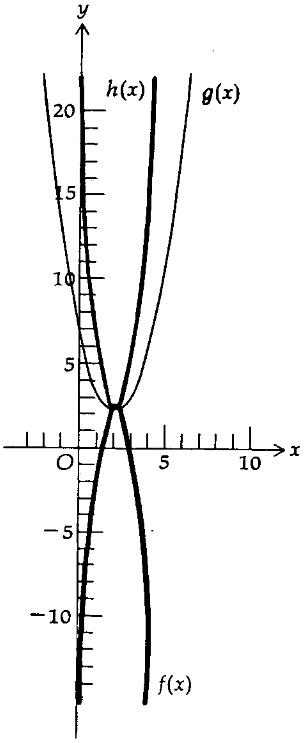


FIGURA 1

Os gráficos de f e h são parábolas tendo seu vértice em (2,3). O gráfico de g é uma parábola da qual exclui-se o vértice (2,3). Esboços desses gráficos estão na Figura 1. A função g não é definida para $x = 2$; contudo, para todo $x \neq 2$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Além disso, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 3$. As hipóteses do Teorema 2.8.1 estão, portanto, satisfeitas e segue então que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 3$. ◀

Prova do Teorema 2.8.1 Para demonstrar que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$, precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |g(x) - L| < \epsilon \tag{2}$$

É dado que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} h(x) = L$$

e assim para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ então } L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \tag{3}$$

e um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } |h(x) - L| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ então } L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon \tag{4}$$

seja $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ e assim $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$. Logo, segue da afirmativa (3) que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } L - \epsilon < f(x) \tag{5}$$

e da afirmativa (4), temos

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } h(x) < L + \epsilon \tag{6}$$

Sabemos que

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \tag{7}$$

Das afirmativas (5), (6) e (7),

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } L - \epsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \epsilon$$

Logo,

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |g(x) - L| < \epsilon$$

que é a afirmativa (2). Logo,

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

■

EXEMPLO 1 Dado $|g(x) - 2| \leqslant 3(x - 1)^2$ para todo x, use o teorema do "sanduíche" para encontrar $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

Solução como $|g(x) - 2| \leqslant 3(x-1)^2$ para todo x, segue do Teorema 1.1.10 que

$$-3(x-1)^2 \leqslant g(x) - 2 \leqslant 3(x-1)^2 \qquad \text{para todo } x$$

$$\Leftrightarrow \qquad -3(x-1)^2 + 2 \leqslant g(x) \leqslant 3(x-1)^2 + 2 \qquad \text{para todo } x$$

Sejam $f(x) = -3(x-1)^2 + 2$ e $h(x) = 3(x-1)^2 + 2$, então

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1} h(x) = 2 \tag{8}$$

Além disso, para todo x

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \tag{9}$$

Logo, segue de (8), (9) e do teorema do "sanduíche" que

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 2$$

EXEMPLO 2 Use o teorema do "sanduíche" para provar que

$$\lim_{x \to 0} \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = 0$$

Solução Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} t \leqslant 1$ para todo t, então

$$0 \leqslant \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leqslant 1 \qquad \text{se } x \neq 0$$

Logo, se $x \neq 0$

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right|$$

$$\leqslant |x|$$

Assim,

$$0 \leqslant \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leqslant |x| \qquad \text{se } x \neq 0 \tag{10}$$

Como $\lim_{x \to 0} 0 = 0$ e $\lim_{x \to 0} |x| = 0$, segue da desigualdade (10) e do teorema do "sanduíche" que

$$\lim_{x \to 0} \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = 0$$

2.8.2 TEOREMA

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1}$$

Prova Suponha primeiro que $0 < t < \frac{1}{2}\pi$. Veja a Figura 2 que mostra a circunferência do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ e o setor sombreado *BOP*, onde *B* é o ponto $(1,0)$ e *P* é o ponto $(\cos t, \operatorname{sen} t)$. A área de um setor circular de raio r e ângulo central, cuja medida em radianos é t, é determinada por $\frac{1}{2}r^2t$; assim, se a área do setor *BOP* for S unidades quadradas,

$$S = \tfrac{1}{2}t \tag{11}$$

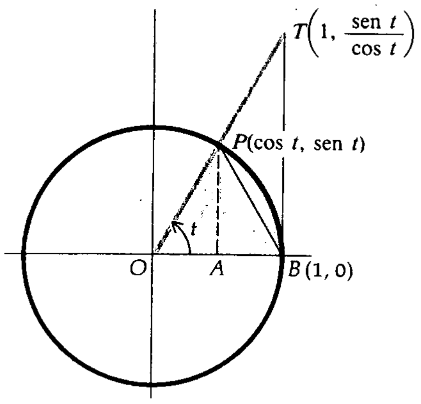

$T\left(1, \frac{\text{sen } t}{\cos t}\right)$
$P(\cos t, \text{sen } t)$
t
O
A
$B(1, 0)$

FIGURA 2

Considere agora o triângulo BOP e seja a área desse triângulo igual a K_1 unidades quadradas. Como $K_1 = \frac{1}{2}\,|\overline{AP}| \cdot |\overline{OB}|$, $|\overline{AP}| = \text{sen } t$ e $|\overline{OB}| = 1$, temos que

$$K_1 = \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,t \tag{12}$$

A reta que passa pelos pontos O (0, 0) e $P(\cos t, \text{sen } t)$ tem por inclinação $\text{sen } t/\cos t$ e, portanto, sua equação é

$$y = \frac{\text{sen}\,t}{\cos t}\,x$$

Essa reta intercepta a reta $x = 1$ em $(1, \text{sen } t/\cos t)$ que é o ponto T na Figura 2. Se a área do triângulo retângulo BOT for K_2 unidades quadradas, então $K_2 = \frac{1}{2}\,|\overline{BT}| \cdot |\overline{OB}|$. Como $|\overline{BT}| = \text{sen } t/\cos t$ e $|\overline{OB}| = 1$, temos

$$K_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}\,t}{\cos t} \tag{13}$$

Da Figura 2, observe que

$$K_1 < S < K_2$$

Substituindo (11), (12) e (13) nessa desigualdade,

$$\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t < \frac{1}{2}\,t < \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}\,t}{\cos t}$$

Multiplicando cada membro da desigualdade acima por $2/\text{sen } t$, que é positivo pois $0 < t < \frac{1}{2}\pi$,

$$1 < \frac{t}{\text{sen}\,t} < \frac{1}{\cos t}$$

Tomando o recíproco de cada membro da desigualdade acima e invertendo os sinais das desigualdades,

$$\cos t < \frac{\text{sen}\,t}{t} < 1 \tag{14}$$

Da desigualdade à direita,

$$\text{sen}\,t < t \tag{15}$$

e da identidade em Trigonometria,

$$\frac{1 - \cos t}{2} = \text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,t \tag{16}$$

Substituindo t por $\frac{1}{2}\,t$ na desigualdade (15) e elevando ao quadrado

$$\text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}t < \tfrac{1}{4}t^2 \tag{17}$$

Assim, de (16) e (17), segue que

$$\frac{1 - \cos t}{2} < \frac{t^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \tfrac{1}{2}t^2 < \cos t \tag{18}$$

De (14) e (18) e como $0 < t < \frac{1}{2}\,\pi$,

$$1 - \frac{1}{2}\,t^2 < \frac{\text{sen}\,t}{t} < 1 \qquad \text{se } 0 < t < \tfrac{1}{2}\pi \tag{19}$$

Se $-\frac{1}{2}\pi < t < 0$, então $0 < -t < \frac{1}{2}\pi$; e assim de (19),

$$1 - \frac{1}{2}(-t)^2 < \frac{\operatorname{sen}(-t)}{-t} < 1 \qquad \text{se } -\tfrac{1}{2}\pi < t < 0$$

Mas sen $(-t) = -$sen t; assim podemos escrever o que está acima como

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1 \qquad \text{se } -\tfrac{1}{2}\pi < t < 0 \tag{20}$$

De (19) e (20) concluímos que

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1 \qquad \text{se } -\tfrac{1}{2}\pi < t < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{e} \quad t \neq 0 \tag{21}$$

Como $\lim\limits_{t \to 0} (1 - \frac{1}{2}t^2) = 1$ e $\lim\limits_{t \to 0} 1 = 1$, segue de (21) e do teorema do "sanduíche" que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 3 Ache o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$$

Solução Queremos escrever o quociente sen $3x$/sen $5x$ de tal forma que o Teorema 2.8.2 possa ser aplicado. Se $x \neq 0$,

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} = \frac{3\left(\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)}{5\left(\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\right)}$$

Quando x tende a zero, o mesmo acontece com $3x$ e $5x$. Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = \lim_{3x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = \lim_{5x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 1$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} = \frac{3 \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)}{5 \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\right)} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5}$$

Do Teorema 2.8.2, podemos provar que as funções seno e co-seno são contínuas em 0.

2.8.3 TEOREMA A função seno é contínua em 0.

Prova Podemos mostrar que são satisfeitas as três condições necessárias à continuidade:

(i) $\operatorname{sen} 0 = 0$

(ii) $$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot t\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot \lim_{t\to 0} t\\ &= 1\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

(iii) $\lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} 0$

Logo, a função seno é contínua em 0. ■

2.8.4 TEOREMA A função co-seno é contínua em 0.

Prova Vamos verificar as três condições necessárias à continuidade em um número. Ao verificar a condição (ii), usamos o fato de que a função seno é contínua em 0 e substituímos $\cos t$ por $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$, pois $\cos t > 0$ quando $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ e quando $-\frac{1}{2}\pi < t < 0$.

(i) $\cos 0 = 1$

(ii) $$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \cos t &= \lim_{t\to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\\ &= \sqrt{\lim_{t\to 0} (1 - \operatorname{sen}^2 t)}\\ &= \sqrt{1 - 0}\\ &= 1\end{aligned}$$

(iii) $\lim_{t\to 0} \cos t = \cos 0$

Assim, a função co-seno é contínua em 0. ■

Precisaremos do limite a seguir mais adiante. Ele será obtido dos três teoremas anteriores e dos teoremas de limite.

2.8.5 TEOREMA $$\lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$$

Prova

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{t(1 + \cos t)}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(1 - \cos^2 t)}{t(1 + \cos t)}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t(1 + \cos t)}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.8.2,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

e como as funções seno e co-seno são contínuas em 0, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t} &= \frac{0}{1+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} &= 1 \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

■

EXEMPLO 4 Ache o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Solução Como $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$, os teoremas de limite não podem ser aplicados ao quociente $(1 - \cos x)/\operatorname{sen} x$. Mas, se dividirmos o numerador e o denominador por x, o que é permissível, pois $x \neq 0$, poderemos aplicar os Teoremas 2.8.2 e 2.8.5. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1 - \cos x}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} \\ &= \frac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} \\ &= \frac{0}{1} \\ &= 0\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Ache o limite, se existir.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{x^2}$$

Solução Usaremos a identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

e teremos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\,\text{tg}^2\,x}{x^2} &= 2\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2\,x}{x^2\cdot\cos^2 x}\\ &= 2\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\\ &= 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\\ &= 2\end{aligned}$$

Usando o Teorema 2.2.12 e o fato de que as funções seno e co-seno são contínuas em 0, podemos provar o seguinte teorema:

2.8.6 TEOREMA As funções seno e co-seno são contínuas em todos os números reais.

Prova O conjunto de todos os números reais é o domínio de ambas as funções seno e co-seno. Logo, precisamos mostrar que se a for um número real qualquer,

$$\lim_{x\to a}\text{sen}\,x=\text{sen}\,a \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

ou, equivalentemente, do Teorema 2.2.12,

$$\lim_{t\to 0}\text{sen}(t+a)=\text{sen}\,a \text{ e } \lim_{t\to 0}\cos(t+a)=\cos a \tag{22}$$

Usaremos as identidades

$$\text{sen}(t+a)=\text{sen}\,t\cos a+\cos t\,\text{sen}\,a \tag{23}$$

$$\cos(t+a)=\cos t\cos a-\text{sen}\,t\,\text{sen}\,a \tag{24}$$

De (23),

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\text{sen}(t+a) &= \lim_{t\to 0}(\text{sen}\,t\cos a+\cos t\,\text{sen}\,a)\\ &= \lim_{t\to 0}\text{sen}\,t\cdot\lim_{t\to 0}\cos a+\lim_{t\to 0}\cos t\cdot\lim_{t\to 0}\text{sen}\,a\\ &= 0\cdot\cos a+1\cdot\text{sen}\,a\\ &= \text{sen}\,a\end{aligned}$$

Logo, a primeira das igualdades (22) é verdadeira; assim, a função seno é contínua em todo número real. De (24),

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\cos(t+a) &= \lim_{t\to 0}(\cos t\cos a-\text{sen}\,t\,\text{sen}\,a)\\ &= \lim_{t\to 0}\cos t\cdot\lim_{t\to 0}\cos a-\lim_{t\to 0}\text{sen}\,t\cdot\lim_{t\to 0}\text{sen}\,a\\ &= 1\cdot\cos a-0\cdot\text{sen}\,a\\ &= \cos a\end{aligned}$$

Assim, a segunda das equações em (22) é verdadeira e, portanto, a função co-seno é contínua em todo número real. ■

Usando as identidades trigonométricas, o Teorema 2.6.4 sobre continuidade de uma função racional e o Teorema 2.8.6, podemos provar que as outras quatro funções trigonométricas são contínuas em seus domínios.

2.8.7 TEOREMA A tangente, co-tangente, secante e co-secante são funções contínuas em seus domínios.

A demonstração do Teorema 2.8.7 será deixada como exercício (veja os Exercícios de 35 a 38).

EXERCÍCIOS 2.8

Nos Exercícios de 1 a 26, calcule o limite, quando ele existir.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\operatorname{sen} 3x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 9x}{\operatorname{sen} 7x}$

4. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{\operatorname{sen} 6t}$

5. $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{3y}{\operatorname{sen} 5y}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^2 3x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^5 2x}{4x^5}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\cos x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x}$

12. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\cos 2z}{4z}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{1-\cos^2 \frac{1}{2}x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{2x^2}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{2x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^4 2x}{4x^4}$

17. $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t^2}$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

20. $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} 4y}{\cos 3y - 1}$

21. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\frac{1}{2}\pi - x}$ (*Sugestão*: seja $t = \frac{1}{2}\pi - x$.)

22. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\frac{1}{2}\pi - x}{\cos x}$ (*Sugestão*: seja $t = \frac{1}{2}\pi - x$.)

23. $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$ (*Sugestão*: seja $t = x - \pi$.)

24. $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\tan x}{x-\pi}$ (*Sugestão*: seja $t = x - \pi$.)

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+3x}{\operatorname{sen} x}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x^2+2x}$

Nos Exercícios de 27 a 30, use o teorema do "sanduíche" para encontrar o limite.

27. $\lim\limits_{x\to 0} x \cos \dfrac{1}{x}$

28. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

29. $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$, se $|g(x)+4| < 2(3-x)^4$ para todo x

30. $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$, se $|g(x)-3| < 5(x+2)^2$ para todo x

Nos Exercícios 31 e 32, encontre o limite, se existir

31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}$

32. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

33. Dado: $1-\cos^2 x \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para todo x no intervalo aberto $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Ache $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

34. Dado: $-\operatorname{sen} x \leqslant f(x) \leqslant 2 + \operatorname{sen} x$ para todo x no intervalo aberto $(-\pi, 0)$. Ache $\lim\limits_{x\to \pi/2} f(x)$.

Nos Exercícios de 35 a 38 prove que a função é contínua em seu domínio.

35. A função tangente.

36. A função co-tangente.

37. A função secante.

38. A função co-secante.

39. Se $|f(x)| \leqslant M$ para todo x, onde M é uma constante, use o teorema do "sanduíche" para provar que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$

40. Suponha que $|f(x)| \leqslant M$ para todo x, onde M é uma constante. Além disso, suponha que $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = 0$. Use o teorema do "sanduíche" para provar que $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

41. Se $|f(x)| \leqslant k\,|x-a|$ para todo $x \neq a$, onde k é uma constante, prove que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

2.9 PROVAS DE ALGUNS TEOREMAS SOBRE LIMITES DE FUNÇÕES *(Suplementar)*

Na Secção 2.1 há um teorema (Teorema 2.1.2) e na secção 2.2 há dois teoremas (Teoremas de Limite 9 e 10) cujas provas foram adiadas até esta secção.

Conforme ficou estabelecido na Secção 2.1, o Teorema 2.1.2 é um teorema de unicidade que garante que se o limite de uma função existir, ele será único. Vamos enunciá-lo novamente e demonstrá-lo.

2.1.2 TEOREMA Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Prova Vamos supor que $L_1 \neq L_2$ e mostrar que essa hipótese leva a uma contradição. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, segue, da Definição 2.1.1, que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{então } |f(x) - L_1| < \epsilon \tag{1}$$

Também, como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então } |f(x) - L_2| < \epsilon \tag{2}$$

Agora, escrevendo $L_1 - L_2$ como $L_1 - f(x) + f(x) - L_2$ e aplicando a desigualdade triangular (Teorema 1.1.15), temos

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |[L_1 - f(x)] + [f(x) - L_2]| \\ &\leqslant |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \end{aligned} \tag{3}$$

Assim, de (1), (2) e (3) podemos concluir que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ e um $\delta_2 > 0$ tais que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então } |L_1 - L_2| < \epsilon + \epsilon \tag{4}$$

Se δ for o menor dentre δ_1 e δ_2, então $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$ e (4) estabelece que para todo $\epsilon > 0$ há um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então } |L_1 - L_2| < 2\epsilon \tag{5}$$

Mas se $\epsilon = \frac{1}{2} |L_1 - L_2|$, então (5) estabelece que existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então } |L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$$

Evidentemente, $|L_1 - L_2|$ não pode ser menor que si próprio. Logo, temos uma contradição e nossa hipótese é falsa. Assim, $L_1 = L_2$, e o teorema está provado. ■

Para provar o Teorema de Limite 9 (limite do quociente de duas funções) e o Teorema de Limite 10 (limite da raiz enésima de uma função), aplicamos o Teorema 2.7.1 sobre o limite de uma função composta, que agora vamos enunciar novamente.

2.7.1 TEOREMA

Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ e se a função f for contínua em b,

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

O Teorema 2.7.1 foi provado na Secção 2.7. Antes de aplicá-lo na demonstração do Teorema de Limite 9, precisamos demonstrar um teorema sobre a continuidade da função definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2.9.1 TEOREMA

Se a for qualquer número exceto 0 e

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

então f será contínua em a.

Prova O domínio de f é o conjunto de todos os números reais, exceto 0. Logo, a está nesse domínio. A prova estará completa se pudermos mostrar que

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$$

Para provar isso, dois casos devem ser considerados: $a > 0$ e $a < 0$. Provaremos o caso em que $a > 0$ e deixaremos a demonstração do caso $a < 0$ como exercício (veja o Exercício 18).

Como $1/x$ está definido para todo x exceto 0, o intervalo aberto requerido pela Definição 2.1.1 pode ser qualquer intervalo aberto contendo a, mas não contendo 0.

Considerando $a > 0$, precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0<|x-a|<\delta \text{ então } \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\epsilon \tag{6}$$

Como

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| &= \left|\frac{a-x}{ax}\right|\\ &= \frac{|x-a|}{|a|\,|x|}\\ &= |x-a|\cdot\frac{1}{a|x|} \qquad (\text{pois } a>0)\end{aligned}$$

a afirmativa (6) é equivalente a

$$\text{se } 0<|x-a|<\delta \text{ então } |x-a|\cdot\frac{1}{a|x|}<\epsilon \tag{7}$$

Na parte final de (7), além de $|x - a|$, temos outro fator: o quociente $\frac{1}{a|x|}$. Logo, para provar (7) precisamos restringir δ para obtermos uma desigualdade envolvendo $\frac{1}{a|x|}$. Escolhendo o intervalo aberto exigido pela Definição 2.1.1 como sendo $(\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}a)$, que contém a mas não 0, estamos exigindo $\delta \leqslant \frac{1}{2}a$. Então,

$$\begin{aligned} & 0<|x-a|<\delta \quad \text{e} \quad \delta\leqslant\tfrac{1}{2}a\\ \Rightarrow\ & |x-a|<\tfrac{1}{2}a\\ \Rightarrow\ & -\tfrac{1}{2}a<x-a<\tfrac{1}{2}a\\ \Rightarrow\ & \tfrac{1}{2}a<x<\tfrac{3}{2}a\\ \Rightarrow\ & \tfrac{1}{2}a<|x|<\tfrac{3}{2}a \qquad (\text{pois } a>0)\\ \Rightarrow\ & \frac{2}{3a}<\frac{1}{|x|}<\frac{2}{a}\\ \Rightarrow\ & \frac{2}{3a^2}<\frac{1}{a|x|}<\frac{2}{a^2} \qquad (8)\end{aligned}$$

Agora

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{e} \quad \frac{1}{a|x|} < \frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \delta \cdot \frac{2}{a^2} \tag{9}$$

Como nossa meta é ter $|x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \epsilon$, a afirmativa (9) indica que devemos exigir $\delta \cdot \frac{2}{a^2} \leqslant \epsilon$, isto é, $\delta \leqslant \frac{1}{2}a^2 \epsilon$. Assim, com essas duas restrições em δ, escolhemos $\delta = \min(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a^2 \epsilon)$. Com esse δ usamos o seguinte argumento:

$$0 < |x - a| < \delta$$

$$\Rightarrow \quad |x - a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \delta \cdot \frac{1}{a|x|}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|x - a|}{|a|\,|x|} < \delta \cdot \frac{1}{a|x|} \qquad \text{(pois } a > 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a - x}{ax}\right| < \delta \cdot \frac{1}{a|x|}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \delta \cdot \frac{1}{a|x|} \tag{10}$$

Mostramos em (8) se $\delta \leqslant \frac{1}{2}a$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $\frac{1}{a\,|x|} < \frac{2}{a^2}$, isto é, $\delta \cdot \frac{1}{a\,|x|} < \delta \cdot \frac{2}{a^2}$. Continuando a partir de (10), temos

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \delta \cdot \frac{1}{a|x|} \quad \text{e} \quad \delta \cdot \frac{1}{a|x|} < \delta \cdot \frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \delta \cdot \frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \frac{1}{2}a^2\epsilon \cdot \frac{2}{a^2} \qquad \text{(pois } \delta \leqslant \tfrac{1}{2}a^2\epsilon\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon$$

Assim, mostramos que para todos $\epsilon > 0$, com $\delta = \min(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a^2 \epsilon)$, a seguinte afirmativa será verdadeira:

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon$$

Isso prova que $\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$, se $a > 0$. Logo, f é contínua em a, se $a > 0$.

■

Antes de enunciar novamente o Teorema de Limite 9 e demonstrá-lo usando os Teoremas 2.7.1 e 2.9.1, vamos dar um exemplo mostrando como os Teoremas 2.7.1 e 2.9.1 podem ser usados para determinar o limite de um dado quociente.

EXEMPLO 1 Usando os Teoremas 2.7.1 e 2.9.1, em vez de aplicar o Teorema de Limite 9 (limite de um quociente), encontre

$$\lim_{x\to 2} \frac{4x-3}{x^2+2x+5}$$

Solução Sejam f e g as funções definidas por

$$f(x) = 4x - 3 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + 2x + 5$$

Consideraremos $f(x)/g(x)$ como o produto de $f(x)$ por $1/g(x)$ e usaremos o Teorema de Limite 6 (limite de um produto). Primeiro, porém, precisamos encontrar $\lim\limits_{x\to 2} 1/g(x)$, o que é feito ao considerarmos $1/g(x)$ como o valor de uma função composta.

Se h for a função definida por $h(x) = 1/x$, então a função composta $h \circ g$ será a função definida por $h(g(x)) = 1/g(x)$. Agora

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} g(x) &= \lim_{x\to 2} (x^2 + 2x + 5)\\ &= 13\end{aligned}$$

Do Teorema 2.9.1, h é contínua em 13; assim, podemos usar o Teorema 2.7.1 e ter

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2+2x+5} &= \lim_{x\to 2} \frac{1}{g(x)}\\ &= \lim_{x\to 2} h(g(x))\\ &= h(\lim_{x\to 2} g(x)) \qquad \text{(pelo Teorema 2.7.1).}\\ &= h(13)\\ &= \tfrac{1}{13}\end{aligned}$$

Logo, usando o Teorema de Limite 6,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{4x-3}{x^2+2x+5} &= \lim_{x\to 2} (4x-3) \cdot \lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2+2x+5}\\ &= 5 \cdot \tfrac{1}{13}\\ &= \tfrac{5}{13}\end{aligned}$$

2.2.9 TEOREMA DE LIMITE 9

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ se } M \neq 0.$$

Prova Seja h a função definida por $h(x) = 1/x$. Então, a função composta de $h \circ g$ está definida por $h(g(x)) = 1/g(x)$. A função h é contínua em toda parte, exceto 0, o que segue do Teorema 2.9.1. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} &= \lim_{x\to a} h(g(x)) \\ &= h(\lim_{x\to a} g(x)) \qquad \text{(pelo Teorema 2.7.1)} \\ &= h(M) \\ &= \frac{1}{M}\end{aligned}$$

Do Teorema de limite 6 e do resultado acima,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} \\ &= L\cdot\frac{1}{M} \\ &= \frac{L}{M}\end{aligned}$$ ■

Para provar o Teorema de Limite 10 usando o Teorema 2.7.1, vamos precisar usar também o teorema sobre a continuidade da função f definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$, o qual foi enunciado como o Teorema 2.6.5 na secção 2.6, mas não foi provado. Faremos agora a sua demonstração, usando para tanto as seguintes fórmulas, onde n é qualquer número inteiro positivo:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \qquad (11)$$

A fórmula (11) segue de

$$a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1}$$

e

$$b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n$$

subtraindo os termos da segunda igualdade pelos da primeira igualdade.

2.6.5 TEOREMA

Se n for um inteiro positivo e

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

então,

(i) se n for ímpar, f será contínua em todo número real a;
(ii) se n for par, f será contínua em todo número positivo a.

Prova Provaremos o teorema para o caso em que a é um número positivo e n é par ou ímpar. O caso em que a é negativo ou nulo e n é ímpar será deixado como exercício (veja o Exercício 19).

Queremos provar que se $a > 0$ e $f(x) = \sqrt[n]{x}$, então f será contínua em a. Como $\sqrt[n]{a}$ existe quando $a > 0$, a demonstração estará completa se mostrarmos que

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Como $\sqrt[n]{x}$ está definida para todo número não-negativo, o intervalo aberto exigido pela Definição 2.1.1 poderá ser qualquer intervalo aberto contendo a e tendo um número não-negativo como extremo esquerdo. Precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon \tag{12}$$

Para expressarmos $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}|$ em termos de $|x - a|$ usaremos (11).

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \left|\frac{(x^{1/n} - a^{1/n})[(x^{1/n})^{n-1} + (x^{1/n})^{n-2}a^{1/n} + \ldots + x^{1/n}(a^{1/n})^{n-2} + (a^{1/n})^{n-1}]}{(x^{1/n})^{n-1} + (x^{1/n})^{n-2}a^{1/n} + \ldots + x^{1/n}(a^{1/n})^{n-2} + (a^{1/n})^{n-1}}\right|$$

Se (11) for aplicada ao numerador.

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = |x - a| \cdot \frac{1}{|x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n}a^{1/n} + \ldots + x^{1/n}a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}|}$$

Nessa equação expressaremos

$$|\phi(x)| = |x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n}a^{1/n} + \ldots + x^{1/n}a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}|$$

e obteremos

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} \tag{13}$$

Assim, a afirmativa (12) é equivalente a:

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \epsilon \tag{14}$$

Na parte final de (14), além do fator $|x - a|$, temos a fração $\dfrac{1}{|\phi(x)|}$. Logo, para provar (14) precisamos restringir δ de forma a ter uma desigualdade envolvendo essa fração. Se escolhermos o intervalo aberto estipulado na Definição 2.1.1 como sendo o intervalo $(0, 2a)$, estaremos exigindo que $\delta \leqslant a$. Então

$$\begin{aligned}
& 0 < |x - a| < \delta \quad \text{e} \quad \delta \leqslant a \\
\Rightarrow \quad & |x - a| < a \\
\Rightarrow \quad & -a < x - a < a \\
\Rightarrow \quad & 0 < x < 2a \\
\Rightarrow \quad & a^{(n-1)/n} < |\phi(x)| \qquad (\text{pois } x > 0) \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{|\phi(x)|} < \frac{1}{a^{(n-1)/n}}
\end{aligned} \tag{15}$$

Agora

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{e} \quad \frac{1}{|\phi(x)|} < \frac{1}{a^{(n-1)/n}}$$

$$\Rightarrow \quad |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \delta \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \tag{16}$$

Nossa meta é obter $|x - a| \cdot \dfrac{1}{|\phi(x)|} < \epsilon$. Assim, a afirmativa (16) mostra que devemos exigir $\delta \cdot \dfrac{1}{a^{(n-1)/n}} \leqslant \epsilon$, isto é, $\delta \leqslant a^{(n-1)/n}\epsilon$. Assim, escolhemos $\delta = \min(a, a^{(n-1)/n}\epsilon)$. Com esse δ usamos o seguinte argumento:

$$0 < |x - a| < \delta$$

$$\Rightarrow \quad |x - a| \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \delta \cdot \frac{1}{|\phi(x)|}$$

$$\Rightarrow \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \delta \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} \qquad \text{(de (13))}$$

Mostramos em (15) que se $\delta \leqslant a$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $\dfrac{1}{|\phi(x)} < \dfrac{1}{a^{(n-1)/n}}$, isto é, $\delta \cdot \dfrac{1}{|\phi(x)|} < \delta \cdot \dfrac{1}{a^{(n-1)/n}}$. Continuando, teremos

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \delta \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} \quad \text{e} \quad \delta \cdot \frac{1}{|\phi(x)|} < \delta \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}}$$

$$\Rightarrow \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \delta \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}}$$

$$\Rightarrow \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < a^{(n-1)/n}\epsilon \cdot \frac{1}{a^{(n-1)/n}} \qquad (\text{pois } \delta \leqslant a^{(n-1)/n}\epsilon)$$

$$\Rightarrow \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$$

Demonstramos que para todo $\epsilon > 0$, com $\delta = \min(a, a^{(n-1)/n}\epsilon)$, a seguinte afirmativa é verdadeira:

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$$

Logo, provamos que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, sendo a um número positivo. Portanto f é contínua em a, se $a > 0$. ■

Como fizemos com o Teorema de Limite 9, antes de enunciar novamente o Teorema de Limite 10 e apresentar a sua demonstração usando os Teoremas 2.7.1 e 2.6.5, daremos um exemplo mostrando como podemos usar esses teoremas para encontrar o limite da raiz enésima de uma dada função.

EXEMPLO 2 Usando os Teoremas 2.7.1 e 2.6.5, e não o Teorema de Limite 10 (limite da raiz enésima de uma função), encontre

$$\lim_{x \to 7} \sqrt[4]{3x - 5}$$

Solução Sejam h e f as funções definidas por

$$h(x) = \sqrt[4]{x} \quad \text{e} \quad f(x) = 3x - 5$$

A função composta $h \circ f$ está definida por $h(f(x) = \sqrt[4]{f(x)}$. Agora

$$\lim_{x \to 7} f(x) = \lim_{x \to 7} (3x - 5)$$
$$= 16$$

Pelo Teorema 2.6.5, a função h é contínua em 16. Logo, podemos usar o Teorema 2.7.1 e obter

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 7} \sqrt[4]{3x-5} &= \lim_{x\to 7} \sqrt[4]{f(x)} \\
&= \lim_{x\to 7} h(f(x)) \\
&= h(\lim_{x\to 7} f(x)) \qquad \text{(pelo Teorema 2.7.1)} \\
&= h(16) \\
&= 2
\end{aligned}$$

2.2.10 TEOREMA DE LIMITE 10

Se n for um inteiro positivo e $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

com a restrição de que se n for par, $L > 0$.

Prova Seja h a função definida por $h(x) = \sqrt[n]{x}$. Então, a função composta $h \circ f$ será definida por $h(f(x)) = \sqrt[n]{f(x)}$. Do Teorema 2.6.5, segue que h será contínua em L, se n for ímpar ou se n for par e $L > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} &= \lim_{x\to a} h(f(x)) \\
&= h(\lim_{x\to a} f(x)) \qquad \text{(pelo Teorema 2.7.1)} \\
&= h(L) \\
&= \sqrt[n]{L}
\end{aligned}$$

■

EXERCÍCIOS 2.9

Nos Exercícios de 1 a 6, use os Teoremas 2.7.1 e 2.9.1, em vez do Teorema de Limite 9, para encontrar os limites.

1. $\lim_{x\to 3} \frac{4}{x+1}$
2. $\lim_{x\to -2} \frac{8}{3x+2}$
3. $\lim_{t\to -1} \frac{t+4}{t-2}$
4. $\lim_{y\to 3} \frac{y-1}{y+5}$
5. $\lim_{x\to 2} \frac{3x}{2x^2-3x+4}$
6. $\lim_{t\to 4} \frac{2t}{t^2-4}$

Nos Exercícios de 7 a 12, use os Teoremas 2.7.1 e 2.6.5, em vez do Teorema de Limite 10, para encontrar os limites.

7. $\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2-5}$
8. $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{x-1}$
9. $\lim_{y\to -4} \sqrt[3]{3y+4}$
10. $\lim_{t\to -1/2} \sqrt{8t^3+6}$
11. $\lim_{t\to 1} \sqrt[4]{t^2+5t+3}$
12. $\lim_{y\to 0} \sqrt[3]{y^2-1}$

13. Se a função g for contínua num número a e a função f for descontínua em a, é possível que o quociente das duas funções f/g seja contínuo em a? Prove a sua resposta.
14. Se $f(x)$ for não-negativa para todo x em seu domínio, e $\lim_{x\to a} [f(x)]^2$ existir e for positivo, prove que $\lim_{x\to a} f(x) = \sqrt{\lim_{x\to a} [f(x)]^2}$.
15. Prove que se $\lim_{x\to a} f(x)$ existir e for L, então $\lim_{x\to a} |f(x)|$ existe e é $|L|$.
16. Prove que se $f(x) = g(x)$ para todos os valores de x, exceto $x = a$, então $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$, se os limites existirem.
17. Prove que se $f(x) = g(x)$ para todos os valores de x, exceto $x = a$, então se $\lim_{x\to a} g(x)$ não existir, o $\lim_{x\to a} f(x)$ também não existirá. (*Sugestão:* mostre que a hipótese de que $\lim_{x\to a} f(x)$ exista nos levará a uma contradição.)
18. Prove o Teorema 2.9.1, se $a < 0$.
19. Prove o Teorema 2.6.5 para o caso em que a é negativo ou nulo e n é ímpar.

2.10 TEOREMAS ADICIONAIS DE LIMITES DE FUNÇÕES *(Suplementar)*

Vamos discutir agora quatro teoremas que são necessários à demonstração de alguns teoremas importantes em secções posteriores. Após o enunciado de cada teorema será dada uma ilustração gráfica.

2.10.1 TEOREMA Se $\lim_{x \to c} f(x)$ existir e for positivo, então haverá um intervalo aberto contendo c, tal que $f(x) > 0$ para todo $x \neq c$ no intervalo.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \frac{5}{2x - 1}$$

Um esboço do gráfico de f está na Figura 1. Como $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$ e $1 > 0$, de acordo com o Teorema 2.10.1 haverá um intervalo aberto contendo 3, tal que $f(x) > 0$ para todo $x \neq 3$ nesse intervalo. Tal intervalo será, por exemplo, $(2, 4)$. Na verdade, qualquer intervalo aberto (a, b) para o qual $\frac{1}{2} \leqslant a < 3$ e $b > 3$, serve de exemplo. ◀

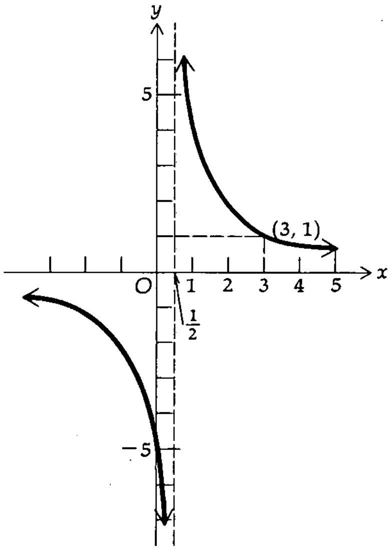


FIGURA 1

Prova do Teorema 2.10.1 Seja $L = \lim_{x \to c} f(x)$. Por hipótese, $L > 0$. Aplicando a Definição 2.1.1 e tomando $\epsilon = \frac{1}{2}L$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - c| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \tfrac{1}{2}L \tag{1}$$

Também, $|f(x) - L| < \frac{1}{2}L$ equivale a $-\frac{1}{2}L < f(x) - L < \frac{1}{2}L$ (consulte o Teorema 1.1.10), o que por sua vez equivale a

$$\tfrac{1}{2}L < f(x) < \tfrac{3}{2}L \tag{2}$$

Também, $0 < |x - c| < \delta$ equivale a $-\delta < x - c < \delta$, $x \neq c$, o que por sua vez equivale a

$$c - \delta < x < c + \delta \quad \text{mas} \quad x \neq c$$

$$\Leftrightarrow x \text{ está no intervalo aberto } (c - \delta, c + \delta) \text{ mas } x \neq c \tag{3}$$

Das afirmativas (2) e (3), podemos substituir (1) pela afirmativa:

se x estiver no intervalo aberto $(c - \delta, c + \delta)$, $x \neq c$, então $\frac{1}{2}L < f(x) < \frac{2}{3}L$.

Como $L > 0$, segue que $f(x) > 0$ para todo $x \neq c$ no intervalo aberto $(c - \delta, c + \delta)$. ■

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x) = \frac{-3x}{2x - 7}$$

(a) Mostre que $\lim_{x \to 1} f(x) > 0$. (b) Verifique o Teorema 2.10.1 para essa função, encontrando um intervalo aberto que contenha 1 e no qual $f(x) > 0$ para todo $x \neq 1$ no intervalo.

Solução

(a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{-3x}{2x - 7} = \dfrac{3}{5}$ e $\dfrac{3}{5} > 0$

(b) Os valores de x no intervalo aberto pedido devem ser tais que

$$\frac{-3x}{2x-7} > 0 \tag{4}$$

A desigualdade (4) será satisfeita quando ambos o numerador e o denominador forem positivos, ou quando ambos forem negativos. Há, portanto, dois casos a considerar:

Caso 1: $-3x > 0$ e $2x - 7 > 0$.
Isto é, $x < 0$ e $x > \frac{7}{2}$. Não existe valor de x que satisfaça ambas as desigualdades. Logo, o conjunto-solução do Caso 1 é vazio.

Caso 2: $-3x < 0$ e $2x - 7 < 0$.
Isto é, $x > 0$ e $x < \frac{7}{2}$. O conjunto-solução é o intervalo $(0, \frac{7}{2})$. Assim, a desigualdade (4) será satisfeita se x estiver no intervalo aberto $(0, \frac{7}{2})$.

Concluímos, então, que todo intervalo aberto (a, b), para o qual $0 \leqslant a < 1$ e $1 < b \leqslant \frac{7}{2}$, será tal que conterá 1 e $f(x) > 0$ para $x \neq 1$, sendo x pertencente a ele. O intervalo $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ é um exemplo.

2.10.2 TEOREMA Se $\lim_{x \to c} f(x)$ existir e for negativo, existirá um intervalo aberto contendo c, tal que $f(x) < 0$ para todo $x \neq c$ no intervalo.

A demonstração desse teorema é similar à do Teorema 2.10.1 e será deixada como exercício (veja o Exercício 17).

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Seja

$$g(x) = \frac{6-x}{3-2x}$$

A Figura 2 mostra um esboço do gráfico de $g \cdot \lim_{x \to 2} g(x) = -4$ e $-4 < 0$; logo, pelo Teorema 2.10.2 existe um intervalo aberto contendo 2, tal que $g(x) < 0$ para todo $x \neq 2$ no intervalo. Como exemplo de tal intervalo temos $(\frac{3}{2}, 3)$. Qualquer intervalo aberto (a, b) para o qual $\frac{3}{2} \leqslant a < 2$ e $2 < b \leqslant 6$ será suficiente. ◀

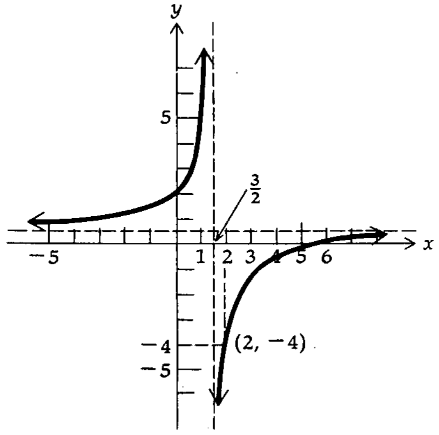


FIGURA 2

O exemplo a seguir ilustra o Teorema 2.10.2.

EXEMPLO 2 Dada

$$g(x) = \frac{1}{1-2x}$$

(a) Determine os valores de k, tais que $\lim_{x \to k} g(x) < 0$. (b) Ache todos os intervalos abertos (a, b) contendo um determinado valor de k que satisfaça a parte (a), tais que $g(x) < 0$ para todo $x \neq k$ em (a, b). (c) Faça um esboço do gráfico de g, e mostre no gráfico a interpretação geométrica dos resultados das partes (a) e (b).

Solução

(a) Se $k \neq \frac{1}{2}$,

$$\lim_{x \to k} \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1-2k}$$

Queremos encontrar os valores de k para os quais

$$\frac{1}{1-2k} < 0$$

Essa desigualdade será satisfeita se e somente se o denominador for negativo, isto é, se e somente se

$$1 - 2k < 0$$
$$-2k < -1$$
$$k > \tfrac{1}{2}$$

Logo, $\lim\limits_{x \to k} g(x) < 0$, sempre que k estiver no intervalo $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

(b) Como $g(x) < 0$ se e somente se $x > \frac{1}{2}$, os intervalos abertos requeridos (a, b) contendo k e tais que $g(x) < 0$ são aqueles para os quais $\frac{1}{2} \leqslant a < k$ e $b > k$.

(c) Um esboço do gráfico de g está na Figura 3, onde um valor de $k > \frac{1}{2}$ foi escolhido. Note que $\lim\limits_{x \to k} g(x) = g(k)$ e assim sendo g é contínua em k. O ponto $(k, g(k))$ está no gráfico e $g(k) < 0$. Observe que para todos os valores de x em qualquer intervalo aberto (a, b), onde $\frac{1}{2} \leqslant a < k$ e $b > k$, o gráfico está no quarto quadrante, e assim $g(x) < 0$.

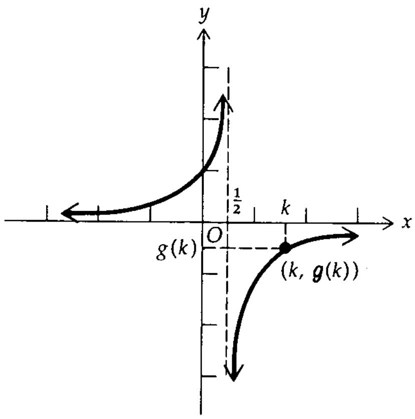


FIGURA 3

2.10.3 TEOREMA Suponha que a função f esteja definida em algum intervalo aberto I contendo c, exceto possivelmente em c. Suponha também que exista algum número M para o qual haja um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - c| < \delta$, então $f(x) \leqslant M$. Logo, se $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existir e for igual a L, $L \leqslant M$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** A Figura 4 mostra um esboço do gráfico de uma função f que satisfaz a hipótese do Teorema 2.10.3. Note pela figura, que $f(1)$ não está definida, mas f está definida no intervalo aberto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, exceto em 1. Além disso, se $0 < |x - 1| < \frac{1}{2}$, então $f(x) \leqslant \frac{9}{4}$. Logo, segue do Teorema 2.10.3 que se $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existir e for L, então $L \leqslant \frac{9}{4}$. Da figura, observe que existe um L e é 2. ◀

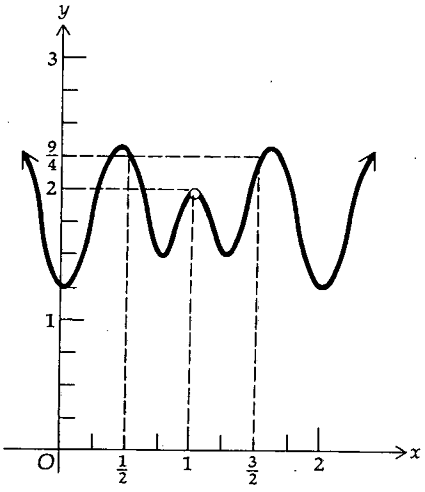


FIGURA 4

Prova do Teorema 2.10.3 Suporemos que $M < L$ e vamos mostrar que essa hipótese leva a uma contradição. Se $M < L$, existirá algum $\epsilon > 0$ tal que $M + \epsilon = L$. Como $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - c| < \delta_1 \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \text{ se } 0 < |x - c| < \delta_1 \text{ então } L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

Substituindo L por $M + \epsilon$, segue que existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - c| < \delta_1 \text{ então } (M + \epsilon) - \epsilon < f(x)$$
$$\Leftrightarrow \text{ se } 0 < |x - c| < \delta_1 \text{ então } M < f(x) \tag{5}$$

Mas, por hipótese, existe um δ tal que

$$\text{se } 0 < |x - c| < \delta \text{ então } f(x) \leqslant M \tag{6}$$

As afirmativas (5) e (6) são contraditórias. Logo, nossa hipótese de que $M < L$ é falsa. Portanto, $L \leqslant M$. ■

2.10.4 TEOREMA Suponha que a função f esteja definida em algum intervalo I contendo c, exceto possivelmente em c. Suponha também que exista algum número M para o qual haja um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - c| < \delta$, então $f(x) \geqslant M$. Assim, se $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existir e for igual a L, $L \geqslant M$.

A demonstração será deixada como exercício (veja o Exercício 18).

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** A Figura 4 também ilustra o Teorema 2.10.4. Na figura, observe que se $0 < |x - 1| < \frac{1}{2}$, então $f(x) \geqslant \frac{3}{2}$; e, como f está definida no intervalo aberto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, exceto em 1, conforme estabelecido previamente, o Teorema 2.10.4 afirma que se $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existir e for L, então $L \geqslant \frac{3}{2}$. ◀

EXERCÍCIOS 2.10

Nos Exercícios de 1 a 4, são dados uma função f e um número c. (a) Mostre que $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$; (b) verifique o Teorema 2.10.1 para a função f, encontrando um intervalo aberto contendo c, tal que $f(x) > 0$ para todo $x \neq c$ no intervalo.

1. $f(x) = \dfrac{5}{2x + 4}$; $c = 3$ **2.** $f(x) = \dfrac{7}{2x - 1}$; $c = 4$

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$; $c = 1$ **4.** $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$; $c = -1$

Nos Exercícios de 5 a 8, são dados uma função g e um número c. (a) Mostre que $\lim\limits_{x \to c} g(x) < 0$; (b) verifique o Teorema 2.10.2 para a função g, encontrando um intervalo aberto contendo c, tal que $g(x) < 0$ para todo $x \neq c$ no intervalo.

5. $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$; $c = -3$ **6.** $g(x) = \dfrac{2 - 7x + 3x^2}{2 - x}$; $c = 2$

7. $g(x) = \dfrac{2 - \sqrt{4 + x}}{x}$; $c = 0$ **8.** $g(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{3 - x}$; $c = 3$

Nos Exercícios 9 e 10, uma função f é dada. (a) Determine os valores de k tais que $\lim\limits_{x \to k} f(x) > 0$. (b) Ache todos os intervalos abertos (a, b) contendo um valor particular de k que satisfaçam a parte (a) tais que $f(x) < 0$ para todo $x \neq k$ em (a, b). (c) Faça um esboço do gráfico de f e mostre no gráfico a interpretação geométrica dos resultados das partes (a) e (b).

9. $f(x) = \dfrac{3x}{x + 1}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5}$

Nos Exercícios 11 e 12 é dada uma função g. (a) Determine os valores de k tais que $\lim\limits_{x \to k} g(x) < 0$. (b) Ache todos os intervalos abertos (a, b) que contêm um determinado valor de k que satisfaça a parte (a) tais que $g(x) < 0$ para todo $x \neq k$ em (a, b). (c) Faça um esboço do gráfico de g e mostre no gráfico a interpretação geométrica dos resultados das partes (a) e (b).

11. $g(x) = \dfrac{2x^2 + x - 6}{2x^2 + 11x + 14}$ **12.** $g(x) = 2 - \sqrt{x - 1}$

13. Faça um esboço do gráfico de uma função f satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.10.3 para a qual $f(2)$ não é definida. A função f está definida no intervalo aberto (1, 3), exceto em 2. Além disso, seja $f(x) \leqslant 5$ se $0 < |x - 2| < 1$ e seja $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ igual ao número L. Mostre, na figura, que $L \leqslant 5$.

14. Faça um esboço do gráfico de uma função f satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.10.3 para a qual $f(0)$ não é definida. A função f está definida no intervalo aberto $(-2, 2)$, exceto em 0. Além disso, seja $f(x) \leqslant 3$ se $0 < |x| < 2$ e seja $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ igual a um número L. Mostre na figura que $L \leqslant 3$.

15. Faça um esboço do gráfico de uma função satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.10.4 para a qual $f(0)$ não é definida. A função f está definida no intervalo aberto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, exceto em 0. Além disso, seja $f(x) \geqslant 2$ se $0 < |x| < \frac{1}{2}$ e seja $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ igual ao número L. Mostre na figura que $L \geqslant 2$.

16. Faça um esboço do gráfico de uma função f satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.10.4 para a qual $f(1)$ não é definida. A função f está definida no intervalo aberto $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$, exceto em 1. Além disso, seja $f(x) \geqslant 0$, se $0 < |x - 1| < \frac{1}{4}$ e seja $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ igual ao número L. Mostre na figura que $L \geqslant 0$.

17. Prove o Teorema 2.10.2. **18.** Prove o Teorema 2.10.4.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 2

Nos Exercícios de 1 a 8, calcule o limite e, quando aplicável, indique o teorema de limite usado.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-4x+5)$

2. $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{h^2-4}{3h^3+6}$

3. $\lim\limits_{z\to -3}\dfrac{z^2-9}{z+3}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-5x-14}$

5. $\lim\limits_{x\to 1/2}\sqrt[3]{\dfrac{4x^2+4x-3}{4x^2-1}}$

6. $\lim\limits_{y\to -4}\sqrt{\dfrac{5y+4}{y-5}}$

7. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{9-t}-3}{t}$

8. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+t}}{t}$

Nos Exercícios de 9 a 18, estabeleça o limite usando a Definição 2.1.1; isto é, para qualquer $\epsilon > 0$, ache um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \epsilon$.

9. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)=1$

10. $\lim\limits_{x\to -2}(8-3x)=14$

11. $\lim\limits_{x\to -1}(3x+8)=5$

12. $\lim\limits_{x\to 5}(4x-11)=9$

13. $\lim\limits_{x\to -4}x^2=16$

14. $\lim\limits_{x\to 1/2}x^2=\frac{1}{4}$

15. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x)=-2$

16. $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-x-6)=9$

17. $\lim\limits_{x\to -3/4}\dfrac{16x^2-9}{4x+3}=-6$

18. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{1-9x^2}{1-3x}=2$

Nos Exercícios de 19 a 48, ache o limite, se existir.

19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{3x^2+8x+5}$

20. $\lim\limits_{y\to 3}\sqrt{\dfrac{y-3}{y^3-27}}$

21. $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ se $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{se } x\leqslant 3\\ x+5 & \text{se } 3<x\end{cases}$

22. $\lim\limits_{x\to 1/3}(|3x-1|-5)$

23. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{2\sqrt{x}-6}{x-9}$

24. $\lim\limits_{y-5^-}\dfrac{\sqrt{25-y^2}}{y-5}$

25. $\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{2x}{16-x^2}$

26. $\lim\limits_{s\to 7}\dfrac{5-\sqrt{4+3s}}{7-s}$

27. $\lim\limits_{t\to 5}\dfrac{\sqrt{t-4}}{t^2-10t+25}$

28. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-5}{2x^3-3x^2}$

29. $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{[\![x]\!]-1}{[\![x]\!]-x}$

30. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

31. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4}$

32. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x-3}{5x^2-x+1}$

33. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+5}{2x-4}$

34. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{8x^3+7x-2}{7x^3+3x^2+5x}\right)^2$

35. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

36. $\lim\limits_{t\to +\infty}(\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t^2+4})$

37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen} 3x}$

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$

39. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 5t}{\operatorname{sen} 2t}$

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}$

41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x}$

42. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{4t}{\operatorname{tg} t}$

43. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\operatorname{cosec} 3\theta}{\operatorname{cotg} \theta}$

44. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8}$

45. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{(t+a)^2}-\sqrt[3]{a^2}}{t}$

46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-3x}{2\operatorname{sen} x}$

47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$ $\left(\right.$*Sugestão:* escreva

$$\left.\frac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x^2}+\frac{\sqrt[4]{x^4+1}-1}{x^2}.\right)$$

48. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{[\![x^2]\!]-[\![x]\!]^2}{x^2-1}$

Nos Exercícios de 49 a 54, ache as assíntotas horizontais e verticais e desenhe um esboço do gráfico da função.

49. $f(x)=\dfrac{x+8}{x-4}$

50. $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-2}$

51. $g(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

52. $f(x)=\dfrac{-2}{x^2-x-6}$

53. $f(x)=\dfrac{5x^2}{x^2-4}$

54. $h(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

Nos Exercícios 55 e 56, ache as assíntotas horizontais e verticais e trace um esboço do gráfico da equação.

55. $xy-3x+4y=0$

56. $xy-5x-3y+2=0$

Nos Exercícios de 57 a 62 faça um esboço do gráfico da função; então, observando as quebras no gráfico, determine os valores da variável independente nos quais a função é descontínua e mostre, em cada caso de descontinuidade, por que a Definição 2.6.1 não é satisfeita.

57. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+x-2}$

58. $g(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

59. $g(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{se } x\leqslant -2\\ x-2 & \text{se } -2<x\leqslant 2\\ 2-x & \text{se } 2<x\end{cases}$

60. $F(x)=\begin{cases}|4-x| & \text{se } x\neq 4\\ -2 & \text{se } x=4\end{cases}$

61. $h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{se } x\leqslant 1\\ x^2-1 & \text{se } 1<x\end{cases}$

62. $f(x)=\begin{cases}x^2-9 & \text{se } x<3\\ 5 & \text{se } x=3\\ 9-x^2 & \text{se } 3\leqslant x\end{cases}$

Nos Exercícios de 63 a 68, defina $f \circ g$ e determine os números nos quais $f \circ g$ é contínua.

63. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 25 - x^2$

64. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 25$

65. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{3 - x}}$; $g(x) = |x|$

66. $f(x) = \sqrt{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

67. $f(x) = \operatorname{sgn} x$; $g(x) = x^2 - 1$

68. $f(x) = \operatorname{sgn} x$; $g(x) = x^2 - x$

Nos Exercícios de 69 a 72, determine o maior intervalo (ou união de intervalos) no qual a função $f \circ g$ do exercício indicado seja contínua.

69. Exercício 63.

70. Exercício 64.

71. Exercício 65.

72. Exercício 66.

Nos Exercícios 73 e 74, determine o maior intervalo (ou união de intervalos) no qual a função seja contínua.

73. $f(x) = \begin{cases} -x - 6 & \text{se } x < -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{se } -4 \leqslant x < 4 \\ x - 6 & \text{se } 4 \leqslant x \end{cases}$

74. $f(x) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x + 2}$

Nos Exercícios de 75 a 78, prove que a função é descontínua no número a. Então, determine se a descontinuidade é removível ou essencial. Se for removível, redefina f(a) de forma a remover a descontinuidade.

75. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 3x - 4}$; $a = -4$

76. $f(x) = \left\{ \begin{matrix} 4 - x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 3 & \text{se } 1 \leqslant x \end{matrix} \right\}$; $a = 1$

77. $f(x) = \dfrac{|2x - 1|}{2x - 1}$; $a = \dfrac{1}{2}$

78. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x + 4}}{x}$; $a = 0$

Nos Exercícios 79 e 80, use o teorema do "sanduíche" para determinar o limite.

79. $\lim\limits_{x \to 1} \left[(x - 1)^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x - 1}} \right]$

80. $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$ se $|g(x) + 5| < 3(4 - x)^2$ para todo x

Nos Exercícios 81 e 82, ache os valores das constantes a e b que tornam contínua a função f em $(-\infty, +\infty)$ e faça um esboço do gráfico de f.

81. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leqslant 3 \\ ax + b & \text{se } 3 < x < 5 \\ x^2 + 2 & \text{se } 5 \leqslant x \end{cases}$

82. $f(x) = \begin{cases} 3x + 6a & \text{se } x < -3 \\ 3ax - 7b & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ x - 12b & \text{se } 3 < x \end{cases}$

83. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ for inteiro} \\ 0 & \text{se } x \text{ não for inteiro} \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Para quais valores de a existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$? (c) Em quais números f é contínua?

84. Faça um esboço do gráfico de uma função f que satisfaça as seguintes condições: f é contínua em $(-\infty, -2)$, $[-2, 1]$, $[1, 3]$, e $(3, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2+} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0$.

85. Trace um esboço do gráfico de f se $f(x) = [\![1 - x^2]\!]$ e $-2 \leqslant x \leqslant 2$. (a) O $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe? (b) f é contínua em 0?

86. Trace um esboço do gráfico de g se $g(x) = (x - 1)[\![x]\!]$ e $0 \leqslant x \leqslant 2$. (a) O $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ existe? (b) g é contínua em 1?

87. Dê um exemplo de uma função para a qual $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)|$ existe, mas $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe.

88. Se a função g for contínua em a e f for contínua em $g(a)$, a função composta $f \circ g$ será contínua em a? Por quê?

Nos Exercícios 89 e 90, são dados uma função f e um intervalo fechado [a, b]. Verifique se o teorema do valor intermediário é aplicável para o valor dado de k e ache um número c tal que f(c) = k. Faça um esboço da curva e da reta y = k.

89. $f(x) = x^2 + 3$; $[a, b] = [2, 4]$; $k = 10$

90. $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}$; $[a, b] = [0, 4]$; $k = -1$

91. (a) Prove que se $\lim\limits_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$, então

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = \lim_{h \to 0} f(x - h)$$

(b) Mostre que o inverso do teorema em (2) não é verdadeiro, dando exemplo de uma função para a qual $\lim\limits_{h \to 0} f(x + h) = \lim\limits_{h \to 0} f(x - h)$, mas $\lim\limits_{h \to 0} f(x + h) \neq f(x)$.

92. Dê exemplo de uma função f que seja descontínua em 1, para a qual (a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existe, mas $f(1)$ não existe; (b) $f(1)$ existe, mas $f(x)$ não existe; (c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ e $f(1)$ ambos existem, mas não são iguais.

93. Se o domínio de f for o conjunto de todos os números reais e se f for contínua em 0, prove que se $f(a + b) = f(a) + f(b)$ para todo a e b, então f será contínua em todo número.

94. Se o domínio de f for o conjunto de todos os números reais e se f for contínua em 0, prove que se $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ para todo a e b, então f será contínua em todo número.

Os Exercícios de 95 a 98 referem-se à Secção Suplementar 2.9. Nos Exercícios 95 e 96, use os Teoremas de 2.7.1 a 2.9.1, mas não o Teorema 9 (o limite de um quociente), para encontrar o limite.

95. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5 - 3x}{3 - x}$

96. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x - 3}{x^2 - x + 5}$

Nos Exercícios 97 e 98, use os Teoremas 2.7.1 e 2.6.5, mas não o Teorema 10 (o limite da enésima raiz), para encontrar o limite.

97. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{2x^2 - 9}$

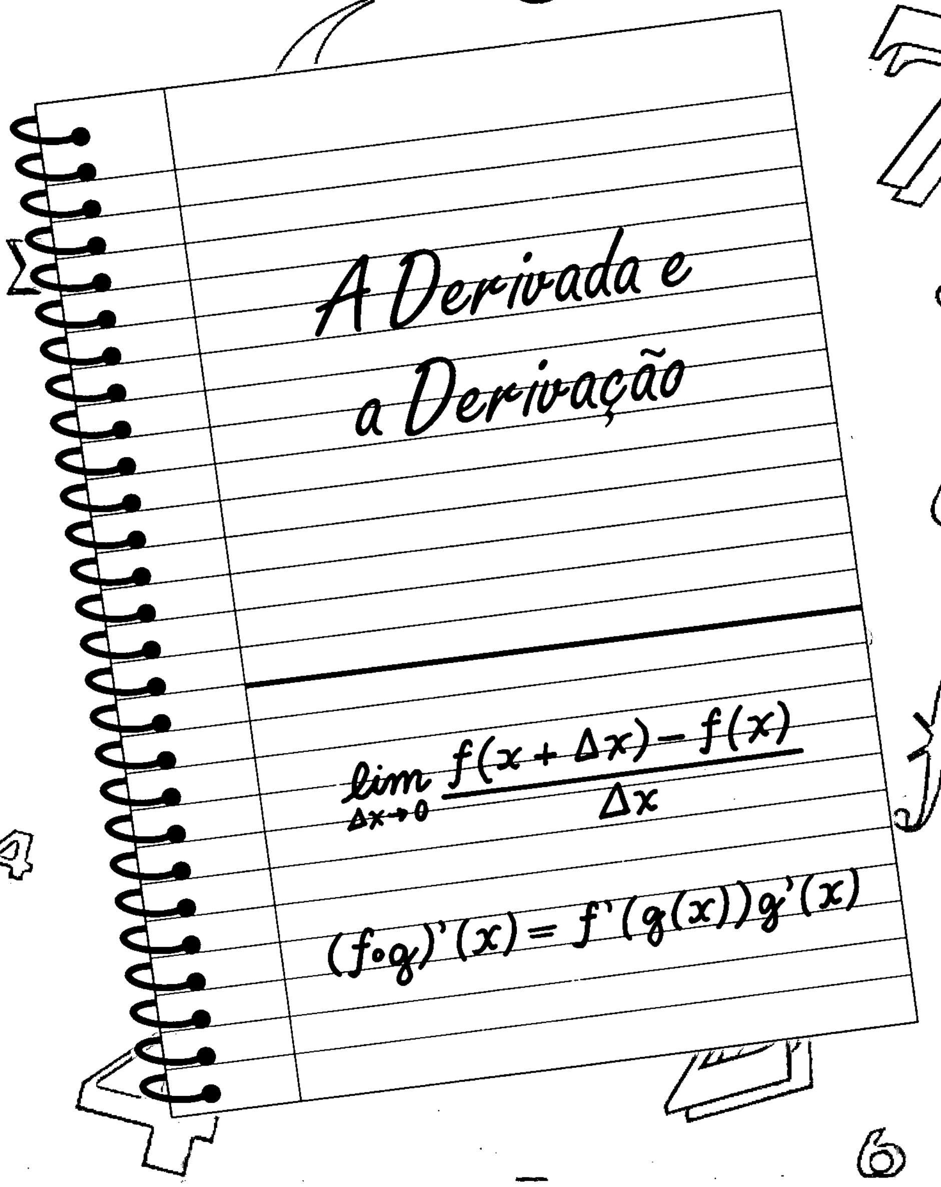
98. $\lim\limits_{x \to -4} \sqrt[3]{7 - 5x}$

Os Exercícios 99 e 100 referem-se à Secção Suplementar 2.10.

99. Dada $f(x) = \dfrac{4x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 6}$. (a) Mostre que $\lim\limits_{x \to -3/2} f(x) < 0$, (b) verifique o Teorema 2.10.2 para a função f, encontrando um intervalo aberto contendo $-\frac{3}{2}$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \neq -\frac{3}{2}$ no intervalo.

100. Dada $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 5}$. (a) Determine os valores de k tais que $\lim\limits_{x \to k} f(x) > 0$. (b) Ache todos os intervalos abertos (a, b) contendo um valor de k que satisfaça a parte (a) tal que $f(x) > 0$ para todo $x \neq k$ em (a, b). (c) Faça um esboço do gráfico de f e mostre no gráfico a interpretação geométrica dos resultados das partes (a) e (b).

TRÊS



A Derivada e a Derivação

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Introduzimos a *derivada* na Secção 3.1, considerando primeiro sua interpretação geométrica como a inclinação de uma reta tangente a uma curva. Uma função que tenha uma derivada será denominada *derivável*, e na Secção 3.2 discutiremos a relação entre diferenciabilidade e continuidade. A derivada é calculada pela operação de *derivação* e os teoremas que auxiliam o cálculo de funções algébricas são enunciados e provados na Secção 3.3.

Na Secção 3.4 interpretamos a derivada como uma taxa de variação. Essa interpretação mostra a sua importância em diversos campos. Por exemplo, em Física, a velocidade no movimento retilíneo é definida em termos de uma derivada, pois é a medida da taxa de variação da distância com relação ao tempo. A taxa de crescimento de bactérias é uma aplicação da derivada em Biologia.

A taxa de variação de uma reação química é um tópico de interesse para um químico. Os economistas estão preocupados com conceitos marginais tais como a receita marginal, o custo marginal e o lucro marginal, que são taxas de variação.

A derivação de funções trigonométricas será discutida na Secção 3.5, e na Secção 3.6 estabeleceremos e provaremos a *regra da cadeia*, um recurso poderoso que usaremos para derivar funções compostas. Aplicamos a regra da cadeia na Secção 3.7 para obter a fórmula da qual resulta a derivada da função potência para expoentes racionais; na Secção 3.8, para derivar funções definidas implicitamente; e na Secção 3.9, para resolver problemas envolvendo taxas relacionadas. Derivadas de ordem superior e suas aplicações, em Física, ao movimento retilíneo serão tratadas na Secção 3.10.

3.1 A RETA TANGENTE E A DERIVADA

Muitos dos problemas importantes de Cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva dada, em um determinado ponto dela. Para uma circunferência, sabemos da Geometria Plana que a reta tangente em um ponto seu é a reta que tem com ela um único ponto comum. Essa definição não é válida para uma curva em geral. Por exemplo, na Figura 1 a reta que queremos que seja a tangente à curva no ponto P intercepta a curva em outro ponto Q. Para chegar a uma definição adequada de reta tangente ao gráfico de uma função em um de seus pontos, começamos pensando em definir a inclinação da reta tangente no ponto. Então, a tangente é determinada por sua inclinação e pelo ponto de tangência.

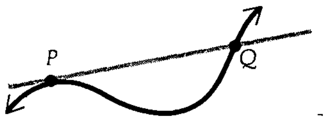


FIGURA 1

Consideremos a função f contínua em x_1. Queremos definir a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $P(x_1, f(x_1))$. Seja I o intervalo aberto que contém x_1 e no qual f está definida. Seja $Q(x_2, f(x_2))$ outro ponto do gráfico de f, tal que x_2 também esteja em I. Tracemos uma reta através de P e Q. Qualquer reta que passe por dois pontos de uma curva é chamada de **reta secante**, assim, a reta através de P e Q é uma reta secante. A Figura 2 mostra retas secantes para vários valores de x_2. A Figura 3 mostra uma determinada reta secante, onde Q está à direita de P. No entanto Q pode estar de qualquer lado de P, conforme mostra a Figura 2.

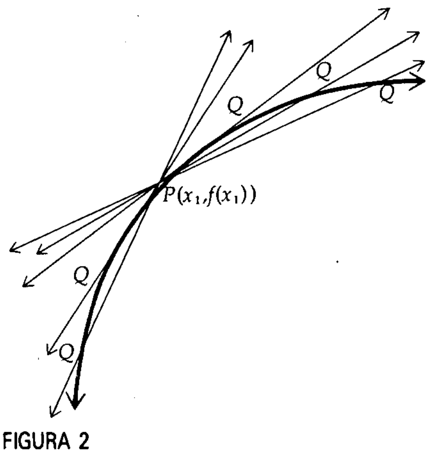


FIGURA 2

Vamos denotar a diferença entre as abscissas de Q e de P por Δx (lemos "delta x"), assim

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Observe que Δx denota uma variação nos valores de x, quando ele muda de x_1 para x_2 e pode ser positiva ou negativa. Essa variação é chamada de *incremento de x*. Tome cuidado com o símbolo Δx, para o incremento de x; ele não deve ser interpretado como o "produto de Δ por x".

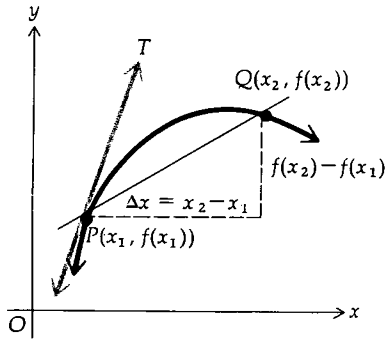


FIGURA 3

Retornando à reta secante PQ da Figura 3, sua inclinação é dada por

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

desde que a reta PQ não seja vertical. Como $x_2 = x_1 + \Delta x$, a inclinação de PQ pode ser escrita como

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Vamos agora considerar o ponto P como fixo e o ponto Q como móvel, ao longo da curva em direção a P, isto é, Q tende a P. Isto equivale a dizer que Δx tende a zero. Quando isso ocorre, a reta secante gira em torno do ponto fixo P. Se a reta secante tiver uma posição limite desejaremos essa posição limite como sendo a da reta tangente ao gráfico f em P. Assim, queremos que a inclinação da reta tangente ao gráfico em P seja o limite de m_{PQ} quando Δx tende a zero, se esse limite existir. Se $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{PQ}$ for $+\infty$ ou $-\infty$, então, à medida que Δx tende a zero, a reta PQ aproxima-se da reta por P, que é paralela ao eixo y. Nesse caso, queremos que a reta tangente ao gráfico em P seja a reta $x = x_1$. Toda essa discussão leva-nos à seguinte definição:

3.1.1 DEFINIÇÃO Suponhamos que a função f seja contínua em x_1. A **reta tangente** ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é

(i) a reta por P tendo inclinação $m(x_1)$, dada por

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{1}$$

se o limite existir;

(ii) a reta $x = x_1$ se

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } +\infty \text{ ou } -\infty$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } +\infty \text{ ou } -\infty$$

Se nem (i) nem (ii) da Definição 3.1.1 forem verdadeiras, então não existirá reta tangente ao gráfico de f, no ponto $P(x_1, f(x_1))$.

EXEMPLO 1 Dada a parábola $y = x^2$, ache a inclinação da reta secante, nos quesitos de (a) até (c) pelos dois pontos: (a) (2, 4), (3, 9); (b) (2, 4), (2,1, 4,41); (c) (2, 4), (2,01, 4,0401). (d) Ache a inclinação da reta tangente à parábola no ponto (2, 4). (e) Faça um esboço do gráfico e mostre um segmento da reta tangente em (2, 4).

Solução Sejam m_a, m_b e m_c as inclinações das retas secantes em (a), (b) e (c), respectivamente.

(a) $m_a = \dfrac{9-4}{3-2}$

$= 5$

(b) $m_b = \dfrac{4{,}41 - 4}{2{,}1 - 2}$

$= \dfrac{0{,}41}{0{,}1}$

$= 4{,}1$

(c) $m_c = \dfrac{4{,}0401 - 4}{2{,}01 - 2}$

$= \dfrac{0{,}0401}{0{,}01}$

$= 4{,}01$

(d) Seja $f(x) = x^2$. De (1) temos

$$\begin{aligned} m(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) \\ &= 4 \end{aligned}$$

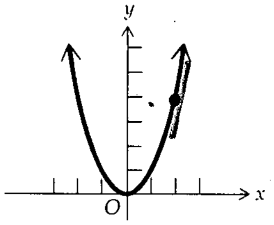


FIGURA 4

(e) A Figura 4 mostra um esboço do gráfico e um segmento da reta tangente em (2, 4).

EXEMPLO 2 Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico da função definida por $y = x^3 - 3x + 4$ no ponto (x_1, y_1).

Solução

$$f(x_1) = x_1^3 - 3x_1 + 4$$
$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) + 4$$

De (1),

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) + 4 - (x_1^3 - 3x_1 + 4)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2\,\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x_1 - 3\,\Delta x + 4 - x_1^3 + 3x_1 - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^2\,\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3\,\Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

Como $\Delta x \neq 0$, podemos dividir o numerador e o denominador por Δx e obter

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} [3x_1^2 + 3x_1\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3]$$

$$m(x_1) = 3x_1^2 - 3 \qquad (2)$$

Tabela 1

x	y	m
0	4	−3
1	2	0
2	6	9
−1	6	0
−2	2	9

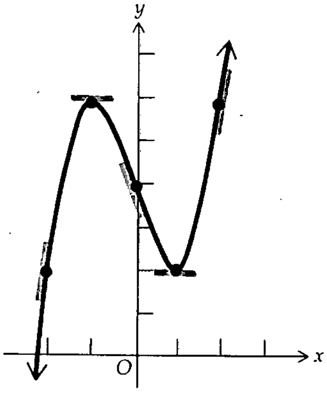


FIGURA 5

Para fazer um esboço do gráfico da função do Exemplo 2, colocamos pontos no gráfico e um segmento da reta tangente em alguns deles. Os valores de x são tomados arbitrariamente e o valor funcional correspondente é calculado pela equação dada, o valor de m é calculado de (2). Os resultados são apresentados na Tabela 1 e um esboço do gráfico aparece na Figura 5. É importante determinar os pontos onde o gráfico possui tangente horizontal. Como uma reta horizontal possui inclinação zero, esses pontos são encontrados ao resolvermos em x_1 à equação $m(x_1) = 0$. Fazendo os cálculos para esse exemplo temos $3x_1^2 - 3 = 0$, resultando $x_1 = \pm 1$. Assim sendo, nos pontos com abscissas -1 e 1 a reta tangente é paralela ao eixo x.

EXEMPLO 3 Ache uma equação da reta tangente à curva do Exemplo 2 no ponto (2, 6).

Solução Como a inclinação da reta tangente em qualquer ponto (x_1, y_1) é

$$m(x_1) = 3{x_1}^2 - 3$$

a inclinação da reta tangente no ponto (2, 6) é $m(2) = 9$. Logo, uma equação da reta pedida na forma ponto-inclinação é

$$y - 6 = 9(x - 2)$$

$$9x - y - 12 = 0$$

3.1.2 DEFINIÇÃO A **reta normal** a um gráfico em um dado ponto é a reta perpendicular à reta tangente naquele ponto.

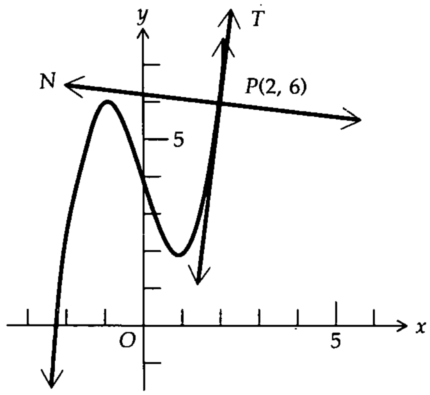


FIGURA 6

► **ILUSTRAÇÃO 1** A reta normal ao gráfico do Exemplo 2 no ponto (2, 6) é perpendicular à reta tangente naquele ponto. Do exemplo 3, a inclinação da reta tangente em (2, 6) é 9. Portanto, a inclinação da reta normal a (2, 6) é $-\frac{1}{9}$, e uma equação dessa reta normal é

$$y - 6 = -\tfrac{1}{9}(x - 2)$$

$$9y - 54 = -x + 2$$

$$x + 9y - 56 = 0$$

A Figura 6 mostra o gráfico e as retas tangente e normal em (2, 6). ◄

O tipo de limite em (1) usado para definir a inclinação da reta tangente é um dos mais importantes em Cálculo.

3.1.3 DEFINIÇÃO A **derivada** de uma função f é a função denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

se esse limite existir.

Se x_1 for um determinado número no domínio de f, então

$$\boxed{f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}} \tag{4}$$

Se esse limite existir. Comparando as fórmulas (1) e (4), note que a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ é precisamente a derivada de f calculada em x_1.

EXEMPLO 4 Ache a derivada de f se

$$f(x) = 3x^2 + 12$$

Solução Se x for qualquer número do domínio de f, então de (3),

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 12] - (3x^2 + 12)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 3x^2 - 12}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\,\Delta x) \\ &= 6x \end{aligned}$$

Logo, a derivada de f é a função f', definida por $f'(x) = 6x$. O domínio de f' é o conjunto de todos os números reais, sendo igual ao domínio de f.

Considere agora a fórmula (4), que é

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Nessa fórmula seja

$$x_1 + \Delta x = x \qquad (5)$$

Então

"$\Delta x \to 0$" é equivalente a "$x \to x_1$". (6)

De (4), (5) e (6) obtemos a seguinte fórmula para $f'(x_1)$:

$$\boxed{f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}} \qquad (7)$$

se o limite existir. A fórmula (7) é uma alternativa para (4) no cálculo de $f'(x_1)$.

EXEMPLO 5 Para a função f do Exemplo 4, ache a derivada de f em 2 de três maneiras: (a) Aplicando a fórmula (4); (b) aplicando a fórmula (7); (c) substituindo 2 por x na expressão de $f'(x)$ no Exemplo 4.

Solução

(a) $f(x) = 3x^2 + 12$. Da fórmula (4),

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(2 + \Delta x)^2 + 12] - [3(2)^2 + 12]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12 + 12\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 12 - 12}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\,\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 3\,\Delta x) \\
&= 12
\end{aligned}$$

(b) Da fórmula (7),

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{(3x^2 + 12) - 24}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} \\
&= 3 \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\
&= 3 \lim_{x \to 2} (x + 2) \\
&= 12
\end{aligned}$$

(c) Como, do Exemplo 4, $f'(x) = 6x$, então $f'(2) = 12$.

O uso do símbolo f' para a derivada da função f foi introduzido pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813), no século dezoito. Essa notação indica que a função f' é derivada da função f e seu valor em x é $f'(x)$.

Se (x, y) for um ponto do gráfico de f, então $y = f(x)$ e y' também será usado como notação para a derivada de $f(x)$. Com a função f definida pela equação $y = f(x)$, podemos expressar

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)} \tag{8}$$

onde Δy é chamado de *incremento* de y e denota a variação no valor da função quando x varia de Δx. Usando (8) e escrevendo $\dfrac{dy}{dx}$ em lugar de $f'(x)$, a fórmula (3) torna-se

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

O símbolo $\dfrac{dy}{dx}$ como notação para a derivada foi introduzido pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). No século dezessete Leibniz e Sir Isaac Newton (1642-1727), trabalhando independentemente, introduziram quase ao mesmo tempo o conceito de derivada. É provável que Leibniz considerasse dx e dy como pequenas variações nas variáveis x e y e a derivada de y em relação a x como a razão de dy por dx quando dy e dx tornam-se pequenos. O conceito de Limite como concebemos atualmente não era conhecido por Leibniz.

Na notação de Lagrange, o valor da derivada em $x = x_1$ é indicado por $f'(x_1)$. Com a notação de Leibniz escreveríamos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$$

Você deve se lembrar que enquanto $\dfrac{dy}{dx}$ foi usado como notação para derivada, dy e dx não tiveram, neste livro, significado independente, embora mais adiante eles serão definidos em separado. Assim, por enquanto, $\dfrac{dy}{dx}$ é um símbolo para a derivada e não deve ser considerado como uma razão. Na verdade, $\dfrac{d}{dx}$ pode ser considerado como um operador (um símbolo para a operação de cálculo da derivada) e quando escrevemos $\dfrac{dy}{dx}$, isto significa $\dfrac{d}{dx}(y)$, ou seja, a derivada de y em relação a x.

EXEMPLO 6 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$y = \sqrt{x-3}$$

Solução Temos $y = f(x)$, onde $f(x) = \sqrt{x-3}$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x-3} - \sqrt{x-3}}{\Delta x}\end{aligned}$$

Para avaliar esse limite, racionalizamos o numerador.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x-3} - \sqrt{x-3})(\sqrt{x+\Delta x-3} + \sqrt{x-3})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-3} + \sqrt{x-3})}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x-3) - (x-3)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-3} + \sqrt{x-3})}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-3} + \sqrt{x-3})}\end{aligned}$$

O numerador e o denominador são divididos por Δx (desde que $\Delta x \neq 0$) para obter

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x - 3} + \sqrt{x - 3}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x-3}}\end{aligned}$$

Duas outras notações para a derivada de uma função f são

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \quad \text{e} \quad D_x[f(x)]$$

Cada uma dessas notações permite-nos indicar a função original na expressão para a derivada. Por exemplo, podemos escrever o resultado do Exemplo 6

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x-3}) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \quad \text{ou} \quad D_x(\sqrt{x-3}) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

EXEMPLO 7 Calcule

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$$

Solução Queremos encontrar a derivada de $f(x)$ onde $f(x) = \dfrac{2+x}{3-x}$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{2+x}{3-x}\right) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2+x+\Delta x}{3-x-\Delta x} - \dfrac{2+x}{3-x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3-x)(2+x+\Delta x) - (2+x)(3-x-\Delta x)}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6+x-x^2+3\,\Delta x - x\,\Delta x) - (6+x-x^2-2\,\Delta x - x\,\Delta x)}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\,\Delta x}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{(3-x-\Delta x)(3-x)} \\ &= \frac{5}{(3-x)^2}\end{aligned}$$

Naturalmente, se a função e as variáveis forem denotadas por outras letras que não f, x e y, as notações para derivada incorporarão essas letras. Por exemplo, se a função g estiver definida pela equação $s = g(t)$, então a derivada de g poderá ser indicada em cada uma das seguintes formas:

$$g'(t) \qquad \frac{ds}{dt} \qquad \frac{d}{dt}[g(t)] \qquad D_t[g(t)]$$

EXERCÍCIOS 3.1

Nos Exercícios de 1 a 6, ache a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (x_1, y_1). Faça uma tabela de valores de x, y e m no intervalo fechado [a, b] e inclua na tabela todos os pontos onde o gráfico tem uma tangente horizontal. Faça um esboço do gráfico e mostre um segmento da reta tangente em cada ponto colocado no gráfico.

1. $y = 9 - x^2$; $[a, b] = [-3, 3]$
2. $y = x^2 + 4$; $[a, b] = [-2, 2]$
3. $y = -2x^2 + 4x$; $[a, b] = [-1, 3]$
4. $y = x^2 - 6x + 9$; $[a, b] = [1, 5]$
5. $y = x^3 + 1$; $[a, b] = [-2, 2]$
6. $y = 1 - x^3$; $[a, b] = [-2, 2]$

Nos Exercícios de 7 a 12, ache a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (x_1, y_1). Faça uma tabela dos valores de x, y e m nos vários pontos do gráfico e inclua na tabela todos os pontos onde o gráfico tem uma tangente horizontal. Faça um esboço do gráfico.

7. $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$ **8.** $f(x) = 7 - 6x - x^2$
9. $f(x) = \sqrt{4 - x}$ **10.** $f(x) = \sqrt{x + 1}$
11. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ **12.** $f(x) = x^3 - x^2 - x + 10$

Nos Exercícios de 13 a 20, ache uma equação da reta tangente à curva dada, no ponto indicado. Faça um esboço da curva com a reta tangente e a reta normal.

13. $y = x^2 - 4x - 5$; $(-2, 7)$ **14.** $y = x^2 - x + 2$; $(2, 4)$
15. $y = \frac{1}{8}x^3$; $(4, 8)$ **16.** $y = x^2 + 2x + 1$; $(1, 4)$
17. $y = \dfrac{6}{x}$; $(3, 2)$ **18.** $y = 2x - x^3$; $(-2, 4)$
19. $y = x^4 - 4x$; $(0, 0)$ **20.** $y = -\dfrac{8}{\sqrt{x}}$; $(4, -4)$

21. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ que é paralela à reta $8x - y + 3 = 0$.
22. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 - 4$ que é paralela à reta $3x + y = 4$.
23. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ que é perpendicular à reta $x - y = 0$.
24. Ache uma equação de cada reta tangente à curva $y = x^3 - 3x$ que é perpendicular à reta $2x + 18y - 9 = 0$.

Nos Exercícios de 25 a 30, ache f'(x) aplicando a fórmula (3).

25. $f(x) = 7x + 3$ **26.** $f(x) = 8 - 5x$
27. $f(x) = -4$ **28.** $f(x) = 3x^2 + 4$
29. $f(x) = 4 - 2x^2$ **30.** $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Nos Exercícios de 31 a 38, ache a derivada indicada.

31. $\dfrac{d}{dx}(8 - x^3)$ **32.** $\dfrac{d}{dx}(x^3)$ **33.** $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x})$
34. $D_x\left(\dfrac{1}{x + 1}\right)$ **35.** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x + 3}{3x - 2}\right)$ **36.** $D_x(\sqrt{3x + 5})$
37. $D_x\left(\dfrac{1}{x^2} - x\right)$ **38.** $D_x\left(\dfrac{3}{1 + x^2}\right)$

39. Dada: $f(x) = x^2$. (a) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$ quando Δx é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 e Δx é -1, $-0{,}5$, $-0{,}1$, $-0{,}01$, $-0{,}001$. A que $\dfrac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$ parece tender quando Δx aproxima-se de 0? (b) Ache $f'(3)$ aplicando a fórmula (4). (c) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ quando x é 4, 3,5, 3,1, 3,01, 3,001 e x é 2, 2,5, 2,9, 2,99, 2,999. A que $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ parece estar tendendo quando x aproxima-se de 3? (d) Ache $f'(3)$ aplicando a fórmula (7).

40. Dada: $f(x) = x^3$. (a) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(2 + x) - f(2)}{\Delta x}$ quando Δx é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 e Δx é -1, $-0{,}5$, $-0{,}1$, $-0{,}01$, $-0{,}001$. A que $\dfrac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ parece tender quando Δx aproxima-se de zero? (b) Encontre $f'(2)$ aplicando a fórmula (4). (c) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ quando x é 3, 2,5, 2,1, 2,01, 2,001 e x é 1, 1,5, 1,9, 1,99, 1,999. A que $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ parece tender quando x aproxima-se de 2? (d) Ache $f'(2)$ aplicando a fórmula (7).

41. Dada: $f(x) = \sqrt{x - 3}$. (a) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(7 + \Delta x) - f(7)}{\Delta x}$ quando Δx é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 e Δx é -1, $-0{,}5$, $-0{,}1$, $-0{,}01$, $-0{,}001$. A que $\dfrac{f(7 + \Delta x) - f(7)}{\Delta x}$ parece tender quando Δx aproxima-se de zero? (b) Encontre $f'(7)$ aplicando a fórmula (4). (c) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(x) - f(7)}{x - 7}$ quando x é 8, 7,5, 7,1, 7,01, 7,001 e x é 6, 6,5, 6,9, 6,99, 6,999. A que $\dfrac{f(x) - f(7)}{x - 7}$ parece tender quando x aproxima-se de 7? (d) Encontre $f'(7)$ aplicando a fórmula (7).

42. Dada: $f(x) = \dfrac{10}{x^2}$. (a) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x}$ quando Δx é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 e Δx é -1, $-0{,}5$, $-0{,}1$, $-0{,}01$, $-0{,}001$. A que $\dfrac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x}$ parece tender quando Δx aproxima-se de zero? (b) Ache $f'(5)$ aplicando a fórmula (4). (c) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5}$ quando x é

6, 5,5, 5,1, 5,01, 5,001 e quando x é 4, 4,5, 4,9, 4,99, 4,999. A que $\dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5}$ parece tender quando x aproxima-se de 5?
(d) Encontre $f(5)$ aplicando a fórmula (7).

Nos Exercícios de 43 a 46, ache $f'(a)$ aplicando a fórmula (4).

43. $f(x) = 4 - x^2$; $a = 5$
44. $f(x) = \dfrac{4}{5x}$; $a = 2$
45. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$; $a = 4$
46. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1$; $a = 4$

Nos Exercícios de 47 a 50, ache $f'(a)$ aplicando a fórmula (7).

47. $f(x) = 2 - x^3$; $a = -2$
48. $f(x) = x^2 - x + 4$; $a = 4$
49. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 3}}$; $a = 3$
50. $f(x) = \sqrt{1 + 9x}$; $a = 7$

Nos Exercícios de 51 a 56, ache $\dfrac{dy}{dx}$.

51. $y = \dfrac{4}{x^2} + 3x$
52. $y = \dfrac{4}{2x - 5}$
53. $y = \sqrt{2 - 7x}$
54. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$
55. $y = \sqrt[3]{x}$
56. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - x$

57. Se g é contínua em a e $f(x) = (x - a)g(x)$, ache $f'(a)$. (*Sugestão*: use a fórmula (7)).
58. Se g é contínua em a e $f(x) = (x^2 - a^2)g(x)$, ache $f'(a)$. (*Sugestão*: use a fórmula (7)).
59. Prove que não há reta que passe pelo ponto (1, 5) e seja tangente à curva $y = 4x^2$.
60. Prove que não há reta que passe pelo ponto (1, 2) e seja tangente à curva $y = 4 - x^2$.
61. Se

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

ache $f''(x)$ se $f(x) = ax^2 + bx$
62. Use a fórmula do Exercício 61 para encontrar $f''(x)$ se $f(x) = a/x$.
63. Se $f'(a)$ existe, prove que

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\,\Delta x}$$

(*Sugestão*:
$f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a) + f(a) - f(a - \Delta x)$.)
64. Seja f uma função cujo domínio seja o conjunto de todos os números reais e $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ para todo a e b. Além disso, suponha que $f(0) = 1$ e $f(0)$ exista. Prove que $f(x)$ existe para todo x e que $f'(x) = f'(0) \cdot f'(x)$.

3.2 DERIVABILIDADE E CONTINUIDADE

O processo de cálculo da derivada é chamada de **derivação**. Assim, a derivação é a operação de derivar uma função f' de uma função f.

Se uma função possui uma derivada em x_1, a função será **derivável** em x_1. Isto é, a função f será derivável em x_1 se $f'(x_1)$ existir. Uma função será **derivável em um intervalo aberto** se ela for derivável em todo número no intervalo aberto.

► **ILUSTRAÇÃO 1** No Exemplo 4 da Secção 3.1, $f(x) = 3x^2 + 12$ e $f'(x) = 6x$. Como o domínio de f é o conjunto de todos os números reais, e $6x$ existe se x for um número real qualquer, f é uma função derivável. ◄

► **ILUSTRAÇÃO 2** Seja g a função definida por $g(x) = \sqrt{x - 3}$. O domínio de g é $[3, +\infty)$. Do resultado do Exemplo 6 da Secção 3.1,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 3}}$$

Como $g'(3)$ não existe, g não é derivável, em 3. No entanto, g é derivável em qualquer outro número em seu domínio. Portanto, g será derivável no intervalo aberto $[3, +\infty)$. ◄

Iniciaremos uma discussão sobre derivabilidade e continuidade com o exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Seja

$$f(x) = x^{1/3}$$

(a) Ache $f'(x)$. (b) Mostre que $f'(0)$ não existe, mesmo que f seja contínua nesse número. (c) Faça um esboço do gráfico de f.

Solução

(a) Da Definição 3.1.1

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3}}{\Delta x} \tag{1}$$

Racionalizemos o numerador para obter um fator comum Δx no numerador e no denominador; disto resulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3}][(x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]}{\Delta x[(x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x[(x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x + \Delta x)^{2/3} + (x + \Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \\ &= \frac{1}{x^{2/3} + x^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \\ &= \frac{1}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

(b) Observe que $\frac{1}{3x^{2/3}}$ não é definido em $x = 0$. Se (1) for usado para calcular $f'(0)$, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0 + \Delta x)^{1/3} - 0^{1/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}}$$

e esse limite não existe. Então, f não é derivável em zero. No entanto, a função f é contínua em 0, pois

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} x^{1/3} \\ &= 0 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

(c) Um esboço do gráfico de f está na Figura 1.

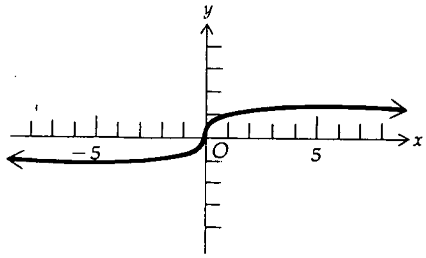


FIGURA 1

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Para a função f do Exemplo 1, como

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

da Definição 3.1.1 (ii) segue que a reta $x = 0$ é a reta tangente ao gráfico de f na origem. ◀

Do Exemplo 1 e da Ilustração 3, a função definida por $f(x) = x^{1/3}$ tem as seguintes propriedades:

1. f é contínua em zero.
2. f não é derivável em zero.
3. O gráfico de f tem uma reta tangente vertical no ponto onde x é zero.

Na ilustração a seguir temos outra função que é contínua mas não derivável em zero. O gráfico dessa função não tem uma reta tangente no ponto onde x é zero.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Seja f a função valor absoluto definida por

$$f(x) = |x|$$

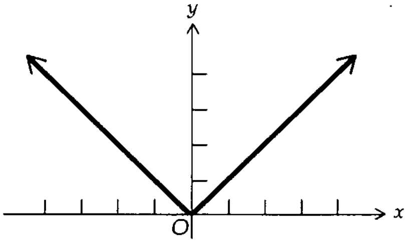


FIGURA 2

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 2. Da fórmula (4) da Secção 3.1,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

se o limite existir. Como $f(0 + \Delta x) = |\Delta x|$ e $f(0) = 0$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Como $|\Delta x| = \Delta x$ se $\Delta x > 0$ e $|\Delta x| = -\Delta x$ se $\Delta x < 0$, consideramos limites laterais em 0:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^-} (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \neq \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$, segue que o limite bilateral $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ não existe. Logo, $f'(0)$ não existe e assim f não é derivável em 0.

Como a Definição 3.1.1 não é satisfeita quando $x = 0$, não existe reta tangente na origem para o gráfico da função valor absoluto. ◀

Como as funções da Ilustração 4 e do Exemplo 1 são contínuas em um número, porém não deriváveis nele, podemos concluir que o fato de ser uma função contínua num número não implica que ela seja derivável naquele número. Mas o fato de a função ser derivável *implica* a continuidade, o que é assegurado pelo teorema a seguir.

3.2.1 TEOREMA Se uma função f for derivável em x_1, então f será contínua em x_1.

Prova Para provar que f é contínua em x_1 precisamos mostrar que as três condições da Definição 2.6.1 são satisfeitas. Isto é, precisamos mostrar que (i) $f(x_1)$ existe; (ii) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ existe e (iii) $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$.

Por hipótese, f é derivável em x_1. Logo $f'(x_1)$ existe. Como pela fórmula (7) da Secção 3.1

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$f(x_1)$ precisa existir, pois caso contrário o limite acima não terá sentido. Logo, a condição (i) é verdadeira em x_1. Consideremos agora

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)]$$

Podemos escrever

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] = \lim_{x \to x_1} \left[(x - x_1) \cdot \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}\right] \tag{2}$$

Como

$$\lim_{x \to x_1} (x - x_1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$$

aplicando o teorema de limite de um produto (Teorema 2.2.6) ao segundo membro de (2), obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] &= \lim_{x \to x_1} (x - x_1) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\ &= 0 \cdot f'(x_1) \\ &= 0\end{aligned}$$

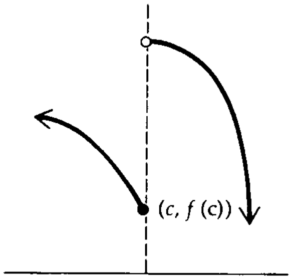


FIGURA 3

Então,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_1} f(x) &= \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1) + f(x_1)] \\ &= \lim_{x \to x_1} [f(x) - f(x_1)] + \lim_{x \to x_1} f(x_1) \\ &= 0 + f(x_1)\end{aligned}$$

que resulta

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

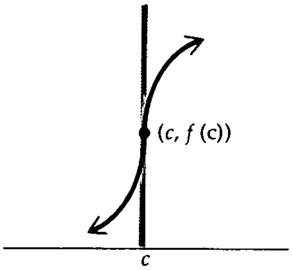


FIGURA 4

Dessa igualdade segue que as condições (ii) e (iii) para a continuidade de f em x_1 são satisfeitas. Logo, o teorema está provado. ■

Uma função f pode deixar de ser derivável em um número c por uma das seguintes razões:

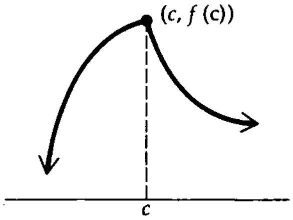


FIGURA 5

1. A função f é descontínua em c. Isto decorre do Teorema 3.2.1. Veja na Figura 3 um esboço do gráfico de tal função.
2. A função f é contínua em c e o gráfico de f tem uma reta tangente vertical no ponto onde $x = c$. Veja na Figura 4 um esboço do gráfico de uma função com essa característica. Tal situação também ocorre no Exemplo 1.
3. A função f é contínua em c e o gráfico de f não tem uma reta tangente no ponto $x = c$. Veja na Figura 5 um esboço do gráfico de uma função

satisfazendo essa condição. Observe que existe um "bico" no gráfico em $x = c$. Na Ilustração 1 há outro exemplo de tal função.

Antes de dar outros exemplos de funções que são contínuas em um número, porém não deriváveis nele, vamos introduzir o conceito de **derivada lateral.**

3.2.2 DEFINIÇÃO

Se a função f for definida em x_1, então a **derivada à direita** de f em x_1, denotada por $f'_+(x_1)$, será definida por

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

se o limite existir.

3.2.3 DEFINIÇÃO

Se a função f for definida em x_1, então a **derivada à esquerda** de f em x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, será definida por

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

se o limite existir.

Das Definições 3.2.2 e 3.2.3 e do Teorema 2.3.3, segue que uma função f definida num intervalo aberto contendo x_1 será derivável em x_1 se e somente se $f'_+(x_1)$ e $f'_-(x_1)$ ambas existirem e forem iguais. Naturalmente, então, $f'(x_1)$, $f'_+(x_1)$ e $f'_-(x_1)$ são todas iguais.

EXEMPLO 2 Seja f definida por

$$f(x) = |1 - x^2|$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Prove que f é contínua em 1. (c) Determine se f é derivável em 1.

Solução Pela definição de valor absoluto, se $x < -1$ ou $x > 1$, então $f(x) = -(1 - x^2)$ e se $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x) = 1 - x^2$. Logo, f pode ser definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

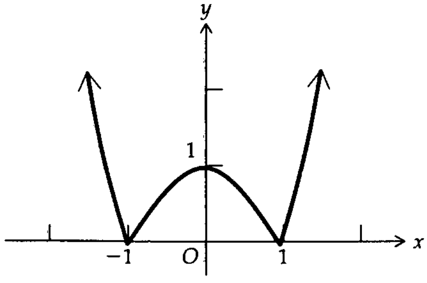


FIGURA 6

(a) Um esboço do gráfico de f está na Figura 6.

(b) Para provar que f é contínua em 1, verificamos as três condições para continuidade.

(i) $f(1) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x^2) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0$

Assim $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Como as condições (i)-(iii) são verificadas em 1, f é contínua em 1.

(c)

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(1 - x^2) - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^-} [-(1 + x)] \\ &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^+} (x + 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, segue que $f'(1)$ não existe e assim f não é derivável em 1.

A função do Exemplo 2 também não é derivável em $x = -1$, conforme pode ser mostrado por um método similar ao que foi usado em $x = 1$ (Veja o Exercício 26).

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Na Ilustração 2 da Secção 2.6 tínhamos a função C definida por

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0{,}7x + 3 & \text{se } 10 < x \end{cases}$$

onde $C(x)$ é o custo total de x de um produto. A Figura 7 mostra um esboço do gráfico de C. Na Secção 2.6 mostramos que C é contínua em 10.

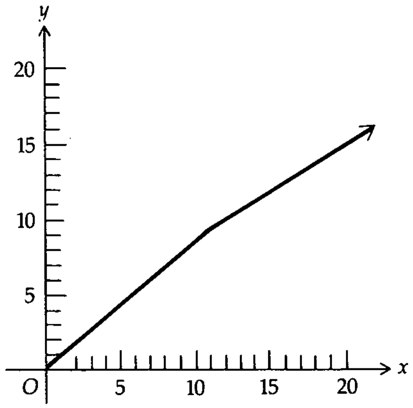


FIGURA 7

$$\begin{aligned} C'_-(10) &= \lim_{x \to 10^-} \frac{C(x) - C(10)}{x - 10} \\ &= \lim_{x \to 10^-} \frac{x - 10}{x - 10} \\ &= \lim_{x \to 10^-} 1 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} C'_+(10) &= \lim_{x \to 10^+} \frac{C(x) - C(10)}{x - 10} \\ &= \lim_{x \to 10^+} \frac{(0{,}7x + 3) - 10}{x - 10} \\ &= \lim_{x \to 10^+} \frac{0{,}7(x - 10)}{x - 10} \\ &= \lim_{x \to 10^+} 0{,}7 \\ &= 0{,}7 \end{aligned}$$

Como $C'_-(10) \neq C'_+(10)$, C não é derivável em 10. ◀

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x < b \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{se } b \leqslant x \end{cases}$$

(a) Determine um valor de b de tal forma que f seja contínua em b. (b) f é derivável no valor de b encontrado na parte (a)?

Solução

(a) A função f será contínua em b se $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ e $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = f(b)$.

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{b} \qquad \lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^+} (1 - \tfrac{1}{4}x) = 1 - \tfrac{1}{4}b$$

$f(b) = 1 - \frac{1}{4}b$; logo f será contínua em b se

$$\frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{4}b$$

$$4 = 4b - b^2$$

$$b^2 - 4b + 4 = 0$$

$$(b - 2)^2 = 0$$

$$b = 2$$

Assim

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x < 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$$

e f é contínua em 2.

(b) Para determinar se f é derivável em 2, calculemos $f'_-(2)$ e $f'_+(2)$.

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2 - x}{2x(x - 2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{2x} = -\tfrac{1}{4}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2 - x}{4(x - 2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{4} = -\tfrac{1}{4}$$

Como $f'_-(2) = f'_+(2)$, segue que $f'(2)$ existe e, portanto, f é derivável em 2.

EXERCÍCIOS 3.2

Nos Exercícios de 1 a 20, faça o seguinte: (a) Trace um esboço do gráfico da função; (b) determine se f é contínua em x_1; (c) calcule $f'_-(x_1)$ e $f'_+(x_1)$, se existirem; (d) determine se f é derivável em x_1.

1. $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{se } x\leqslant -4 \\ -x-6 & \text{se } -4<x \end{cases}\qquad x_1=-4$

2. $f(x)=\begin{cases} 3-2x & \text{se } x<2 \\ 3x-7 & \text{se } 2\leqslant x \end{cases}\qquad x_1=2$

3. $f(x)=|x-3|;\ x_1=3$

4. $f(x)=1+|x+2|;\ x_1=-2$

5. $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{se } x<0 \\ x-1 & \text{se } 0\leqslant x \end{cases}\qquad x_1=0$

6. $f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\leqslant 0 \\ x^2 & \text{se } 0<x \end{cases}\qquad x_1=0$

7. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\leqslant 0 \\ -x^2 & \text{se } 0<x \end{cases}\qquad x_1=0$

8. $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{se } x<2 \\ \sqrt{x-2} & \text{se } 2\leqslant x \end{cases}\qquad x_1=2$

9. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{se } x<1 \\ (1-x)^2 & \text{se } 1\leqslant x \end{cases}\qquad x_1=1$

10. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x<-1 \\ -1-2x & \text{se } -1\leqslant x \end{cases}\qquad x_1=-1$

11. $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3 & \text{se } x\leqslant 2 \\ 8x-11 & \text{se } 2<x \end{cases}\qquad x_1=2$

12. $f(x)=\begin{cases} x^2-9 & \text{se } x<3 \\ 6x-18 & \text{se } 3\leqslant x \end{cases}\qquad x_1=3$

13. $f(x)=\sqrt[3]{x+1};\ x_1=-1$

14. $f(x)=(x-2)^{-2};\ x_1=2$

15. $f(x)=\begin{cases} 5-6x & \text{se } x\leqslant 3 \\ -4-x^2 & \text{se } 3<x \end{cases}\qquad x_1=3$

16. $f(x)=\begin{cases} -x^{2/3} & \text{se } x\leqslant 0 \\ x^{2/3} & \text{se } 0<x \end{cases}\qquad x_1=0$

17. $f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{se } x<0 \\ x^2 & \text{se } 0\leqslant x \end{cases}\qquad x_1=0$

18. $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{se } x\leqslant 1 \\ x+1 & \text{se } 1<x \end{cases}\qquad x_1=1$

19. $f(x)=\begin{cases} 3x^2 & \text{se } x\leqslant 2 \\ x^3 & \text{se } 2<x \end{cases}\qquad x_1=2$

20. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{se } x<-1 \\ 1-x^2 & \text{se } -1\leqslant x \end{cases}\qquad x_1=-1$

21. Dada $f(x)=\sqrt{x-4}$. (a) Prove que f é contínua à direita de 4. (b) Prove que $f'_+(4)$ não existe. (c) Faça um esboço do gráfico de f.

22. Dada $f(x)=\sqrt{4-x^2}$. (a) Prove que f é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$. (b) Prove que nem $f'_+(-2)$ nem $f'_-(2)$ existem. (c) Faça um esboço do gráfico de f.

23. Dada $f(x)=\sqrt{x^2-9}$. (a) Prove que f é contínua em $(-\infty, -3]$ e $[3, +\infty)$. (b) Prove que nem $f'_-(-3)$ nem $f'_+(3)$ existem. (c) Faça um esboço do gráfico de f.

24. Dada $f(x)=\sqrt{8-x}$. (a) Prove que f é contínua à esquerda de 8. (b) Prove que $f'_-(8)$ não existe. (c) Faça um esboço do gráfico de f.

25. Dada $f(x)=\operatorname{sgn} x$. (a) Prove que $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$ não existem. (b) Prove que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=0$. (c) Faça um esboço do gráfico de f.

26. Prove que a função do Exemplo 2 é contínua em -1, mas não é derivável naquele número.

27. Dada $f(x)=x^{3/2}$. (a) Prove que f é contínua à direita de 0. (b) Prove que $f'_+(0)$ existe e ache o seu valor. (c) Faça um esboço do gráfico de f.

28. Dada $f(x)=(1-x^2)^{3/2}$. (a) Prove que f é contínua no intervalo fechado $[-1, 1]$. (b) Prove que f é derivável no intervalo aberto $(-1, 1)$ e que ambas $f'_+(-1)$ e $f'_-(1)$ existem. (c) Faça um esboço do gráfico de f.

29. Dada

$$f(x)=\begin{cases} x^2-7 & \text{se } 0<x\leqslant b \\ \dfrac{6}{x} & \text{se } b<x \end{cases}$$

(a) Determine um valor de b para o qual f é contínua em b. (b) f é derivável em b encontrado na parte (a)?

30. Ache os valores de a e b tais que f seja derivável em 1 se

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x<1 \\ ax+b & \text{se } 1\leqslant x \end{cases}$$

31. Ache os valores de a e b tais que f seja derivável em 2 se

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{se } x<2 \\ 2x^2-1 & \text{se } 2\leqslant x \end{cases}$$

32. Dada $f(x)=\llbracket x\rrbracket$, ache $f'(x_1)$ se x_1 não for inteiro. Prove, aplicando o Teorema 3.2.1, que $f'(x_1)$ não existe se x_1 for inteiro. Se x_1 for inteiro, o que poderá ser dito sobre $f'_-(x_1)$ e $f'_+(x_1)$?

33. Dada $f(x)=(x-1)\llbracket x\rrbracket$. Faça um esboço do gráfico de f para x em $[0, 2]$. Ache, se existirem: (a) $f'_-(1)$; (b) $f'_+(1)$; (c) $f'(1)$.

34. Dada $f(x)=(5-x)\llbracket x\rrbracket$. Faça um esboço do gráfico de f para x em $[4, 6]$. Ache, se existirem: (a) $f'_-(5)$; (b) $f'_+(5)$; (c) $f'(5)$.

35. Dada $f(x)=(x-a)\llbracket x\rrbracket$ onde a é um inteiro, mostre que $f'_-(a)+1=f'_+(a)$.

36. Seja f a função definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} & \text{se } x\neq a \\ g'(a) & \text{se } x=a \end{cases}$$

Prove que se $g'(a)$ existir, f será contínua em a.

37. Na Ilustração 1 temos a função valor absoluto definida por $f(x) = |x|$ e essa função não é derivável em 0. Prove que $f'(x) = |x|/x$ para todo $x \neq 0$. (*Sugestão*: seja $|x| = \sqrt{x^2}$.)

38. Se $f(x) = |x|$ e $g(x) = -|x|$, (a) ache uma fórmula para $(f + g)(x)$. (b) Prove que $f + g$ é derivável em 0, embora nem f nem g sejam deriváveis nesse número.

39. Uma excursão escolar que pode acomodar até 250 estudantes irá custar \$ 15 por estudante, se o número de estudantes que fizer a viagem não ultrapassar 150; contudo, o custo por estudante será reduzido de \$ 0,05 para cada estudante que exceder 150, até que o custo atinja \$ 10 por pessoa. (a) Se x estudantes fizerem a viagem, expresse o custo bruto como função de x. (b) Como x é o número de estudantes, x é um inteiro não negativo. Para que tenhamos as exigências de continuidade para aplicar o cálculo, x deve ser um número real não negativo. Com essa hipótese, mostre que a função da parte (a) é contínua até 150, mas não é derivável nesse número.

40. Um fabricante pode obter um lucro de \$ 20 em cada item se até 800 itens forem produzidos por semana. O lucro decresce \$ 0,02 por item acima de 800. (a) Se x itens forem produzidos por semana, expresse o lucro do fabricante como uma função de x. (b) Como x é o número de itens, é um inteiro não-negativo. Para que tenhamos as exigências de continuidade do cálculo, x deve ser um número real não negativo. Com essa hipótese, mostre que a função da parte (a) é contínua até 800, mas não derivável nesse número.

41. Dada

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^n & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

onde n é um inteiro positivo. (a) Para que valores de n f é derivável para todos os valores de x? (b) Para que valores de n f é contínua para todos os valores de x?

3.3 TEOREMAS SOBRE DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES ALGÉBRICAS

Como o processo de cálculo da derivada de uma função, a partir da Definição 3.1.3, em geral é lento, enunciaremos e provaremos alguns teoremas que nos possibilitam encontrar derivadas com mais facilidade. Esses teoremas são demonstrados se aplicarmos a Definição 3.1.3. Depois da prova de cada teorema enunciamos a fórmula de derivação correspondente.

3.3.1 TEOREMA Se c for uma constante e se $f(x) = c$ para todo x, então

$$f'(x) = 0$$

Prova

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

$$\boxed{D_x(c) = 0}$$

A derivada de uma constante é zero.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $f(x) = 5$, então

$$f'(x) = 0$$

◀

3.3.2 TEOREMA Se n for um inteiro positivo e se $f(x) = x^n$, então

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Prova

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Aplicando o teorema binomial a $(x + \Delta x)^n$ teremos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n \right] - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

Dividindo o numerador e o denominador por Δx, obtemos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}\,\Delta x + \ldots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \right]$$

Todos os termos, exceto o primeiro, têm Δx como fator; assim sendo todos os termos, exceto o primeiro, tendem a zero quando Δx tende a zero. Assim

$$f'(x) = nx^{n-1}$$ ■

$$\boxed{D_x(x^n) = nx^{n-1}}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se $f(x) = x^8$, então $f'(x) = 8x^7$. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Seja $f(x) = x$. (a) Se $x \neq 0$, pelo Teorema 3.3.2

$$f'(x) = 1 \cdot x^0$$
$$= 1 \cdot 1$$
$$= 1$$

(b) Pela fórmula (7) da Secção 3.1

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 1$$

$$= 1$$

Portanto, para todo x, $D_x(x) = 1$. ◀

3.3.3 TEOREMA Se f for uma função, c uma constante e g a função definida por

$$g(x) = c \cdot f(x)$$

então, se $f'(x)$ existir,

$$g'(x) = c \cdot f'(x)$$

Prova

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] \\ &= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$ ■

$$\boxed{D_x\,[c \cdot f(x)] = c \cdot D_x f(x)}$$

A derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função, se essa derivada existir.

Combinando os Teoremas 3.3.2 e 3.3.3 obtemos o seguinte resultado: se $f(x) = cx^n$, onde n é um inteiro positivo e c é uma constante, então

$$f'(x) = cnx^{n-1}$$

$$\boxed{D_x(cx^n) = cnx^{n-1}}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Se $f(x) = 5x^7$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot 7x^6 \\ &= 35x^6 \end{aligned}$$ ◀

3.3.4 TEOREMA Se f e g forem funções e se h for a função definida por

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Prova

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$ ■

$$\boxed{D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)}$$

A derivada da soma de duas funções é a soma de suas derivadas se elas existirem.

O resultado do teorema precedente pode ser aplicado a um número qualquer, finito, de funções, por indução matemática, e isso será enunciado como um outro teorema.

3.3.5 TEOREMA A derivada da soma de um número finito de funções é igual à soma de suas derivadas, se elas existirem.

Dos teoremas precedentes, a derivada de qualquer função polinomial pode ser facilmente encontrada.

EXEMPLO 1 Encontre $f'(x)$ se

$$f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$$

Solução

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(7x^4 - 2x^3 + 8x + 5) \\ &= D_x(7x^4) + D_x(-2x^3) + D_x(8x) + D_x(5) \\ &= 28x^3 - 6x^2 + 8 \end{aligned}$$

3.3.6 TEOREMA Se f e g forem funções e h for a função definida por

$$h(x) = f(x)g(x)$$

então, se existirem $f'(x)$ e $g'(x)$,

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Prova

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Se $f(x + \Delta x) \cdot g(x)$ for somado e subtraído ao numerador, então

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x) + f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Como f é derivável em x, pelo Teorema 3.2.1 f é contínua em x; logo, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Também, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$ e

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

dando assim

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$ ■

$$\boxed{D_x\,[f(x)g(x)] = f(x)\,D_x g(x) + g(x)\cdot D_x f(x)}$$

A derivada do produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função, mais a segunda função vezes a derivada da primeira função, se essas derivadas existirem.

EXEMPLO 2 Encontre $h'(x)$ se

$$h(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$$

Solução

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x^3 - 4x^2)(15x^4 + 2x) + (3x^5 + x^2)(6x^2 - 8x) \\ &= (30x^7 - 60x^6 + 4x^4 - 8x^3) + (18x^7 - 24x^6 + 6x^4 - 8x^3) \\ &= 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3 \end{aligned}$$

No Exemplo 2, note que se a multiplicação for efetuada antes da derivação, o resultado será o mesmo. Fazendo isto, temos

$$h(x) = 6x^8 - 12x^7 + 2x^5 - 4x^4$$

$$h'(x) = 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3$$

3.3.7 TEOREMA Se f e g forem funções e se h for a função definida por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{onde } g(x) \neq 0$$

então se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Prova

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x \cdot g(x)\cdot g(x + \Delta x)} \end{aligned}$$

Se somarmos e subtrairmos $f(x) \cdot g(x)$ ao denominador, então

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[g(x) \cdot \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - \left[f(x) \cdot \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x)}$$

Como g é derivável, em x, então g será contínua em x; assim temos que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$. Além disso, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$ e $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$. Com esses resultados e as definições de $f'(x)$ e $g'(x)$ obtemos

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

■

$$\boxed{D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)D_xf(x) - f(x)D_xg(x)}{[g(x)]^2}}$$

A derivada do quociente de duas funções é a fração tendo como denominador o quadrado do denominador original e como numerador o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, se essas derivadas existirem.

EXEMPLO 3 Ache

$$D_x\left(\frac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}\right)$$

Solução

$$D_x\left(\frac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}\right) = \frac{(x^2 - 4x + 1)(6x^2) - (2x^3 + 4)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^4 - 24x^3 + 6x^2 - 4x^4 + 8x^3 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

3.3.8 TEOREMA Se $f(x) = x^{-n}$, onde $-n$ é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então

$$f'(x) = -nx^{-n-1}$$

Prova Se $-n$ for um inteiro negativo, então n será um inteiro positivo. Escrevemos então

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

Do Teorema 3.3.7

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} \\ &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -nx^{n-1-2n} \\ &= -nx^{-n-1} \end{aligned}$$

■

EXEMPLO 4 Ache

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5}\right)$$

Solução

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5}\right) &= \frac{d}{dx}(3x^{-5}) \\ &= 3(-5x^{-6}) \\ &= -\frac{15}{x^6} \end{aligned}$$

Se r for um inteiro qualquer positivo ou negativo, segue dos Teoremas 3.3.2 e 3.3.8 que

$$\boxed{D_x\,(x^r) = rx^{r-1}}$$

e dos Teoremas 3.3.2, 3.3.3 e 3.3.8 obtemos

$$\boxed{D_x\,(cx^r) = crx^{r-1}}$$

EXERCÍCIOS 3.3

Nos Exercícios de 1 a 24, derive a função dada, aplicando os teoremas desta secção.

1. $f(x) = 7x - 5$

2. $g(x) = 8 - 3x$

3. $g(x) = 1 - 2x - x^2$

4. $f(x) = 4x^2 + x + 1$

5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

6. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$

7. $f(x) = \frac{1}{8}x^8 - x^4$

8. $g(x) = x^7 - 2x^5 + 5x^3 - 7x$

9. $F(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2$

10. $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$

11. $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

12. $G(y) = y^{10} + 7y^5 - y^3 + 1$

13. $F(x) = x^2 + 3x + \dfrac{1}{x^2}$

14. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{x^3}$

15. $g(x) = 4x^4 - \dfrac{1}{4x^4}$

16. $f(x) = x^4 - 5 + x^{-2} + 4x^{-4}$

17. $g(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{5}{x^4}$

18. $H(x) = \dfrac{5}{6x^5}$

19. $f(s) = \sqrt{3}(s^3 - s^2)$

20. $g(x) = (2x^2 + 5)(4x - 1)$

21. $f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$

22. $f(x) = (4x^2 + 3)^2$

23. $G(y) = (7 - 3y^3)^2$

24. $F(t) = (t^3 - 2t + 1)(2t^2 + 3t)$

Nos Exercícios de 25 a 36, calcule a derivada indicada, aplicando os teoremas desta secção.

25. $D_x[(x^2 - 3x + 2)(2x^3 + 1)]$

26. $D_x\left(\dfrac{2x}{x+3}\right)$

27. $D_x\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

28. $D_y\left(\dfrac{2y+1}{3y+4}\right)$

29. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)$

30. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4-3x-x^2}{x-2}\right)$

31. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{5t}{1+2t^2}\right)$

32. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^4-2x^2+5x+1}{x^4}\right)$

33. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{y^3-8}{y^3+8}\right)$

34. $\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s^2-a^2}{s^2+a^2}\right)$

35. $D_x\left[\dfrac{2x+1}{x+5}(3x-1)\right]$
36. $D_x\left[\dfrac{x^3+1}{x^2+3}(x^2-2x^{-1}+1)\right]$
37. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 4$ no ponto $(2, 4)$.
38. Ache uma equação da reta normal à curva $y = 4x^2 - 8x$ no ponto $(1, -4)$.
39. Ache uma equação da reta normal à curva $y = 10/(14 - x^2)$ no ponto $(4, -5)$.
40. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 8/(x^2 + 4)$ no ponto $(2, 1)$.
41. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 - 4x$ e paralela à reta $2x - y + 3 = 0$.
42. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = x^4 - 6x$ que seja perpendicular à reta $x - 2y + 6 = 0$.
43. Ache uma equação de cada uma das retas normais à curva $y = x^3 - 4x$ que sejam paralelas à reta $x + 8y - 8 = 0$.
44. Ache uma equação de cada uma das retas tangentes à curva $3y = x^3 - 3x^2 + 6x + 4$ que sejam paralelas à reta $2x - y + 3 = 0$.
45. Ache uma equação de cada uma das retas que passam pelo ponto $(4, 13)$, que sejam tangentes à curva $y = 2x^2 - 1$.
46. Dada $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + 5$. Mostre que $f'(x) \geq 0$ para todos os valores de x.
47. Se f, g e h são funções e $\phi(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$, prove que se $f'(x)$, $g'(x)$ e $h'(x)$ existirem,

$$\phi'(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$$

(*Sugestão*: aplique o Teorema 3.3.6 duas vezes.)

Use os resultados do Exercício 47 para derivar as funções dos Exercícios de 48 a 51.

48. $f(x) = (x^2 + 3)(2x - 5)(3x + 2)$
49. $h(x) = (3x + 2)^2(x^2 - 1)$
50. $g(x) = (3x^3 + x^{-3})(x + 3)(x^2 - 5)$
51. $\phi(x) = (2x^2 + x + 1)^3$

3.4 MOVIMENTO RETILÍNEO E A DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO

A derivada de uma função f no número x_1 tem uma interpretação importantíssima como a *taxa de variação instantânea* de f em x_1. Começaremos considerando uma partícula movendo-se ao longo de uma reta, que seria uma aplicação em Física. Tal movimento é chamado de **movimento retilíneo**. Um dos sentidos é escolhido arbitrariamente como positivo e o outro, oposto, como negativo. Para simplificar, vamos supor que o movimento da partícula seja ao longo de uma reta horizontal com distâncias positivas à direita e negativas à esquerda. Escolhemos um ponto sobre a reta, o qual denotamos por O. Seja f a função que determina a distância orientada da partícula a partir de O em qualquer instante.

Para sermos mais específicos, seja s cm a distância orientada da partícula a partir de O em t s (segundos). Então, f será a função definida pela equação

$$s = f(t)$$

a qual indicará a distância orientada de O até a partícula, num determinado instante.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Seja

$$s = t^2 + 2t - 3$$

Então, quando $t = 0$, $s = -3$; logo, a partícula está 3 cm à esquerda do ponto O, quando $t = 0$. Quando $t = 1$, $s = 0$; assim, a partícula estará no ponto O, decorrido 1 s do início do movimento. Quando $t = 2$, $s = 5$; assim, a partícula estará a 5 cm à direita de O, 2 s após o início do movimento. Quando $t = 3$, $s = 12$; assim, a partícula estará a 12 cm à direita do ponto O, decorridos 3 s do início do movimento.

A Figura 1 ilustra as várias posições da partícula para valores específicos de t.

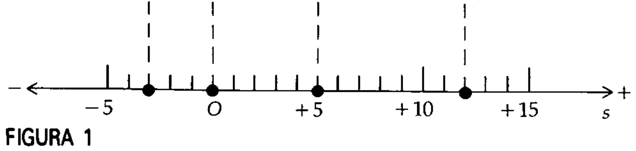


FIGURA 1

Entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$, a partícula move-se do ponto onde $s = 0$ até o ponto onde $s = 12$; assim, no intervalo de 2 s a variação na distância é de 0 a 12 cm. A velocidade média da partícula é a razão entre a variação na distância orientada do ponto fixo e a variação no tempo. Assim, o número de centímetros por segundo, ou seja, a velocidade média da partícula de $t = 1$ a $t = 3$, é $\frac{12}{2} = 6$. De $t = 0$ a $t = 2$, a variação na distância orientada de O da partícula é 8 cm; assim, o número de centímetros por segundo, ou seja, a velocidade média da partícula nesse intervalo de 2 s, é $\frac{8}{2} = 4$. ◀

Na Ilustração 1, a velocidade média da partícula, obviamente, não é constante; e a velocidade média não fornece informações específicas sobre o movimento da partícula em nenhum instante específico. Por exemplo, se um carro percorre uma distância de 100 km na mesma direção em 2 h, dizemos que a velocidade média com a qual percorre aquela distância é de 50 km/h. Entretanto, dessa informação não podemos determinar quanto está marcando o velocímetro do carro, num dado instante, no período de 2 h. A leitura do velocímetro é chamada de *velocidade instantânea*. A discussão a seguir possibilita-nos chegar a uma definição do que significa *velocidade instantânea*.

Suponha que $s = f(t)$ defina s (o número de centímetros da distância orientada da partícula a partir do ponto O) como função de t (número de segundos decorridos). Quando $t = t_1$, $s = s_1$. A variação na distância orientada a partir de O é $(s - s_1)$ cm no intervalo de tempo $(t - t_1)$ s e o número de centímetros por segundo ou seja, a velocidade média da partícula nesse intervalo de tempo é dada por

$$\frac{s - s_1}{t - t_1}$$

ou, como $s = f(t)$ e $s_1 = f(t_1)$, a velocidade média é encontrada de

$$\frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \tag{1}$$

Agora, quanto menor for o intervalo de t_1 até t, mais próxima estará a velocidade média do que intuitivamente entenderíamos como velocidade instantânea em t_1.

Por exemplo, se o velocímetro de um carro marca 80 km/h quando ele passa por um ponto P_1 e se um ponto P está, por exemplo, a 10 m de P_1, então a velocidade média do carro quando ele percorre esses 10 m estará, ao que tudo indica, próxima dos 80 km/h, pois a variação da velocidade do carro nesse trecho pequeno é, provavelmente, insignificante. Agora, se a distância entre P_1 e P for diminuída para 5 m, a velocidade média do carro nesse intervalo deverá estar mais próxima ainda da leitura do velocímetro do carro em P_1. Podemos continuar esse processo e a leitura do velocímetro em P_1 pode ser representada como o limite da velocidade média entre P_1 e P, quando P tende a P_1. Isto é, a *velocidade instantânea* pode ser definida como o limite do quociente (1) quando t tende a t_1, desde que o limite exista. O limite é a derivada da função f em t_1. Temos, então, a seguinte definição:

3.4.1 DEFINIÇÃO

Se f for uma função dada pela equação

$$s = f(t)$$

e uma partícula se mover ao longo de uma reta de tal forma que s seja o número de unidades da distância orientada da partícula a um ponto fixo na reta em t unidades de tempo, então a **velocidade instantânea** da partícula em t unidades de tempo será v unidades de velocidade, onde

$$v = f'(t) \Leftrightarrow v = \frac{ds}{dt}$$

se a derivada existir.

A velocidade instantânea pode ser positiva ou negativa, conforme o movimento da partícula seja no sentido positivo ou negativo da reta. Quando a velocidade instantânea for zero, a partícula estará em repouso.

A **velocidade escalar** de uma partícula em qualquer instante é definida como o valor absoluto da velocidade instantânea. Logo, a velocidade escalar é um número não-negativo. Os termos velocidade escalar e velocidade instantânea são freqüentemente confundidos. Deve ser notado que a velocidade escalar dá somente uma idéia da rapidez com que a partícula está se movendo, enquanto que a velocidade instantânea também indica o sentido do movimento.

EXEMPLO 1 Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação

$$s = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1$$

Determine os intervalos de tempo nos quais a partícula se move para a direita e para a esquerda. Determine também o instante no qual ela inverte o seu sentido.

Solução

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= 6t^2 - 8t + 2 \\ &= 2(3t^2 - 4t + 1) \\ &= 2(3t - 1)(t - 1) \end{aligned}$$

A velocidade instantânea é zero quando $t = \frac{1}{3}$ e $t = 1$. Logo, nesses dois instantes a partícula está em repouso. A partícula move-se para a direita quando v é positivo e move-se para a esquerda quando v é negativo. Determinamos o sinal de v para os vários intervalos de t e os resultados estão dados na Tabela 1.

Tabela 1

	$3t - 1$	$t - 1$	*Conclusão*
$t < \frac{1}{3}$	$-$	$-$	v é positivo, e a partícula move-se para a direita
$t = \frac{1}{3}$	0	$-$	v é zero e a partícula está mudando de sentido da direita para a esquerda
$\frac{1}{3} < t < 1$	+	$-$	v é negativo e a partícula move-se para a esquerda
$t = 1$	+	0	v é zero e a partícula está mudando de sentido, da esquerda para a direita
$1 < t$	+	+	v é positivo e a partícula move-se para a direita

Tabela 2

t	s	v
-1	-9	16
0	-1	2
$\frac{1}{3}$	$-\frac{19}{27}$	0
1	-1	0
2	3	10

O movimento da partícula, indicado na Figura 2, é ao longo de uma reta horizontal; contudo, o comportamento do movimento está indicado acima da reta. A Tabela 2 dá os valores de s e v para valores específicos de t.

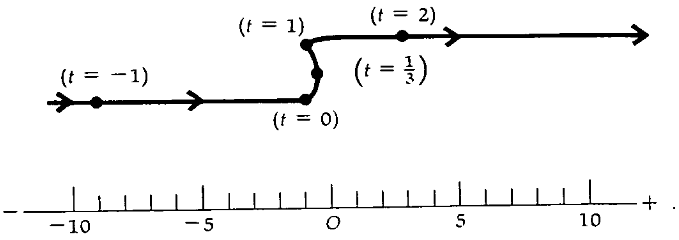


FIGURA 2

EXEMPLO 2 Uma bola é atirada verticalmente para cima a partir do chão, com uma velocidade inicial de 64 m/s. Se o sentido positivo da distância do ponto de partida for para cima, a equação do movimento será

$$s = -16t^2 + 64t$$

Seja t o número de segundos decorridos desde que a bola foi atirada e s o número de metros da distância percorrida pela bola a partir do ponto inicial em t s. (a) Ache a velocidade instantânea da bola ao fim de 1 s. A bola está subindo ou descendo após 1 s? (b) Ache a velocidade instantânea da bola depois de 3 s. A bola está subindo ou descendo após 3 s? (c) Quantos segundos a bola leva para atingir o seu ponto mais alto? (d) Qual a altura máxima atingida pela bola? (e) Ache as velocidades escalares após 1 e de 3 s. (f) Decorridos quantos segundos a bola atinge o solo? (g) Ache a velocidade instantânea da bola quando ela chega ao chão.

Solução Seja $v(t)$ o número de metros por segundo, sendo a velocidade instantânea da bola no instante t s. Então $v(t) = ds/dt$,

$$v(t) = -32t + 64$$

(a) $v(1) = -32(1) + 64$; isto é, $v(1) = 32$; assim, ao fim de 1 s a bola estará subindo com uma velocidade instantânea de 32 m/s.

(b) $v(3) = -32(3) + 64$; isto é, $v(3) = -32$; assim, após 3 s a bola estará caindo com uma velocidade instantânea de -32 m/s.

(c) A bola atinge o seu ponto mais alto quando o sentido do movimento muda, isto é, quando $v(t) = 0$. Obtemos $-32t + 64 = 0$. Assim, $t = 2$.

(d) Quando $t = 2$, $s = 64$; logo, o ponto mais alto atingido pela bola está a 64 m do ponto inicial.

(e) $|v(t)|$ é o número de metros por segundo da velocidade escalar em t s $|v(1)| = 32$ e $|v(3)| = 32$.

(f) A bola irá atingir o chão quando $s = 0$. No caso, temos $-16t^2 + 64t = 0$, donde obtemos $t = 0$ e $t = 4$. Assim sendo, a bola atinge o solo em 4 s.

(g) $v(4) = -64$; quando a bola atinge o solo, sua velocidade instantânea é -64 m/s.

A Tabela 3 dá valores de s e de v para alguns valores específicos de t. O movimento da bola está indicado na Figura 3. Supusemos que o movimento tenha ocorrido na vertical. O comportamento do movimento está indicado à esquerda da reta.

Tabela 3

t	s	v
0	0	64
$\frac{1}{2}$	28	48
1	48	32
2	64	0
3	48	-32
$\frac{7}{2}$	28	-48
4	0	-64

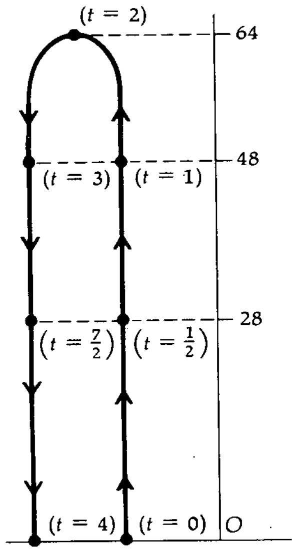


FIGURA 3

A velocidade no movimento retilíneo corresponde ao conceito mais geral de taxa de variação instantânea. Por exemplo, se a partícula move-se ao longo de uma linha reta de acordo com a equação $s = f(t)$, a velocidade da partícula em t unidades de tempo é determinada pela derivada de s com respeito a t. Já que a velocidade pode ser interpretada como uma taxa de variação da distância por unidade de variação do tempo, a derivada de s com respeito a t é a taxa de variação de s por unidade de variação de t.

Da mesma forma, se uma quantidade y for uma função de uma quantidade x, podemos expressar a taxa de variação de y por unidade de variação de x. A discussão é análoga à discussão da inclinação de uma reta tangente ao gráfico e à de velocidade instantânea de uma partícula movendo-se em uma reta.

Se a relação funcional entre y e x for dada por

$$y = f(x)$$

e se x variar do valor x_1 até $x_1 + \Delta x$, então y variará de $f(x_1)$ até $f(x_1 + \Delta x)$. Assim, a variação de y, a qual denotamos por Δy, é $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ quando a variação de x for Δx. A taxa média de variação de y por unidade de variação de x, quando x variar de x_1 a $x_1 + \Delta x$, será então,

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

Se o limite desse quociente existir quando $\Delta x \to 0$, esse limite será o que intuitivamente consideramos como a taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1. De acordo com essas considerações, temos a definição a seguir.

3.4.2 DEFINIÇÃO Seja $y = f(x)$; a **taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1** é $f'(x_1)$ ou, equivalentemente, a derivada de y com respeito a x em x_1, se ela existir no ponto x_1.

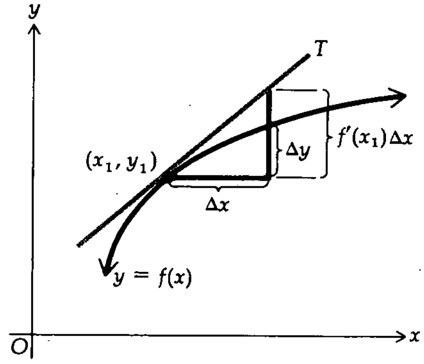


FIGURA 4

Ilustremos geometricamente; seja $f'(x_1)$ a taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1. Então, se $f'(x_1)$ for multiplicado por Δx (variação de x), temos a variação que ocorreria em y se o ponto (x, y) se movesse ao longo da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto (x_1, y_1). Veja a Figura 4. A taxa média de variação de y por unidade de variação de x é dada pela fração em (2), e se essa fração for multiplicada por Δx, obteremos Δy, que é a variação real de y causada por uma variação de Δx em x, quando o ponto (x, y) move-se ao longo do gráfico.

EXEMPLO 3 Seja $V(x)$ cm^3 o volume de um cubo com x cm de lado, use a calculadora para calcular a taxa média de variação de $V(x)$ em relação a x, quando x varia de (a) 3,000 a 3,200; (b) 3,000 a 3,100; (c) 3,000 a 3,010; (d) 3,000 a 3,001. (e) Qual será a taxa de variação instantânea de $V(x)$ em relação a x quando x é 3?

Solução A taxa média de variação de $V(x)$ em relação a x, quando x varia de x_1 a $x_1 + \Delta x$ é

$$\frac{V(x_1 + \Delta x) - V(x_1)}{\Delta x}$$

(a) $x_1 = 3{,}000$, $\Delta x = 0{,}200$

$$\frac{V(3{,}200) - V(3{,}000)}{0{,}200} = \frac{(3{,}200)^3 - (3{,}000)^3}{0{,}200}$$
$$= 28{,}84$$

(b) $x_1 = 3{,}000$, $\Delta x = 0{,}100$

$$\frac{V(3{,}100) - V(3{,}000)}{0{,}100} = \frac{(3{,}100)^3 - (3{,}000)^3}{0{,}100}$$
$$= 27{,}91$$

(c) $x_1 = 3{,}000$, $\Delta x = 0{,}010$

$$\frac{V(3{,}010) - V(3{,}000)}{0{,}010} = \frac{(3{,}010)^3 - (3{,}000)^3}{0{,}010}$$
$$= 27{,}09$$

(d) $x_1 = 3{,}000$, $\Delta x = 0{,}001$

$$\frac{V(3{,}001) - V(3{,}000)}{0{,}001} = \frac{(3{,}001)^3 - (3{,}000)^3}{0{,}001}$$
$$= 27{,}01$$

Em (a) vemos que quando a medida do lado do cubo varia de 3,000 a 3,200 cm, a variação do volume é de 28,84 cm^3 por centímetro de variação do comprimento do lado. Interpretamos (b) e (d) de forma similar.

(e) A taxa instantânea de variação de $V(x)$ em relação a x quando x é 3 é $V'(3)$.

$V'(x) = 3x^2 \qquad V'(3) = 27$

Logo, quando o comprimento do lado do cubo é 3 cm, a taxa de variação instantânea do volume é 27 cm^3 por centímetro de variação do comprimento do lado.

EXEMPLO 4 Em um circuito elétrico, se E volts for a força eletromotriz, R ohms for a resistência e I ampères for a corrente, segue da lei de Ohm que

$IR = E$

Supondo que E seja uma constante positiva, mostre que R diminui a uma taxa proporcional ao inverso do quadrado de I.

Solução Resolvendo a equação dada para R, obtemos

$R = E \cdot I^{-1}$

Derivando R em relação a I, temos

$$\frac{dR}{dI} = -E \cdot I^{-2}$$

$$\frac{dR}{dI} = -\frac{E}{I^2}$$

Essa igualdade estabelece que a taxa de variação de R em relação a I é negativa e proporcional a $\frac{1}{I^2}$. Portanto, R diminui a uma taxa proporcional ao inverso do quadrado de I.

Em Economia, a variação de uma quantidade em relação a outra pode ser descrita pelos conceitos de *média* ou de *marginal*. O conceito de média expressa a variação de uma quantidade em relação à variação especificada dos valores de uma segunda quantidade, enquanto que o conceito de marginal refere-se à variação instantânea na primeira quantidade que resulta de uma pequena variação na segunda quantidade. Vamos começar nossos exemplos em Economia com as definições de custo médio e custo marginal. Para definir precisamente o conceito de marginal usamos a noção de limite que nos leva à derivada.

Suponhamos que $C(x)$ seja o custo total da produção de x unidades de certa mercadoria. A função C é chamada **função custo total**. Em circunstâncias normais x e $C(x)$ são positivas. Uma vez que x representa o número de unidades de certa mercadoria, x é geralmente um inteiro não-negativo. Para podermos, contudo, aplicar o cálculo, vamos supor que x seja um número real não negativo que garanta os requisitos de continuidade à função C.

Obtemos o **custo médio** da produção de cada unidade de uma mercadoria dividindo o custo total pelo número de unidades produzidas. Se $Q(x)$ for o custo médio,

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

e Q é chamada **função custo médio**.

Suponha agora que o número de unidades de uma dada produção seja x_1, e que esse número varie por um valor Δx. Então, a variação no custo total será dada por $C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)$ e a variação média no custo total em relação à variação no número de unidades produzidas será dada por

$$\frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Os economistas usam o termo *custo marginal* para o limite do quociente quando Δx tende a zero, desde que o limite exista. Esse limite, sendo a derivada de C em x_1, estabelece que o **custo marginal**, quando $x = x_1$, é dado por $C'(x_1)$, se existir. A função C' é chamada de **função custo marginal**, e $C'(x_1)$ pode ser interpretado como a taxa de variação do custo total quando x_1 unidades são produzidas.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Suponha que $C(x)$ seja o custo total da fabricação de x brinquedos e

$$C(x) = 110 + 4x + 0{,}02x^2$$

(a) A função custo marginal será C' e

$$C'(x) = 4 + 0{,}04x$$

(b) A função custo marginal, quando $x = 50$ será $C'(50)$, e

$$\begin{aligned} C'(50) &= 4 + 0{,}04(50) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Logo, a taxa de variação do custo total, quando forem fabricados 50 brinquedos, será de \$6 por brinquedo.

(c) O custo real da fabricação do qüinquagésimo primeiro brinquedo será $C(51) - C(50)$ e

$$\begin{aligned} C(51) - C(50)\ &[110 + 4(51) + 0{,}02(51)^2] - [110 + 4(50) + 0{,}02(50)^2] \\ &= 366{,}02 - 360 \\ &= 6{,}02 \end{aligned}$$

Note que as respostas em (b) e (c) diferem por 0,02. Esta discrepância ocorre porque o custo marginal é a taxa de variação instantânea de $C(x)$ em relação a uma unidade de variação em x. Assim, $C'(50)$ é o número aproximado da quantia em dinheiro gasta na produção do qüinquagésimo primeiro brinquedo. ◀

Observe que o cálculo de $C'(50)$ é muito mais simples do que o cálculo de $C(51) - C(50)$. Os economistas, freqüentemente, aproximam o custo da produção de uma unidade adicional usando a função custo marginal. Especificamente, $C'(k)$ é o custo aproximado da $(k + 1)$ésima unidade depois que as k primeiras unidades foram produzidas.

Outra função importante em Economia é a **função rendimento total**, denotada por R, e

$$R(x) = px$$

onde $R(x)$ é o rendimento total recebido quando x unidades são vendidas à quantia de p por unidade.

O **rendimento marginal**, quando $x = x_1$, é dado por $R'(x_1)$, se existir. A função R' é chamada **função rendimento marginal**. $R'(x_1)$ pode ser positivo, negativo ou zero, e pode ser interpretado como a taxa de variação do rendimento total quando x_1 unidades são vendidas. $R'(k)$ é o rendimento aproximado da venda da $(k + 1)$ésima unidade depois que k unidades tiverem sido vendidas.

EXEMPLO 5 Suponha que $R(x)$ seja o rendimento total recebido pela venda de x mesas e

$$R(x) = 300x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Ache (a) a função rendimento marginal; (b) o rendimento marginal quando $x = 40$; (c) o rendimento real da venda da quadragésima primeira mesa.

Solução (a) A função rendimento marginal é R' e

$$R'(x) = 300 - x$$

(b) O rendimento marginal quando $x = 40$ é dado por $R'(40)$ e

$$\begin{aligned} R'(40) &= 300 - 40 \\ &= 260 \end{aligned}$$

Logo, a taxa de variação do rendimento total quando 40 mesas são vendidas é de $260 por unidade

(c) O rendimento real da venda da quadragésima primeira mesa é $R(41) - R(40)$ e

$$R(41) - R(40) = \left[300(41) - \frac{(41)^2}{2}\right] - \left[300(40) - \frac{(40)^2}{2}\right]$$

$$= [12.300 - 840{,}50] - [12.000 - 800]$$
$$= 11.459{,}50 - 11.200$$
$$= 259{,}50$$

Logo, o rendimento real da venda da quadragésima primeira mesa é \$259,50.

Observe que na parte (b) do Exemplo 5 obtivemos $R'(40) = 260$, e \$260 é uma aproximação do rendimento recebido da venda da quadragésima primeira mesa, que de (c) é \$259,50.

EXERCÍCIOS 3.4

Nos Exercícios de 1 a 8, uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada, onde s cm *é a distância orientada da partícula a partir do ponto O em t* s. *Ache a velocidade instantânea v(t) cm/s em t* s *e então ache $v(t_1)$ para o valor de t_1 dado.*

1. $s = 3t^2 + 1;\ t_1 = 3$

2. $s = 8 - t^2;\ t_1 = 5$

3. $s = \dfrac{1}{4t};\ t_1 = \frac{1}{2}$

4. $s = \dfrac{3}{t^2};\ t_1 = -2$

5. $s = 2t^3 - t^2 + 5;\ t_1 = -1$

6. $s = 4t^3 + 2t - 1;\ t_1 = \frac{1}{2}$

7. $s = \dfrac{2t}{4+t};\ t_1 = 0$

8. $s = \dfrac{1}{t} + \dfrac{3}{t^2};\ t_1 = 2$

Nos Exercícios de 9 a 14, o movimento de uma partícula é ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula a partir do ponto O, em t s. *A direção positiva é à direita. Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita e para a esquerda. Determine também quando a partícula reverte o sentido do movimento. Mostre o comportamento do movimento através de uma figura similar à Figura 2 e escolha valores de t ao acaso, mas inclua os valores de t em que a partícula muda o sentido do movimento.*

9. $s = t^3 + 3t^2 - 9t + 4$

10. $s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$

11. $s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 2t + 4$

12. $s = \dfrac{t}{1+t^2}$

13. $s = \dfrac{t}{9+t^2}$

14. $s = \dfrac{t+1}{t^2+4}$

15. Um objeto cai do repouso de acordo com a equação $s = -16t^2$, onde s cm é a distância do objeto ao ponto de partida em t s e o sentido positivo é para cima. Se uma pedra caí de um edifício com 2560 cm de altura, ache (a) a velocidade instantânea da pedra 1s depois de iniciada a queda; (b) a velocidade instantânea da pedra 2 s depois da queda; (c) quanto tempo leva para a pedra atingir o solo; (d) a velocidade instantânea da pedra quando ela atinge o solo.

16. Uma pedra cai de uma altura de 64 m. Se s m for a altura da pedra t s após ter iniciado a queda, então $s = -16t^2 + 64$. (a) Quanto tempo leva para a pedra atingir o solo? (b) Ache a velocidade instantânea da pedra quando ela atingir o solo.

17. Uma bola de bilhar é atingida e movimenta-se em linha reta. Se s cm for a distância da bola de sua posição inicial após t s, então $s = 100t^2 + 100t$. Com qual velocidade a bola atingirá a tabela da posição inicial que está a 39 cm?

18. Se uma pedra for atirada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 32 cm/s, então $s = -16t^2 + 32t$, onde s cm é a distância da pedra ao ponto inicial, em t s e o sentido positivo é para cima. Ache (a) a velocidade média da pedra no intervalo de tempo $\frac{3}{4} \leqslant t \leqslant \frac{5}{4}$; (b) a velocidade instantânea da pedra em $t = \frac{3}{4}$ s e em $t = \frac{5}{4}$ s; (c) a velocidade escalar da pedra em $t = \frac{3}{4}$ s e em $t = \frac{5}{4}$ s; (d) a velocidade média no intervalo de tempo $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}$; (e) quantos segundos irão decorrer até que a pedra atinja o ponto mais alto; (f) qual a altura máxima atingida; (g) quantos segundos irão decorrer até que a pedra chegue ao chão; (h) a velocidade instantânea da pedra quando ela atingir o solo. Mostre o comportamento do movimento através de uma figura similar à Figura 3.

19. Se uma bola for impulsionada de tal forma que ela adquira uma velocidade inicial de 24 cm/s ao descer um certo plano inclinado, então $s = 24t + 10t^2$, onde s cm é a distância da bola ao ponto inicial em t s e o sentido positivo é o de descida do plano inclinado. (a) Qual será a velocidade instantânea da bola em t_1 s? (b) Quanto tempo levará para que a velocidade aumente para 48 cm/s?

20. Um foguete é lançado verticalmente para cima e após t s ele está a s m do solo, onde $s = 560t - 16t^2$ e o sentido positivo é para cima. Ache (a) a velocidade do foguete 2 s após o lançamento e (b) quanto tempo levará para o foguete atingir sua altura máxima.

21. Se $A(x)$ cm^2 for a área de um quadrado e s cm for o comprimento de cada lado, ache a taxa de variação média de $A(x)$ em relação a x, quando x varia de (a) 4,000 a 4,600; (b) 4,000 a 4,300; (c) 4,000 a 4,100; (d) 4,000 a 4,050. (e) Qual será a taxa instantânea de variação de $A(x)$ com relação a x, quando x for 4,000?

22. O comprimento de um retângulo é 4 cm a mais do que sua largura e essa diferença de 4 cm mantém-se quando o retângulo aumenta de tamanho. Se $A(w)$ cm^2 for a área do retângulo e w cm for a largura, ache a taxa média de variação de $A(w)$ com respeito a w, quando w varia de (a) 3,000 a 3,200;

(b) 3,000 a 3,100; (c) 3,000 a 3,010; (d) 3,000 a 3,001. (e) Qual a taxa de variação instantânea de $A(w)$ com relação a w_1 quando w for 3?

23. A lei de Boyle para a expansão de um gás é $PV = C$, onde P é a pressão em quilogramas força por unidade de área, V é o número de unidades de volume do gás e C é uma constante. Mostre que V decresce a única taxa proporcional ao inverso do quadrado de P.

24. Da lei de Boyle para a expansão de um gás, dada no Exercício 23, ache a taxa de variação instantânea de V em relação a P, quando $P = 4$ e $V = 8$.

25. Uma frente fria aproxima-se de uma região. A temperatura é T graus t horas após a meia-noite e

$$T = 0{,}1(400 - 40t + t^2) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 12$$

(a) Ache a taxa de variação média de T em relação a t entre 5h e 6h; (b) ache a taxa de variação de T em relação a t às 5h.

26. Estima-se que um empregado de uma firma que faz molduras para quadros possa pintar y molduras x horas, após começar o trabalho às 8 horas da manhã e

$$y = 3x + 8x^2 - x^3 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 4$$

(a) Ache a taxa segundo a qual o empregado estará pintando às 10h; (b) ache o número de molduras que o empregado pinta entre 10h e 11h.

27. Se a água estiver sendo drenada de uma piscina e V litros for o volume de água na piscina t min após começar o escoamento, onde $V = 250\,(1600 - 80t + t^2)$, ache (a) a taxa média segundo a qual a água deixa a piscina durante os primeiros 5 min e (b) quão rápido a água está fluindo da piscina 5 min após o início do escoamento.

28. Um balão mantém a forma de uma esfera enquanto está sendo inflado. Ache a taxa de variação da área da superfície com respeito ao raio no instante em que o raio for 2 m.

29. A importância no custo total da fabricação de x relógios de uma certa fábrica é dada por $C(x) = 1500 + 3x + x^2$. Ache (a) a função custo marginal; (b) o custo marginal quando $x = 40$; (c) o custo real da fabricação do quadragésimo primeiro relógio.

30. Se $C(x)$ for o custo total da fabricação de x pesos de papel e

$$C(x) = 200 + \frac{50}{x} + \frac{x^2}{5}$$

ache (a) a função custo marginal; (b) o custo marginal quando $x = 10$; (c) o custo real da fabricação do décimo primeiro peso de papel.

31. Se $R(x)$ for o rendimento total recebido das vendas de x aparelhos de televisão e $R(x) = 600x - \frac{1}{20}x^3$, ache (a) a função rendimento marginal; (b) o rendimento marginal quando $x = 20$; (c) o rendimento real da venda da vigésima primeira televisão.

32. O rendimento total recebido da venda de x carteiras é $R(x)$, e $R(x) = 200x - \frac{1}{3}x^2$. Ache (a) a função rendimento marginal; (b) o rendimento marginal quando $x = 30$; (c) o rendimento real da venda trigésima primeira carteira.

*Nos Exercícios de 33 a 35, use o conceito de taxa relativa, definido como segue se $y = f(x)$, a **taxa relativa da variação de y** com relação a x em x_1 é dada por $\dfrac{f'(x_1)}{f(x_1)}$ ou, equivalentemente, $\dfrac{dy/dx}{y}$ calculada em $x = x_1$.*

33. O rendimento anual bruto de uma empresa t anos a partir de 1º de janeiro de 1988 é p milhões e $p = \frac{2}{5}t^2 + 2t + 10$. Ache (a) a taxa em que o rendimento bruto estava crescendo em 1º de janeiro de 1990; (b) a taxa de crescimento relativo do rendimento bruto em 1º de janeiro de 1990 com aproximação de um-décimo da percentagem; (c) a taxa em que o rendimento bruto deveria crescer em 1º de janeiro de 1994; (d) a taxa antecipada de crescimento relativo do rendimento bruto em 1º de janeiro de 1994 até 0,1 por cento.

34. Uma empresa inicia seus negócios em 1º de abril de 1987. Os rendimentos anuais brutos da firma após t anos de operação são de p, onde $p = 50.000 + 18.000\,t + 600t^2$. (a) Ache a taxa segundo a qual os rendimentos brutos cresceram em 1º de abril de 1989; (b) ache a taxa de crescimento relativo em 1º de abril de 1989, com aproximação de 0,1 por cento; (c) ache a taxa em que o rendimento bruto deverá estar crescendo em 1º de abril de 1997; (d) a taxa prevista de crescimento relativo do rendimento bruto em 1º de abril de 1997, com aproximação de 0,1 por cento.

35. Suponha que o número de pessoas da população de uma determinada cidade t anos após 1º de janeiro de 1986 será $40t^2 + 200t + 10.000$. (a) Ache a taxa segundo a qual a população terá crescido, em 1º de janeiro de 1995. (b) Ache a taxa de crescimento relativo da população, estimada em 1º de janeiro de 1995 com aproximação de 0,1%. (c) Ache a taxa segundo a qual a população estará crescendo em 1º de janeiro de 2001. (d) Ache a taxa de crescimento relativo da população, estimada em 1º de janeiro de 2001 com aproximação de 0,1 por cento.

36. Duas partículas A e B movem-se para a direita numa reta horizontal e partem de um ponto O. Seja s cm a distância orientada do ponto O em t s. As equações de movimento são

$$s = 4t^2 + 5t \quad \text{(para a partícula } A\text{)}$$
$$s = 7t^2 + 3t \quad \text{(para a partícula } B\text{)}$$

Se $t = 0$ no começo, para que valores de t a velocidade da partícula A supera a velocidade de B?

37. O lucro de um varejista é \$100y quando são gastos diariamente \$$x$ em propaganda e $y = 2.500 + 36x - 0{,}2x^2$. Use a derivada para determinar se seria lucrativo aumentar a verba de propaganda, considerando a verba diária de propaganda (a) \$60 e (b) \$ 300. (c) Qual seria o valor máximo de x abaixo do qual seria lucrativo aumentar a verba de propaganda?

38. Mostre que para toda função linear f, a taxa média de variação de $f(x)$ quando x varia de x_1 até $x_1 + k$ é a mesma que a taxa de variação instantânea $f(x)$ em x_1.

3.5 DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para mostrar que a função seno tem uma derivada, aplicamos a identidade trigonométrica

$$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a\cos b + \cos a\,\text{sen}\,b \tag{1}$$

bem como os Teoremas 2.8.2 e 2.8.5

Seja f a função seno, assim

$$f(x) = \text{sen}\,x$$

Da definição de derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}\,x}{\Delta x} \end{aligned}$$

A fórmula (1) para $\text{sen}(x + \Delta x)$ é usada para obter

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\,x\cos(\Delta x) + \cos x\,\text{sen}(\Delta x) - \text{sen}\,x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\,x[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x\,\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \text{sen}\,x\right) + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \cos x\right)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{2}$$

Do Teorema 2.8.5,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \tag{3}$$

e do Teorema 2.8.2,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = 1 \tag{4}$$

Substituindo (3) e (4) em (2), obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0 \cdot \text{sen}\,x + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Provamos, assim, o seguinte teorema:

3.5.1 TEOREMA $D_x(\text{sen}\,x) = \cos x$

EXEMPLO 1 Ache $f'(x)$ se

$$f(x) = x^2\,\text{sen}\,x$$

Solução Encontramos a derivada do produto de duas funções aplicando o Teorema 3.3.6.

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 D_x(\text{sen}\,x) + D_x(x^2)\,\text{sen}\,x \\ &= x^2 \cos x + 2x\,\text{sen}\,x \end{aligned}$$

Para encontrar a derivada da função co-seno, procedemos da mesma forma que com a função seno. Aqui aplicamos a identidade

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (5)$$

Se g for a função co-seno, então

$$g(x) = \cos x$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

A fórmula (5) para $\cos(x + \Delta x)$ é usada para obter

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos(\Delta x) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \cos x\right) - \left(\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \qquad (6)$$

Substituindo (3) e (4) em (6), obtemos

$$g'(x) = -0 \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot 1$$
$$= -\operatorname{sen} x$$

O teorema a seguir foi, então, provado.

3.5.2 TEOREMA $\boxed{D_x(\cos x) = -\operatorname{sen} x}$

EXEMPLO 2 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - 2\cos x}$$

Solução Aplicamos o Teorema 3.3.7 (derivada de um quociente).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - 2\cos x)\, D_x(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot D_x(1 - 2\cos x)}{(1 - 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1 - 2\cos x)(\cos x) - \operatorname{sen} x(2 \operatorname{sen} x)}{(1 - 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - 2(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{(1 - 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - 2}{(1 - 2\cos x)^2}$$

As derivadas das funções tangente, co-tangente, secante e co-secante são obtidas de identidades trigonométricas envolvendo o seno e o co-seno, bem como suas derivadas e teoremas sobre derivação. Para a derivada da tangente aplicamos as identidades

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

3.5.3 TEOREMA $D_x(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$

Prova

$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{tg} x) &= D_x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \cdot D_x(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

■

3.5.4 TEOREMA $D_x(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

A demonstração desse teorema será deixada como exercício (veja o Exercício 1). Ela é análoga à do Teorema 3.5.3. As seguintes identidades serão usadas:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

3.5.5 TEOREMA $D_x(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$

Prova

$$\begin{aligned} D_x(\sec x) &= D_x\left(\frac{1}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \cdot D_x(1) - 1 \cdot D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot 0 - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ &= \sec x \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

■

EXEMPLO 3 Calcule

$$\frac{d}{dx}(\text{tg}\, x \sec x)$$

Solução

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\text{tg}\, x \sec x) &= \text{tg}\, x \cdot \frac{d}{dx}(\sec x) + \frac{d}{dx}(\text{tg}\, x) \cdot \sec x\\ &= \text{tg}\, x(\sec x\, \text{tg}\, x) + \sec^2 x(\sec x)\\ &= \sec x\, \text{tg}^2 x + \sec^3 x\end{aligned}$$

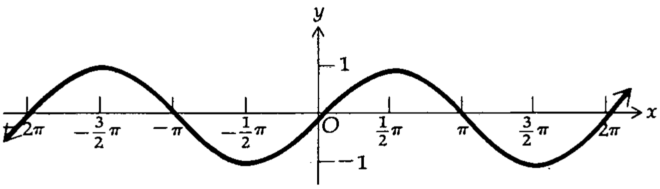
3.5.6 TEOREMA $D_x(\text{cosec}\, x) = -\text{cosec}\, x\, \text{cotg}\, x$

A demonstração desse teorema também será deixada como exercício (veja o Exercício 2).

Num curso de Trigonometria, os gráficos das funções são esboçados por meio de considerações intuitivas. Podemos agora obter esses gráficos de uma maneira mais formal, usando as derivadas das funções trigonométricas. Primeiro discutiremos os gráficos do seno e do co-seno. Para cada uma dessas funções o domínio será o conjunto de todos os números reais e a imagem será $[-1,1]$. Seja

$$f(x) = \text{sen}\, x \quad f'(x) = \cos x$$

Para determinar onde o gráfico tem uma tangente horizontal, resolvemos $f'(x) =$ $= 0$ e obtemos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é qualquer inteiro. Para esses valores de x, sen x é $+1$ ou -1 e esses são o maior e o menor valor que sen x assume. O gráfico intercepta o eixo x nos pontos onde sen $x = 0$, isto é, nos pontos $x = k\pi$, onde k é qualquer inteiro. Além disso, quando k for um inteiro par, $f'(k\pi) = 1$ e quando k for um inteiro ímpar, $f'(k\pi) = -1$. Assim, nos pontos de intersecção do gráfico com o eixo x, a inclinação da reta tangente é $+1$ ou -1. Dessas informações traçamos o esboço do gráfico da função seno, mostrado na Figura 1.



$f(x) = \text{sen}\, x$

FIGURA 1

Para o gráfico da função co-seno, usamos a identidade

$$\cos x = \text{sen}(x + \tfrac{1}{2}\pi)$$

Assim, o gráfico do co-seno é obtido do gráfico do seno, transladando o eixo y $\frac{\pi}{2}$ unidades para a direita. Veja a Figura 2.

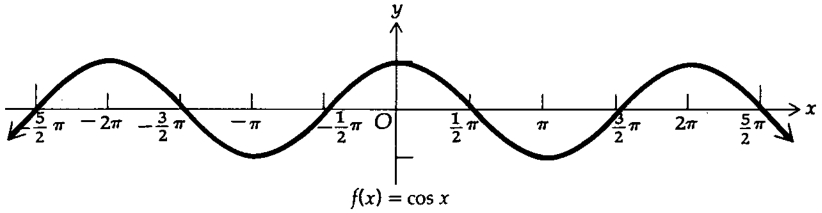


FIGURA 2

EXEMPLO 4 Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função coseno no ponto $(\frac{3}{2}\pi, 0)$.

Solução Se $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$. Então, $f'(\frac{3}{2}\pi) = -\operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi$. Como $\operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi = -1$, $f'(\frac{3}{2}\pi) = 1$. Da forma ponto-inclinação da equação da reta tangente tendo inclinação 1 e passando pelo ponto $(\frac{3}{2}\pi, 0)$, temos

$$y - 0 = 1(x - \tfrac{3}{2}\pi)$$

$$y = x - \tfrac{3}{2}\pi$$

Consideremos agora o gráfico da função tangente. Como

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

o gráfico é simétrico com respeito à origem. Além disso,

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$$

e assim, a função tangente é periódica, com período fundamental π. A função tangente é contínua em todos os números de seu domínio, o qual é o conjunto de todo os números reais, exceto aqueles da forma $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, onde k é qualquer inteiro. A imagem é o conjunto de todos os números reais. Se k for um inteiro qualquer, $\operatorname{tg} k\pi = 0$. Logo, o gráfico intercepta o eixo x nos pontos $(k\pi, 0)$. Seja

$$f(x) = \operatorname{tg} x \qquad f'(x) = \sec^2 x$$

Como $f'(k\pi) = \sec^2 k\pi$ e $\sec^2 k\pi = 1$ para todo k inteiro, segue que onde o gráfico intercepta o eixo x, a inclinação da reta tangente é 1. Resolvendo $f'(x) = 0$ temos $\sec^2 x = 0$. Como $\sec^2 x \geqslant 1$ para todo x, concluímos que não existem retas tangentes horizontais.

Consideremos o intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$ no qual a tangente está definida,

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

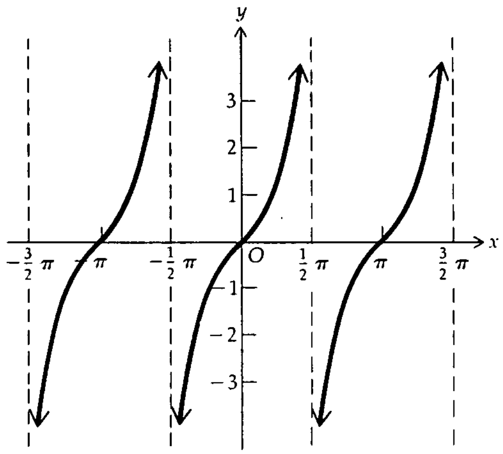
Como $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \operatorname{sen} x = 1$ e $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \cos x = 0$, onde o $\cos x$ está tendendo a zero através de valores positivos,

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

Logo, a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical do gráfico. Na Tabela 1 estão alguns valores de x no intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$ e os valores correspondentes de $\operatorname{tg} x$. Colocando num gráfico os pontos com coordenadas $(x, \operatorname{tg} x)$, obtemos uma parte do gráfico, para x em $[0, \frac{1}{3}\pi]$.

Tabela 1

x	$\operatorname{tg} x$
0	0
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$
$\frac{1}{4}\pi$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$



$f(x) = \text{tg}\, x$

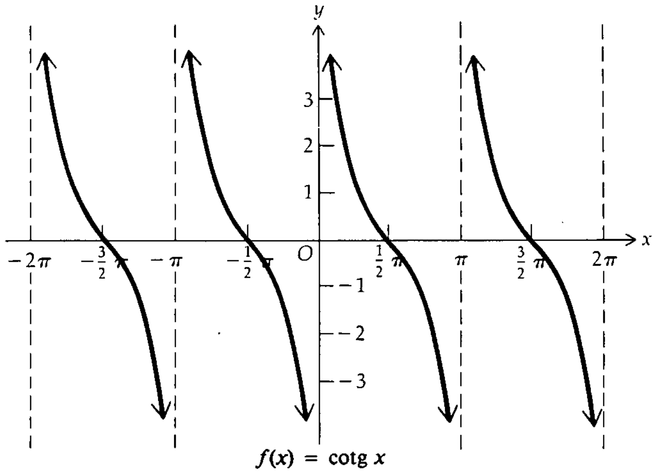
FIGURA 3

Considerando a simetria da função tangente com relação à origem, obtemos a parte do gráfico para x em $(-\frac{1}{2}\pi, 0]$. O período sendo π, completamos o gráfico que é mostrado na Figura 3.

Podemos obter o gráfico da função co-tangente a partir daquele da função tangente, usando a identidade

$$\text{cotg}\, x = -\text{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right)$$

Da identidade acima, vemos que o gráfico da co-tangente é obtido do gráfico da tangente, transladando o eixo y em $\frac{\pi}{2}$ unidades e fazendo em seguida uma reflexão ao eixo x. Um esboço do gráfico da função co-tangente está na Figura 4.



$f(x) = \text{cotg}\, x$

FIGURA 4

Como

$$\sec(x + 2\pi) = \sec x$$

a função secante é períodica, com período fundamental 2π. O domínio da função secante é o conjunto dos números reais, exceto aqueles da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é qualquer inteiro. A imagem é $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. A função é contínua em todos os números em seu domínio. Não há intersecção do gráfico com o eixo x, pois sec x não se anula nunca.

Usaremos a derivada para determinar se o gráfico tem alguma tangente horizontal. Seja

$$f(x) = \sec x \qquad f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

Resolvendo $f'(x) = 0$, resulta que $\sec x \operatorname{tg} x = 0$. Como $\sec x \neq 0$, $f'(x) = 0$ quando $\operatorname{tg} x = 0$, isto é, quando $x = k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

Primeiro vamos considerar o gráfico para x em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$. Existem retas tangentes horizontais em $x = 0$ e $x = \pi$.

$$\lim_{x \to -\pi/2^+} \sec x = \lim_{x \to -\pi/2^+} \frac{1}{\cos x} = +\infty \qquad \lim_{x \to \pi/2^-} \sec x = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pi/2^+} \sec x = \lim_{x \to \pi/2^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 3\pi/2^-} \sec x = \lim_{x \to 3\pi/2^-} \frac{1}{\cos x} = -\infty$$

Logo, as retas $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ são assíntotas verticais do gráfico.

Com as informações acima e marcando no gráfico alguns pontos, obtemos um esboço do gráfico da função secante para x em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Como o período é 2π, um esboço do gráfico está na Figura 5.

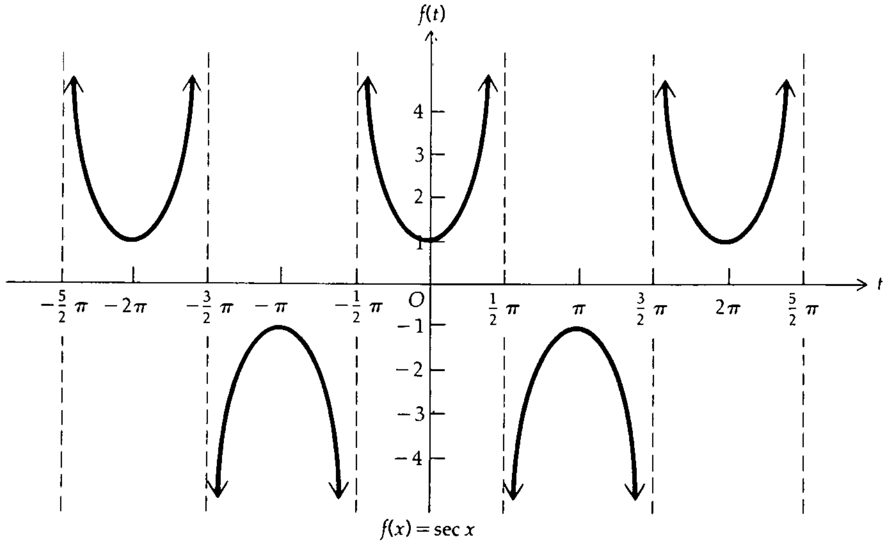
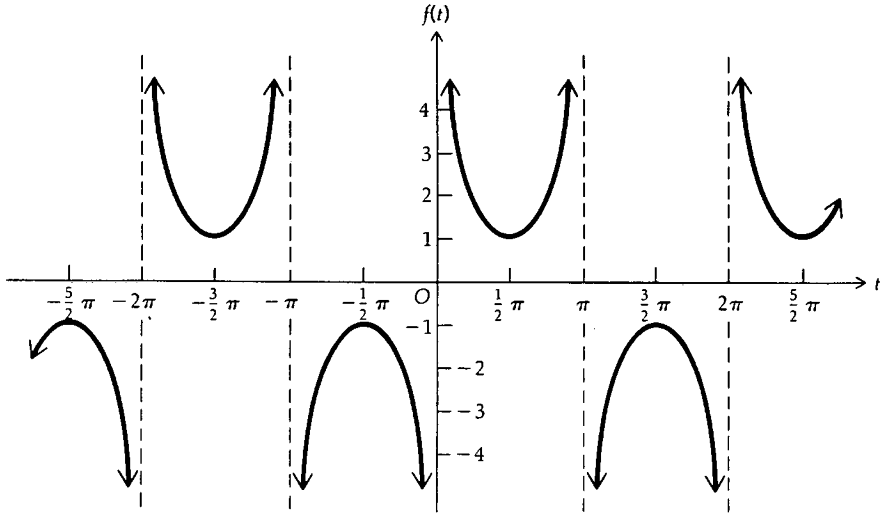


FIGURA 5

Da identidade

$$\operatorname{cosec} x = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Obtemos o gráfico da função co-secante a partir daquele da secante, transladando o eixo y em $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda. Um esboço do gráfico da função co-secante está na Figura 6.



$f(x) = \operatorname{cosec} x$

FIGURA 6

EXERCÍCIOS 3.5

1. Prove: $D_x(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cosec}^2 x$.
2. Prove: $D_x(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$.

Nos Exercícios de 3 a 16, ache a derivada da função dada.

3. $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$
4. $g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
5. $g(x) \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$
6. $f(x) = 4 \sec x - 2 \operatorname{cosec} x$
7. $f(x) = 2t \cos t$
8. $f(x) = 4x^2 \cos x$
9. $g(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x$
10. $g(y) = 3 \operatorname{sen} y - y \cos y$
11. $h(x) = 4 \operatorname{sen} x \cos x$
12. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x$
13. $f(x) = x^2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x - 2 \cos x$
14. $h(y) = y^3 - y^2 \cos y + 2y \operatorname{sen} y + 2 \cos y$
15. $f(x) = 3 \sec x \operatorname{tg} x$
16. $f(t) = \operatorname{sen} t \operatorname{tg} t$

Nos Exercícios de 17 a 30, calcule a derivada indicada.

17. $D_y(\operatorname{cotg} y \operatorname{cosec} y)$
18. $D_x(\cos x \operatorname{cotg} x)$
19. $D_z\left(\dfrac{2 \cos z}{z + 1}\right)$
20. $D_t\left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$
21. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}\right)$
22. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x + 4}{\cos x}\right)$
23. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\operatorname{tg} t}{\cos t - 4}\right)$
24. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\operatorname{cotg} y}{1 - \operatorname{sen} y}\right)$
25. $\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1 + \operatorname{sen} y}{1 - \operatorname{sen} y}\right)$
26. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos x + 1}\right)$
27. $D_x[(x - \operatorname{sen} x)(x + \cos x)]$
28. $D_z[(z^2 + \cos z)(2z - \operatorname{sen} z)]$
29. $D_t\left(\dfrac{2 \operatorname{cosec} t - 1}{\operatorname{cosec} t + 2}\right)$
30. $D_y\left(\dfrac{\operatorname{tg} y + 1}{\operatorname{tg} y - 1}\right)$

Nos Exercícios de 31 a 42, ache $f'(a)$ para o valor de $f'(a)$.

31. $f(x) = x \cos x;\ a = 0$
32. $f(x) = x \operatorname{sen} x;\ a = \frac{3}{2}\pi$
33. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x};\ a = \frac{1}{2}\pi$
34. $f(x) = \dfrac{\sec x}{x^2};\ a = \pi$
35. $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x;\ a = \pi$
36. $f(x) = x^2 \cos x - \operatorname{sen} x;\ a = 0$
37. $f(x) = \operatorname{sen} x(\cos x - 1);\ a = \pi$
38. $f(x) = (\cos x + 1)(x \operatorname{sen} x - 1);\ a = \frac{1}{2}\pi$
39. $f(x) = x \cos x + x \operatorname{sen} x;\ a = \frac{1}{4}\pi$
40. $f(x) = \operatorname{tg} x + \sec x;\ a = \frac{1}{6}\pi$
41. $f(x) = 2 \operatorname{cotg} x - \operatorname{cosec} x;\ a = \frac{2}{3}\pi$
42. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{cotg} x - 1};\ a = \frac{3}{4}\pi$

43. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais, valores de $\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{3}\pi + h) - \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi}{h}$ quando h é 1; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001 e h é -1; $-0{,}5$; $-0{,}1$; $-0{,}01$; $-0{,}001$. A que o quociente parece tender quando h se aproxima de 0? (b) Ache $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{3}\pi + h) - \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi}{h}$, interpretando-o como uma derivada.

44. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais valores de $\dfrac{\cos(\frac{5}{6}\pi + h) - \cos \frac{5}{6}\pi}{h}$ quando h é 1; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001 e h é -1; $-0{,}5$; $-0{,}1$; $-0{,}01$; $-0{,}001$. A que o quociente parece estar tendendo quando se aproxima de 0? (b) Ache $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(\frac{5}{6}\pi + h) - \cos \frac{5}{6}\pi}{h}$, interpretando-o como uma derivada.

45. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais valores de $\dfrac{\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + h) - \operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi}{h}$ quando h é 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001, e h é $-0{,}1$; $-0{,}01$; $-0{,}001$; $-0{,}0001$; $-0{,}00001$. A que o quociente parece tender quando h aproxima-se de zero? (b) Ache $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\tan(\frac{1}{4}\pi + h) - \tan\frac{1}{4}\pi}{h}$, interpretando-o como uma derivada.

46. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais os valores de $\dfrac{\sec(\frac{1}{6}\pi + h) - \sec\frac{1}{6}\pi}{h}$ quando h é 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001 e h é $-0{,}1$; $-0{,}01$; $-0{,}001$; $-0{,}0001$; $-0{,}00001$. A que o quociente parece tender quando h aproxima-se de 0? (b) Ache $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sec(\frac{1}{6}\pi + h) - \sec\frac{1}{6}\pi}{h}$, interpretando-o como uma derivada.

47. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais os valores de $\dfrac{\cos x - \cos\frac{1}{6}\pi}{x - \frac{1}{6}\pi}$ quando x é $\frac{3}{20}\pi$, $\frac{19}{120}\pi$, $\frac{33}{200}\pi$, $\frac{199}{1200}\pi$, $\frac{333}{2000}\pi$ e x é $\frac{11}{60}\pi$, $\frac{7}{40}\pi$, $\frac{101}{600}\pi$, $\frac{67}{400}\pi$, $\frac{1001}{6000}\pi$. A que o quociente parece tender quando x se aproxima de $\frac{\pi}{6}$? (b) Ache $\lim\limits_{x \to \pi/6} \dfrac{\cos x - \cos\frac{1}{6}\pi,}{x - \frac{1}{6}\pi}$ interpretando-o como uma derivada.

48. (a) Use uma calculadora para tabular, até quatro casas decimais, os valores de $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi}{x - \frac{1}{3}\pi}$ quando x é $\frac{3}{10}\pi$, $\frac{19}{60}\pi$, $\frac{33}{100}\pi$, $\frac{199}{600}\pi$, $\frac{333}{1000}\pi$ e x é $\frac{11}{30}\pi$, $\frac{7}{20}\pi$, $\frac{101}{300}\pi$, $\frac{67}{200}\pi$, $\frac{1001}{3000}\pi$. A que o quociente parece tender quando x se aproxima de $\frac{\pi}{3}$? (b) Ache $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi}{x - \frac{1}{3}\pi}$ interpretando-o como uma derivada.

49. (a) Use uma calculadora para tabular até quatro casas decimais os valores de $\dfrac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec}\frac{2}{3}\pi}{x - \frac{2}{3}\pi}$ quando, x é $\frac{3}{5}\pi$, $\frac{19}{30}\pi$, $\frac{33}{50}\pi$, $\frac{199}{300}\pi$, $\frac{333}{500}\pi$ e x é $\frac{11}{15}\pi$, $\frac{7}{10}\pi$, $\frac{101}{150}\pi$, $\frac{67}{100}\pi$, $\frac{1001}{1500}\pi$. A que parece tender o quociente quando x se aproxima de $\frac{2}{3}\pi$? (b) Ache $\lim\limits_{x \to 2\pi/3} \dfrac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec}\frac{2}{3}\pi}{x - \frac{2}{3}\pi}$ interpretando-o como uma derivada.

50. (a) Use uma calculadora para tabular, até quatro casas decimais, os valores de $\dfrac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}\frac{3}{4}\pi}{x - \frac{3}{4}\pi}$ quando x é $\frac{29}{40}\pi$; $\frac{59}{80}\pi$, $\frac{299}{400}\pi$, $\frac{599}{800}\pi$, $\frac{2999}{4000}\pi$ e x é $\frac{31}{40}\pi$, $\frac{61}{80}\pi$, $\frac{301}{400}\pi$, $\frac{601}{800}\pi$, $\frac{3001}{4000}\pi$. A que o quociente parece tender quando x se aproxima de $\frac{3}{4}\pi$? (b) Ache $\lim\limits_{x \to 3\pi/4} \dfrac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}\frac{3}{4}\pi}{x - \frac{3}{4}\pi}$, interpretando-o como uma derivada.

51. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função seno no ponto (a) $x = 0$; (b) $x = \frac{\pi}{3}$; (c) $x = \pi$.

52. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função coseno no ponto (a) $x = \frac{\pi}{2}$; (b) $x = -\frac{\pi}{2}$; (c) $x = \frac{\pi}{6}$.

53. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função tangente no ponto (a) $x = 0$; (b) $x = \frac{\pi}{4}$; (c) $x = -\frac{\pi}{4}$.

54. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função secante no ponto (a) $x = \frac{\pi}{4}$; (b) $x = -\frac{\pi}{4}$; (c) $x = \frac{3}{4}\pi$.

Nos Exercícios de 55 a 58, uma partícula move-se ao longo de uma linha reta de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula, da origem, em t s.
(a) Qual a velocidade instantânea da partícula em t s?
(b) Ache a velocidade instantânea da partícula em t_1 s para cada um dos valores de t_1.

55. $s = 4 \operatorname{sen} t$; t_1 é 0, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$ e π

56. $s = 6 \cos t$; t_1 é 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ e π

57. $s = -3 \cos t$; t_1 é 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ e π

58. $s = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} t$; t_1 é 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$ e π

59. Se um corpo com W kgf de peso é arrastado por um piso horizontal por uma força de F kgf de magnitude e numa direção que faz com o chão um ângulo de θ rad, F será dada por

$$F = \frac{kW}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

onde k é uma constante chamada de coeficiente de atrito. Se $k = 0{,}5$, ache a taxa de variação instantânea de F em relação a θ quando (a) $\theta = \frac{\pi}{4}$; (b) $\theta = \frac{\pi}{2}$.

60. Um projétil é atirado por uma arma com um ângulo de elevação cuja medida em radianos é $\frac{1}{2}\alpha$ e com uma velocidade inicial de v_0 m/s. Se R m for o alcance do projétil, então

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} \alpha \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$$

onde g m/s^2 é a aceleração devido à gravidade. (a) Se $v_0 = 480$, ache a taxa de variação de R com respeito a α quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (isto é, o ângulo de elevação mede $\frac{\pi}{4}$ rad). Tome $g = 10$. (b) Ache os valores de α para os quais $D_\alpha R > 0$.

3.6 A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO COMPOSTA E A REGRA DA CADEIA

Para encontrar a derivada de uma função composta usamos um dos importantes teoremas do Cálculo chamado de *regra da cadeia*. Antes de enunciar esse teorema, vamos dar três ilustrações mostrando como teoremas anteriores podem ser usados para determinar as derivadas de algumas funções compostas. Em cada ilustração, a expressão final da derivada será escrita sob uma forma nova para você, de modo que possamos associá-la com a regra da cadeia.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se

$$F(x) = (4x^2 + 1)^3$$

podemos obter $F'(x)$ aplicando duas vezes o Teorema 3.3.6 (a derivada de um produto). O cálculo é o seguinte:

$$\begin{aligned} F(x) &= (4x^2 + 1)^2(4x^2 + 1) \\ F'(x) &= (4x^2 + 1)^2 \cdot D_x(4x^2 + 1) + (4x^2 + 1) \cdot D_x[(4x^2 + 1)(4x^2 + 1)] \\ &= (4x^2 + 1)^2(8x) + (4x^2 + 1)[(4x^2 + 1)(8x) + (4x^2 + 1)(8x)] \\ &= (4x^2 + 1)^2(8x) + (4x^2 + 1)[2(4x^2 + 1)(8x)] \\ &= (4x^2 + 1)^2(8x) + 2[(4x^2 + 1)^2(8x)] \end{aligned}$$

Assim,

$$F'(x) = [3(4x^2 + 1)^2](8x) \tag{1}$$

Observe que F é a função composta $f \circ g$, onde $f(x) = x^3$ e $g(x) = 4x^2 + 1$; isto é,

$$\begin{aligned} F(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4x^2 + 1) \\ &= (4x^2 + 1)^3 \end{aligned}$$

Como $f'(x) = 3x^2$ e $g'(x) = 8x$, temos de (1)

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{2}$$

◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se

$$G(x) = \text{sen } 2x$$

então, para encontrar $G'(x)$, podemos usar as identidades trigonométricas

$$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

e o Teorema 3.3.6. Temos

$$\begin{aligned} G(x) &= 2 \text{ sen } x \cos x \\ G'(x) &= (2 \text{ sen } x)\, D_x(\cos x) + (2 \cos x)\, D_x(\text{sen } x) \\ &= (2 \text{ sen } x)(-\text{ sen } x) + (2 \cos x)(\cos x) \\ &= 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \end{aligned}$$

Logo,

$$G'(x) = (\cos 2x)(2) \tag{3}$$

Se tomamos $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = 2x$, então G é a função composta $f \circ g$, isto é,

$$\begin{aligned} G(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x) \\ &= \text{sen } 2x \end{aligned}$$

Como $f'(x) = \cos x$ e $g'(x) = 2$, podemos escrever (3) na forma

$$G'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{4}$$

◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se

$$H(x) = (\cos x)^{-1}$$

podemos calcular $H'(x)$ usando primeiro a identidade $(\cos x)^{-1} = \sec x$

$$\begin{aligned} H(x) &= \sec x \\ H'(x) &= \sec x \operatorname{tg} x \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ &= (-1)\frac{1}{\cos^2 x}(-\operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

Logo,

$$H'(x) = [-1(\cos x)^{-2}](-\operatorname{sen} x) \tag{5}$$

◀

Com $f(x) = x^{-1}$ e $g(x) = \cos x$, H é a função composta $f \circ g$; isto é,

$$\begin{aligned} H(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\cos x) \\ &= (\cos x)^{-1} \end{aligned}$$

como $f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$ e $g'(x) = -\operatorname{sen} x$, podemos escrever (5) na forma

$$H'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{6}$$

Observe que os segundos membros de (2), (4) e (6) são todos $f'(g(x))\, g'(x)$, que é o segundo membro da *regra* da cadeia, enunciada no teorema a seguir.

3.6.1 TEOREMA
A Regra da Cadeia

Se a função g for derivável em x e a função f for derivável em $g(x)$, então a função composta $f \circ g$ será derivável em x, e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \tag{7}$$

Antes de apresentarmos uma demonstração da regra da cadeia, vamos dar duas outras ilustrações mostrando sua aplicação.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Sejam

$$f(x) = x^{10} \qquad g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$$

Então, a função composta $f \circ g$ definida por

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= (2x^3 - 5x^2 + 4)^{10} \end{aligned}$$

Para aplicar (7), precisamos calcular $f'(g(x))$ e $g'(x)$. Como $f(x) = x^{10}$, $f'(x) = 10x^9$; assim

$$f'(g(x)) = 10[g(x)]^9$$

$$f'(g(x)) = 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9 \tag{8}$$

Além disso, como $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$,

$$g'(x) = 6x^2 - 10x \tag{9}$$

Logo, de (7), (8) e (9), temos

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x)\\ &= 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9(6x^2 - 10x)\end{aligned}$$

◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Sejam

$$f(x) = \text{sen } x \qquad g(x) = x^2 + 3$$

Então, a função composta $f \circ g$ será definida por

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= \text{sen}(x^2 + 3)\end{aligned}$$

Calculamos $f'(g(x))$ e $g'(x)$. Como $f(x) = \text{sen } x$, $f'(x) = \cos x$. Logo,

$$f'(g(x)) = \cos[g(x)]$$

$$f'(g(x)) = \cos(x^2 + 3) \tag{10}$$

Como $g(x) = x^2 + 3$,

$$g'(x) = 2x \tag{11}$$

Assim, de (7), (10) e (11), obtemos

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x)\\ &= [\cos(x^2 + 3)](2x)\\ &= 2x\cos(x^2 + 3)\end{aligned}$$

◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Suponha

$$h(x) = \left(\frac{2}{x - 1}\right)^5$$

Para determinar $h'(x)$, seja

$$f(x) = x^5 \qquad g(x) = \frac{2}{x - 1}$$

Então,

$$f'(x) = 5x^4 \qquad g'(x) = \frac{-2}{(x - 1)^2}$$

Como $h(x) = f(g(x))$, temos da regra da cadeia

$$\begin{aligned}h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x)\\ &= 5\left(\frac{2}{x - 1}\right)^4 \cdot \frac{-2}{(x - 1)^2}\\ &= \frac{-160}{(x - 1)^6}\end{aligned}$$

◀

Ao calcular as derivadas pela regra da cadeia não escrevemos as funções f e g como fizemos nas Ilustrações 4, 5 e 6, mas nos lembramos de suas definições. Por exemplo, o cálculo na Ilustração 6 poderia ser escrito como

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(\frac{2}{x-1}\right)^5 \\ h'(x) &= 5\left(\frac{2}{x-1}\right)^4 \cdot D_x\left(\frac{2}{x-1}\right) \\ &= 5\left(\frac{2}{x-1}\right)^4 \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-160}{(x-1)^6} \end{aligned}$$

EXEMPLO 1 Encontre $f'(x)$ pela regra da cadeia, se

$$f(x) = \frac{1}{4x^3 + 5x^2 - 7x + 8}$$

Solução Escrevendo $f(x) = (4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-1}$ e aplicando a regra da cadeia, iremos obter

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2} \cdot D_x(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8) \\ &= -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2}(12x^2 + 10x - 7) \\ &= \frac{-12x^2 - 10x + 7}{(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^2} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4\right]$$

Solução Da regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4\right] &= 4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right) \\ &= 4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3 \frac{(3x-1)(2) - (2x+1)(3)}{(3x-1)^2} \\ &= \frac{4(2x+1)^3(-5)}{(3x-1)^5} \\ &= -\frac{20(2x+1)^3}{(3x-1)^5} \end{aligned}$$

Se a notação de Leibniz for usada para a derivada, a regra da cadeia poderá ser enunciada da seguinte forma:

Se y for uma função de u, definida por $y = f(u)$ e $\frac{dy}{du}$ existir, e se u for uma função de x, definida por $u = g(x)$ e $\frac{du}{dx}$ existir, então y será uma função de

x e $\dfrac{dy}{dx}$ existirá e será dada por

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} \tag{12}$$

Observe em (12) uma forma conveniente para memorizar a regra da cadeia. O enunciado formal sugere uma "divisão" simbólica de *du* no numerador e denominador do segundo membro. Entretanto, lembrando a Secção 3.1 quando foi introduzida a notação de Leibniz $\dfrac{dy}{dx}$, foi enfatizado que nem *dy* nem *dx* têm significados independentes. Logo, devemos considerar (12) como uma fórmula envolvendo a notação formal de derivação.

Outra maneira de escrever a regra da cadeia é fazer a substituição $u = g(x)$. Então

$$(f \circ g)(x) = f(u) \qquad (f \circ g)'(x) = D_x f(u) \qquad f'(g(x)) = f'(u) \qquad g'(x) = D_x u$$

com essas substituições (7) torna-se

$$\boxed{D_x[f(u)] = f'(u) D_x u}$$

Usaremos essa forma da regra da cadeia para enunciar fórmulas importantes de derivação. Se u for uma função derivável de x, temos dos Teoremas 3.5.1 — 3.5.6 as seguintes fórmulas envolvendo as derivadas das funções trigonométricas: se u for uma função derivável de x

$D_x(\text{sen } u) = \cos u \, D_x u$

$D_x(\cos u) = -\text{sen } u \, D_x u$

$D_x(\text{tg } u) = \sec^2 u \, D_x u$

$D_x(\text{cotg } u) = -\text{cosec}^2 u \, D_x u$

$D_x(\sec u) = \sec u \, \text{tg } u \, D_x u$

$D_x(\text{cosec } u) = -\text{cosec } u \, \text{cotg } u \, D_x u$

EXEMPLO 3 Encontre $F'(t)$ se

$$F(t) = \text{tg}(3t^2 + 2t)$$

Solução Aplicamos a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sec^2(3t^2 + 2t) \cdot D_t(3t^2 + 2t) \\ &= \sec^2(3t^2 + 2t) \cdot (6t + 2) \\ &= 2(3t + 1) \sec^2(3t^2 + 2t) \end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$y = \text{sen}(\cos x)$$

Solução Aplicamos a regra da cadeia.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos(\cos x)[D_x(\cos x)] \\ &= \cos(\cos x)[-\text{sen}\, x] \\ &= -\text{sen}\, x\, [\cos(\cos x)] \end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Encontre $f'(x)$ se

$$f(x) = (3x^2 + 2)^2(x^2 - 5x)^3$$

Solução Consideremos f como o produto de duas funções g e h, onde

$$g(x) = (3x^2 + 2)^2 \qquad h(x) = (x^2 - 5x)^3$$

Do Teorema 3.3.6 para a derivada do produto de duas funções,

$$f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$$

Encontramos $h'(x)$ e $g'(x)$ pela regra da cadeia.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 + 2)^2[3(x^2 - 5x)^2(2x - 5)] + (x^2 - 5x)^3[2(3x^2 + 2)(6x)] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2[(3x^2 + 2)(2x - 5) + 4x(x^2 - 5x)] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2[6x^3 - 15x^2 + 4x - 10 + 4x^3 - 20x^2] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2(10x^3 - 35x^2 + 4x - 10) \end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Calcule

$$D_x(\sec^4 2x^2)$$

Solução Usamos a regra da cadeia duas vezes.

$$\begin{aligned} D_x(\sec^4 2x^2) &= 4 \sec^3 2x^2[D_x(\sec 2x^2)] \\ &= 4 \sec^3 2x^2[(\sec 2x^2 \operatorname{tg} 2x^2)\, D_x(2x^2)] \\ &= (4 \sec^4 2x^2 \operatorname{tg} 2x^2)(4x) \\ &= 16x \sec^4 2x^2 \operatorname{tg} 2x^2 \end{aligned}$$

Vamos retornar agora à questão da demonstração da regra da cadeia. Uma parte importante da prova consiste em introduzir a nova função F que tem propriedades úteis. Esse recurso de "construção" de uma função é comum em Matemática.

Prova da Regra da Cadeia Seja x_1 qualquer número do domínio de g, tal que g seja derivável em x_1 e f seja derivável em $g(x_1)$. Vamos formar a função F definida por

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)} & \text{se } t \neq g(x_1) \\ f'(g(x_1)) & \text{se } t = g(x_1) \end{cases} \tag{13}$$

Então,

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = \lim_{t \to g(x_1)} \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)}$$

De (7) na Secção 3.1, a função no segundo membro da fórmula acima é $f'(g(x_1))$. Logo,

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = f'(g(x_1)) \tag{14}$$

Mas de (13),

$$f'(g(x_1)) = F(g(x_1))$$

Substituindo essa igualdade em (14), obtemos

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = F(g(x_1))$$

Portanto, F é contínua em $g(x_1)$. Além disso, de (13),

$$F(t) = \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)} \quad \text{se } t \neq g(x_1)$$

Multiplicando ambos os lados dessa equação por $t - g(x_1)$, obtemos

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[t - g(x_1)] \quad \text{se } t \neq g(x_1) \tag{15}$$

Observe que (15) é verdadeira, mesmo que $t = g(x_1)$, pois o primeiro membro é

$$f(g(x_1)) - f(g(x_1)) = 0$$

e o segundo membro é

$$F(g(x_1))[g(x_1) - g(x_1)] = 0$$

Logo, a restrição em (15) de que $t \neq g(x_1)$ não é necessária e escrevemos

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[t - g(x_1)] \tag{16}$$

Seja, agora, h a função composta $f \circ g$, tal que

$$h(x) = f(g(x)) \tag{17}$$

Então, de (7) da Secção 3.1, se o limite existir,

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{h(x) - h(x_1)}{x - x_1}$$

Substituindo (17) no segundo membro dessa igualdade, obtemos

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(g(x)) - f(g(x_1))}{x - x_1} \tag{18}$$

se o limite existir. Seja, agora, $t = g(x)$ em (16); segue, então, que para todo x no domínio de g, tal que $g(x)$ esteja no domínio de f,

$$f(g(x)) - f(g(x_1)) = F(g(x))[g(x) - g(x_1)]$$

Substituindo em (18), temos

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{F(g(x))[g(x) - g(x_1)]}{x - x_1}$$

Assim, se o limite existir

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} F(g(x)) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} \tag{19}$$

Como F é contínua em $g(x_1)$,

$$\lim_{x \to x_1} F(g(x)) = F(g(x_1)) \tag{20}$$

Mas de (13),

$$F(g(x_1)) = f'(g(x_1))$$

Substituindo em (20), obtemos

$$\lim_{x \to x_1} F(g(x)) = f'(g(x_1)) \tag{21}$$

Além disso, como g é derivável em x_1,

$$\lim_{x \to x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = g'(x_1)$$

Substituindo de (21) e dessa equação em (19) e trocando $h'(x_1)$ por $(f \circ g)'(x_1)$, temos

$$(f \circ g)'(x_1) = f'(g(x_1)) \cdot g'(x_1)$$

que é (7) com x substituído por x_1. Dessa forma, provamos a regra da cadeia. ■

EXERCÍCIOS 3.6

Nos Exercícios de 1 a 12, ache a derivada da função dada.

1. $f(x) = (2x + 1)^3$
2. $f(x) = (10 - 5x)^4$
3. $F(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$
4. $g(r) = (2r^4 + 8r^2 + 1)^5$
5. $f(t) = (2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)^2$
6. $H(z) = (z^3 - 3z^2 + 1)^{-3}$
7. $f(x) = (x^2 + 4)^{-2}$
8. $g(x) = \operatorname{sen} x^2$
9. $f(x) = 4 \cos 3x - 3 \operatorname{sen} 4x$
10. $G(x) = \sec^2 x$
11. $h(t) = \frac{1}{3} \sec^3 2t - \sec 2t$
12. $f(x) = \cos(3x^2 + 1)$

Nos Exercícios de 13 a 24, calcule a derivada indicada.

13. $\dfrac{d}{dx}(\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x)$
14. $\dfrac{d}{dt}(2 \operatorname{sen}^3 t \cos^2 t)$
15. $\dfrac{d}{dt}(\operatorname{cotg}^4 t - \operatorname{cosec}^4 t)$
16. $\dfrac{d}{dx}[(4x^2 + 7)^2(2x^3 + 1)^4]$
17. $D_u[(3u^2 + 5)^3(3u - 1)^2]$
18. $D_x[(x^2 - 4x^{-2})^2(x^2 + 1)^{-1}]$
19. $D_x[(2x - 5)^{-1}(4x + 3)^{-2}]$
20. $D_x[(2x - 9)^2(x^3 + 4x - 5)^3]$
21. $D_r[(r^2 + 1)^3(2r^2 + 5r - 3)^2]$
22. $D_y[(y + 3)^3(5y + 1)^2(3y^2 - 4)]$
23. $\dfrac{d}{dy}\left[\left(\dfrac{y - 7}{y + 2}\right)^2\right]$
24. $\dfrac{d}{dt}\left[\left(\dfrac{2t^2 + 1}{3t^3 + 1}\right)^2\right]$

Nos Exercícios de 25 a 36, ache a derivada da função dada.

25. $f(x) = \left(\dfrac{2x - 1}{3x^2 + x - 2}\right)^3$
26. $F(x) = \dfrac{(x^2 + 3)^3}{(5x - 8)^2}$
27. $f(z) = \dfrac{(z^2 - 5)^3}{(z^2 + 4)^2}$
28. $G(x) = \dfrac{(4x - 1)^3(x^2 + 2)^4}{(3x^2 + 5)^2}$
29. $g(t) = \operatorname{sen}^2(3t^2 - 1)$
30. $f(x) = \operatorname{tg}^2 x^2$
31. $f(x) = (\operatorname{tg}^2 x - x^2)^3$
32. $G(x) = (2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x)^3$
33. $f(y) = \dfrac{3 \operatorname{sen} 2y}{\cos^2 2y + 1}$
34. $g(x) = \dfrac{\operatorname{cotg}^2 2x}{1 + x^2}$
35. $F(x) = 4 \cos(\operatorname{sen} 3x)$
36. $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos 2x)$

37. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = (x^2 - 1)^2$ em cada um dos seguintes pontos $(-2, 9)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(2, 9)$. Faça um esboço do gráfico e desenhe segmentos das retas tangentes nos pontos dados.

38. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = 4 \operatorname{tg} 2x$ no ponto $x = \frac{\pi}{8}$.

Nos Exercícios de 39 a 42, uma partícula move-se ao longo de uma reta de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem, em t s. (a) Qual será a velocidade da partícula em t s? (b) Ache a velocidade instantânea da partícula em t s para cada valor dado de t_1.

39. $s = \dfrac{(t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^2}$, $t \geqslant 0$; t_1 é 1, 2
40. $s = \left(\dfrac{3t}{2t + 1}\right)^4$; $t \geqslant 0$; t_1 é $\frac{1}{2}$, 1
41. $s = 5 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$; t_1 é $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$
42. $s = 2 \cos \pi(t + 1)$; t_1 é $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$

43. A força eletromotriz de um circuito elétrico com um gerador simplificado é $E(t)$ volts em t s, onde $E(t) = 50 \operatorname{sen} 120\pi t$. Ache a taxa de variação instantânea de $E(t)$ em relação a t em (a) 0,02 s e (b) 0,2 s.

44. Uma onda produzida por um som simples tem a equação $P(t) = 0{,}003 \operatorname{sen} 180\pi t$, onde $P(t)$ dinas/cm² é a diferença entre a pressão atmosférica e a pressão do ar no tímpano, em t s. Ache a taxa de variação instantânea de $P(t)$ em relação a t em (a) $\frac{1}{9}$ s; (b) $\frac{1}{8}$ s; (c) $\frac{1}{7}$ s.

45. Quando um pêndulo com 10 cm de comprimento balança, de modo que θ seja a medida em radianos do triângulo formado pelo pêndulo e uma reta vertical, então, se $h(\theta)$ cm for a altura da extremidade do pêndulo acima de sua posição mais baixa, $h(\theta) = 20 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta$. Ache a taxa de variação instantânea de $h(\theta)$ em relação a θ quando (a) $\theta = \frac{1}{3}\pi$; (b) $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

46. Se K unidades quadradas for a área de um triângulo retângulo, 10 unidades será o comprimento da hipotenusa e α será a medida em radianos de um ângulo agudo, então $K = 25 \operatorname{sen} 2\alpha$. Ache a taxa de variação instantânea de K em relação a α quando (a) $\alpha = \frac{1}{6}\pi$; (b) $\alpha = \frac{1}{4}\pi$; (c) $\alpha = \pi$.

47. Em uma floresta, um predador alimenta-se de sua presa, e a população de predadores em qualquer época é uma função do número de presas naquele momento. Suponha que quando há x presas na floresta, a população de predadores é y e $y = \frac{1}{6}x^2 + 90$. Além disso, se t semanas tiverem se passado até o final da temporada de caça, $x = 7t + 85$. A que taxa a população de predadores estará crescendo 8 semanas depois que a temporada de caça terminou? Não expresse y em termos de t, mas use a regra da cadeia.

48. A equação de demanda para um brinquedo é $p^2x = 5000$, onde x brinquedos são demandados por mês, quando p for o preço de cada unidade. Espera-se que em t meses, onde $t \in [0,6]$, o preço do brinquedo seja p, onde $20p = t^2 + 7t + 100$. Qual será a taxa estimada da variação da demanda em relação ao tempo em 5 meses? Não expresse x em termos de t, mas use a regra da cadeia.

49. Dada $f(x) = x^3$ e $g(x) = f(x^2)$. Encontre (a) $f'(x^2)$; (b) $g'(x)$.

50. Dadas $f(u) = u^2 + 5u + 5$ e $g(x) = (x + 1)/(x - 1)$, ache a derivada de $f \circ g$ de duas maneiras: (a) encontrando primeiro $(f \circ g)(x)$ e então calculando $(f \circ g)'(x)$; (b) usando a regra da cadeia.

51. Deduza a fórmula da derivada da função co-seno usando a fórmula da derivada da função seno, a regra da cadeia e as identidades

$$\cos x = \text{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \text{ e } \text{sen}\, x = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)$$

52. Use a regra da cadeia para provar que (a) a derivada de uma função par é uma função ímpar e (b) a derivada de uma função ímpar é uma função par, desde que essas derivadas existam.

53. Use o resultado do Exercício 52 (a) para provar que se g for uma função par e $g'(x)$ existir, então se $h(x) = (f \circ g)(x)$ e se f for derivável em toda parte, $h'(0) = 0$.

54. Suponha que f e g sejam funções, tais que (i) $g'(x_1)$ e $f'(g(x_1))$ existam e (ii) para todo $x \neq x_1$ em algum intervalo aberto contendo x_1, $(g(x) - g(x_1) \neq 0$. Então,

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_1)}{x - x_1} = \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \cdot \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1}$$

(a) Prove que quando $x \to x_1$, $g(x) \to g(x_1)$ e então que

$$(f \circ g)'(x_1) = f'(g(x_1))g'(x_1)$$

simplificando a prova da regra da cadeia sob a exigência adicional (ii). (b) Mostre que a prova da regra da cadeia dada na parte (a) aplica-se se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, mas que não se aplica se $f(x) = x^2$ e $g(x) = \text{sgn}\, x$.

Nos Exercícios de 55 a 58, mostre que a prova simplificada da regra da cadeia com a exigência adicional (ii) não é válida para as funções f e g dadas. Em cada exercício, faça um esboço do gráfico de g.

55. $f(x) = x^4$; $g(x) = [\![x]\!]$

56. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = |x - 2| + |x + 2|$

57. $f(x) = x^2$; $g(x) = |x| + |x - 1|$

58. $f(x) = \text{tg}\, x$; $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$

59. Suponha que f e g sejam funções, tais que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $(f \circ g)(x) = x$. Prove que se $g'(x)$ existir, então $g'(x) = g(x)$.

3.7 A DERIVADA DA FUNÇÃO POTÊNCIA PARA EXPOENTES RACIONAIS

A função f definida por

$$f(x) = x^r \tag{1}$$

é chamada de **função potência**. Na Secção 3.3, obtivemos a seguinte fórmula para a derivada dessa função para r inteiro positivo ou negativo:

$$f'(x) = rx^{r-1} \tag{2}$$

Provaremos agora que essa fórmula continua válida, para r racional, com certas restrições se $x = 0$.

Primeiro vamos considerar $x \neq 0$ e $r = 1/q$, onde q é um inteiro positivo. A fórmula (1) pode, então, ser escrita

$$f(x) = x^{1/q} \tag{3}$$

Da Definição 3.1.3,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{1/q} - x^{1/q}}{\Delta x} \tag{4}$$

Para calcular o limite em (4), precisamos racionalizar o numerador. Usamos então a fórmula a seguir, obtida na Secção 2.9, qual seja:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{5}$$

Racionalizamos o numerador da fração em (4) aplicando (5), para $a = (x + \Delta x)^{1/q}$, $b = x^{1/q}$ e $n = q$. Assim, vamos multiplicar o numerador e o denominador por

$$[(x + \Delta x)^{1/q}]^{(q-1)} + [(x + \Delta x)^{1/q}]^{(q-2)}x^{1/q} + \ldots + (x^{1/q})^{(q-1)}$$

Então, de (4), $f'(x)$ é igual a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x)^{1/q} - x^{1/q}][(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]}{\Delta x[(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]} \tag{6}$$

Agora, aplicando (5) ao numerador, obtemos $(x + \Delta x)^{q/q} - x^{q/q}$, que é Δx. Assim de (6),

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x[(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}]} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q}x^{1/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}} \\ &= \frac{1}{x^{(q-1)/q} + x^{(q-1)/q} + \ldots + x^{(q-1)/q}} \end{aligned}$$

Como há exatamente q termos no denominador da fração acima,

$$f'(x) = \frac{1}{qx^{1-(1/q)}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{q}x^{1/q-1} \tag{7}$$

que é a fórmula (2) com $r = 1/q$. Completamos a parte crucial da demonstração. Mostramos que a função definida por (3) é derivável e que sua derivada é dada por (7).

Agora, em (1) com $x \neq 0$, seja $r = p/q$, onde p é qualquer inteiro não nulo e q é qualquer inteiro positivo; isto é, r é qualquer número racional, exceto zero. Então, (1) pode ser escrito como

$$f(x) = x^{p/q} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x^{1/q})^p$$

Como p é um inteiro positivo ou negativo, segue da regra da cadeia e dos Teoremas 3.3.2 e 3.3.8 que

$$f'(x) = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot D_x(x^{1/q})$$

Aplicando a fórmula (7) a $D_x(x^{1/q})$, obtemos

$$f'(x) = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot \frac{1}{q}x^{1/q-1}$$

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{p/q-1/q+1/q-1}$$

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{p/q-1}$$

Essa fórmula é igual a (2), com $r = p/q$.

Se $r = 0$ e $x \neq 0$, (1) torna-se: $f(x) = x^0$; isto é, $f(x) = 1$. Assim $f'(x) = 0$, o que pode ser escrito como $f'(x) = 0 \cdot x^{0-1}$. Logo, (2) é válida para $r = 0$ com $x \neq 0$. Mostramos, portanto, que a fórmula (2) é válida quando r for qualquer número racional, com $x \neq 0$.

Sabemos que 0 estará no domínio da função potência f se e somente se r for um número positivo, pois para $r \leqslant 0$, $f(0)$ não é definida. Logo, queremos determinar para que valores positivos de r, $f'(0)$ será dada pela fórmula (2). Precisamos excluir os valores de r para os quais $0 < r \leqslant 1$, pois para esses valores de r, x^{r-1} não é um número real, quando $x = 0$. Vamos supor, então, que $r > 1$. Pela definição de derivada,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{x^r - 0^r}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} x^{r-1} \end{aligned}$$

Quando $r > 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^{r-1}$ existe e é igual a 0, desde que r seja um número tal que x^{r-1} esteja definida em algum intervalo aberto contendo 0. Por exemplo, se $r = \frac{3}{2}$, $x^{r-1} = x^{1/2}$, que não está definida em nenhum intervalo aberto contendo 0 (uma vez que $x^{1/2}$ não existe quando $x < 0$). Entretanto, se $r = \frac{5}{3}$, $x^{r-1} = x^{2/3}$, que está definida em todo intervalo aberto contendo 0. Logo, a fórmula (2) dá a derivada da função potência quando $x = 0$, desde que r seja um número para o qual x^{r-1} esteja definida em algum intervalo aberto contendo 0. Assim sendo, acabamos de provar o teorema enunciado a seguir.

3.7.1 TEOREMA

Se f for a função potência definida por $f(x) = x^r$, onde r é qualquer número racional, então f será derivável e

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

Para que essa fórmula tenha validade para $f'(0)$, r deve ser tal que x^{r-1} esteja definida em algum intervalo aberto contendo 0.

EXEMPLO 1 Encontre $f'(x)$ se

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$$

Solução $f(x) = 4x^{2/3}$. Do Teorema 3.7.1,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot \tfrac{2}{3}(x^{2/3-1}) \\ &= \tfrac{8}{3}x^{-1/3} \\ &= \frac{8}{3x^{1/3}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

O teorema enunciado a seguir é uma conseqüência imediata do Teorema 3.7.1 e da regra da cadeia.

3.7.2 TEOREMA Se f e g forem funções tais que $f(x) = [g(x)]^r$, onde r é qualquer número racional e se $g'(x)$ existir, então f será derivável e

$$f'(x) = r\,[g(x)]^{r-1}\,g'(x)$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$D_x(\sqrt{2x^3 - 4x + 5})$$

Solução Escrevemos $\sqrt{2x^3 - 4x + 5}$ como $(2x^3 - 4x + 5)^{1/2}$ e aplicamos o Teorema 3.7.2.

$$\begin{aligned} D_x[(2x^3 - 4x + 5)^{1/2}] &= \tfrac{1}{2}(2x^3 - 4x + 5)^{-1/2} \cdot D_x(2x^3 - 4x + 5) \\ &= \tfrac{1}{2}(2x^3 - 4x + 4)^{-1/2}(6x^2 - 4) \\ &= \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{2x^3 - 4x + 5}} \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Encontre $g'(x)$ se

$$g(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{3x^2 - 1}}$$

Solução A fração dada pode ser escrita como um produto:

$$g(x) = x^3(3x^2 - 1)^{-1/3}$$

Dos Teoremas 3.3.6 e 3.7.2,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2(3x^2 - 1)^{-1/3} - \tfrac{1}{3}(3x^2 - 1)^{-4/3}(6x)(x^3) \\ &= x^2(3x^2 - 1)^{-4/3}[3(3x^2 - 1) - 2x^2] \\ &= \frac{x^2(7x^2 - 3)}{(3x^2 - 1)^{4/3}} \end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Encontre $f'(r)$ se

$$f(r) = \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 r + 9 \cos^2 r}$$

Solução $f(r) = (4 \operatorname{sen}^2 r + 9 \cos^2 r)^{1/2}$. Aplicamos o Teorema 3.7.2.

$$\begin{aligned} f'(r) &= \tfrac{1}{2}(4 \operatorname{sen}^2 r + 9 \cos^2 r)^{-1/2} \cdot D_r(4 \operatorname{sen}^2 r + 9 \cos^2 r \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} r \cdot D_r(\operatorname{sen} r) + 18 \cos r \cdot D_r(\cos r)}{2\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 r + 9 \cos^2}} \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} r \cos r + 18 \cos r(-\operatorname{sen} r)}{2\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 r + 9 \cos^2 r}} \\ &= \frac{-10 \operatorname{sen} r \cos r}{2\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 r + 9 \cos^2 r}} \\ &= -\frac{5 \operatorname{sen} r \cos r}{\sqrt{4 \operatorname{sen}^2 r + 9 \cos^2 r}} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 3.7

Nos Exercícios de 1 a 24, ache a derivada da função dada.

1. $f(x) = 4x^{1/2} + 5x^{-1/2}$

2. $f(x) = 3x^{2/3} - 6x^{1/3} + x^{-1/3}$

3. $g(x) = \sqrt{1 + 4x^2}$

4. $f(s) = \sqrt{2 - 3s^2}$

5. $f(x) = (5 - 3x)^{2/3}$

6. $g(x) = \sqrt[3]{4x^2 - 1}$

7. $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{25 - y^2}}$

8. $f(x) = (5 - 2x^2)^{-1/3}$

9. $h(t) = 2 \cos \sqrt{t}$

10. $f(x) = 4 \sec \sqrt{x}$

11. $g(r) = \operatorname{cotg} \sqrt{3r}$

12. $g(x) = \sqrt{3 \operatorname{sen} x}$

13. $f(x) = (\operatorname{sen} 3x)^{-1/2}$

14. $f(y) = \sqrt{1 + \operatorname{cosec}^2 y}$

15. $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + 1}$

16. $f(y) = 3 \cos \sqrt[3]{2y^2}$

17. $g(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 5}{3x + 1}}$

18. $h(t) = \dfrac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1}$

19. $F(x) = \sqrt[3]{2x^3 - 5x^2 + x}$

20. $G(t) = \sqrt{\dfrac{5t + 6}{5t - 4}}$

21. $g(t) = \sqrt{2t} + \sqrt{\dfrac{2}{t}}$

22. $g(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 5x - 1)^2}$

23. $f(x) = (5 - x^2)^{1/2}(x^3 + 1)^{1/4}$

24. $g(y) = (y^2 + 3)^{1/3}(y^3 - 1)^{1/2}$

Nos Exercícios de 25 a 36, calcule a derivada indicada.

25. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right)$

26. $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x^2 - 5}\,\sqrt[3]{x^2 + 3})$

27. $\dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} t + 1}{1 - \operatorname{sen} t}}\right)$

28. $\dfrac{d}{dz}(\operatorname{sen} \sqrt[3]{z} \cos \sqrt[3]{z})$

29. $\dfrac{d}{dy}(\operatorname{tg} \sqrt{y} \sec \sqrt{y})$

30. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\dfrac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x}}\right)$

31. $D_x\left(\dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{x + 1}}\right)$

32. $D_x\left(\dfrac{4x + 6}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}\right)$

33. $D_x(\sqrt{9 + \sqrt{9 - x}})$

34. $D_y\left(\sqrt[4]{\dfrac{y^3 + 1}{y^3 - 1}}\right)$

35. $D_z\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 2z}}\right)$

36. $D_x\left(\sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)$

Nos Exercícios 37 e 38, encontre uma equação da reta tangente à curva em cada um dos pontos dados. Faça um esboço do gráfico e inclua segmentos de retas tangentes nos pontos dados.

37. $y = (2x - 2)^{2/3}$; $(-3, 4)$, $(0, \sqrt[3]{4})$, $(1, 0)$, $(2, \sqrt[3]{4})$, $(5, 4)$

38. $y = (6 - 2x)^{1/3}$; $(-1, 2)$, $(1, \sqrt[3]{4})$, $(3, 0)$, $(5, -\sqrt[3]{4})$, $(7, -2)$

39. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x^2 + 9}$, no ponto $(4, 5)$.

40. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = (7x - 6)^{-1/3}$ que seja perpendicular à reta $12x - 7y + 2 = 0$.

41. Ache uma equação da reta normal à curva $y = x\sqrt{16 + x^2}$ na origem.

42. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{\operatorname{sen} x + \cos x}$ no ponto onde $x = \pi/4$.

43. Um objeto move-se ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento $s = \sqrt{4t^2 + 3}$, com $t \geqslant 0$. Ache o valor de t para o qual a medida da velocidade instantânea é (a) 0; (b) 1; (c) 2.

44. Um objeto move-se ao longo de uma reta, de acordo com a equação do movimento $s = \sqrt{5 + t^2}$, com $t \geqslant 0$. Ache o valor de t para o qual a medida da velocidade instantânea é (a) 0; (b) 1.

45. Suponha que um líquido seja produzido por um certo processo químico e que a função custo total C seja dada por $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$, onde $C(x)$ é a quantia correspondente ao custo total da produção de x litros. Encontre (a) o custo marginal quando 16 L são produzidos e (b) o número de litros produzidos quando o custo marginal é \$ 0,40 por litro.

46. A quantia em dinheiro no custo total da produção de x unidades de certa mercadoria é dada por $C(x) = 40 + 3x + 9\sqrt{2x}$. Ache (a) o custo marginal quando 50 unidades são produzidas e (b) o número de unidades produzidas quando o custo marginal é \$ 4,50.

47. Uma imobiliária que administra um condomínio aluga cada apartamento por \$ p por mês quando x apartamentos são alugados $p = 30\sqrt{300 - 2x}$. Se \$ $R(x)$ for o rendimento recebido do aluguel de x apartamentos, então $R(x) = px$. Quantos apartamentos deverão ser alugados antes que a taxa de variação de R em relação a x (rendimento marginal) seja zero? (*Nota:* como x é o número de apartamentos alugados, x é um inteiro não negativo. Para aplicar o cálculo, vamos supor que x seja um número real não-negativo arredondado para o número inteiro mais próximo.)

48. A produção diária de uma dada fábrica é de $f(x)$ unidades quando o capital investido for de x milhares de uma unidade monetária \$ e $f(x) = 200\sqrt{2x + 1}$. Se a capitalização corrente for de \$ 760.000, use a derivada para estimar a variação na produção diária, se o capital investido for aumentado em \$ 1000.

49. Um avião está voando paralelamente ao chão, a uma altitude de 2 km e com uma velocidade escalar de $4\frac{1}{2}$ km/min. Se em dado instante o avião passar exatamente sobre a Estátua da Liberdade, qual será a taxa de variação da distância sobre a linha de visão entre o avião e a estátua, 20 s mais tarde?

50. Dada $f(u) = 1/u^2$ e $g(x) = \sqrt{x}/\sqrt{2x^3 - 6x + 1}$, ache a derivada de $f \circ g$ de duas maneiras: (a) encontrando primeiro $(f \circ g)(x)$ e depois $(f \circ g)'(x)$; (b) usando a regra da cadeia.

Nos Exercícios de 51 a 54, ache a derivada da função dada. (Sugestão: $|a| = \sqrt{a^2}$.)

51. $f(x) = |x^2 - 4|$

52. $g(x) = x|x|$

53. $g(x) = |x|^3$

54. $h(x) = \sqrt[3]{|x| + x}$

55. Suponha que $g(x) = |f(x)|$. Prove que se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então $|g'(x)| = |f'(x)|$.

56. Suponha que $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ e $h(x) = f(g(x))$, onde f é derivável em 3. Prove que $h'(0) = 0$.

3.8 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Se $f = \{(x, y) | y = 3x^2 + 5x + 1\}$, então a equação

$$y = 3x^2 + 5x + 1$$

define a função f explicitamente. Mas, nem todas as funções estão definidas dessa forma. Por exemplo, se tivermos a equação

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2 \tag{1}$$

não poderemos resolver y em termos de x; além disso, podem existir uma ou mais funções f, para as quais se $y = f(x)$, a equação (1) estará satisfeita, isto é, tais que a equação

$$x^6 - 2x = 3[f(x)]^6 + [f(x)]^5 - [f(x)]^2$$

seja válida para todos os valores de x no domínio de f. Nesse caso, a função f está definida *implicitamente* pela equação dada.

Com a hipótese de que (1) define y como uma função derivável de x, a derivada de y em relação a x pode ser encontrada por *derivação implícita.*

A equação (1) é um tipo especial de equação envolvendo x e y, pois pode ser escrita de tal forma que todos os termos envolvendo x estejam de um lado da equação, enquanto que no outro lado ficarão todos os termos envolvendo y. Ela serve como um primeiro exemplo do processo de derivação implícita.

O lado esquerdo de (1) é uma função de x e o lado direito é uma função de y. Seja F a função definida pelo lado esquerdo e seja G a função definida pelo lado direito. Assim,

$$F(x) = x^6 - 2x \qquad G(y) = 3y^6 + y^5 - y^2$$

onde y é uma função de x, digamos $y = f(x)$. Dessa forma, (1) pode ser escrita como

$$F(x) = G(f(x))$$

Essa equação está satisfeita por todos os valores de x no domínio de f para os quais $G(f(x))$ existe.

Então, para todos os valores de x para os quais f é derivável,

$$D_x(x^6 - 2x) = D_x(3y^6 + y^5 - y^2) \tag{2}$$

A derivada do primeiro membro de (2) é facilmente encontrada e

$$D_x(x^6 - 2x) = 6x^5 - 2 \tag{3}$$

Encontramos a derivada do segundo membro de (2) pela regra da cadeia.

$$D_x(3y^6 + y^5 - y^2) = 18y^5 \cdot \frac{dy}{dx} + 5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} - 2y \cdot \frac{dy}{dx} \tag{4}$$

Substituindo os valores de (3) e (4) em (2), obtemos

$$6x^5 - 2 = (18y^5 + 5y^4 - 2y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}$$

Observe que ao usarmos a derivação implícita, obtivemos uma expressão para $\frac{dy}{dx}$ que envolve ambas as variáveis, x e y.

Na ilustração a seguir, o método da derivação implícita será usado para encontrar $\frac{dy}{dx}$ em uma equação mais geral.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Considere a equação

$$3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y \tag{5}$$

e suponha que exista pelo menos uma função derivável f, tal que se $y = f(x)$, a equação (5) estará satisfeita. Derivando-se ambos os membros de (5) (tendo em mente que y é uma função derivável de x) e aplicando os teoremas para a derivada de um produto, a de uma potência e a regra da cadeia, obtemos

$$12x^3y^2 + 3x^4\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - 7y^3 - 7x\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) = 0 - 8\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(6x^4y - 21xy^2 + 8) = 7y^3 - 12x^3y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}$$ ◀

Lembre-se de que estamos supondo que ambas (1) e (5) definam y como pelo menos uma função derivável de x. Pode acontecer que uma equação em x e y não implique a existência de nenhuma função com valores reais, como é o caso da equação

$$x^2 + y^2 + 4 = 0$$

que não está satisfeita por nenhum valor real de x e y. Além disso, é possível que uma equação em x e y possa estar satisfeita por várias funções, algumas das quais são deriváveis, enquanto que outras não o são. Uma discussão geral do assunto foge ao contexto deste livro, mas pode ser encontrada em textos de Cálculo Avançado. Nas discussões subseqüentes, quando afirmarmos que uma equação em x e y define y como uma função implícita de x, suporemos que uma ou mais dessas funções seja derivável. O Exemplo 4, a seguir, ilustra o fato de que a derivação implícita resulta a derivada de duas funções deriváveis, definidas pela equação dada.

EXEMPLO 1 Dada $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^4 + y^4$, ache $\frac{dy}{dx}$.

Solução Derivando implicitamente em relação a x, teremos

$$2(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) - 2(x - y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = 4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$2x + 2y + (2x + 2y)\frac{dy}{dx} - 2x + 2y + (2x - 2y)\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(4x - 4y^3) = 4x^3 - 4y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - y}{x - y^3}$$

EXEMPLO 2 Ache uma equação da reta tangente à curva $x^3 + y^3 = 9$, no ponto (1, 2).

Solução Vamos derivar implicitamente em relação a x.

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

Logo, no ponto (1, 2), $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{4}$. Uma equação da reta tangente é, então,

$$y - 2 = -\tfrac{1}{4}(x - 1)$$

$$x + 4y - 9 = 0$$

EXEMPLO 3 Dada $x \cos y + y \cos x = 1$, ache $\dfrac{dy}{dx}$.

Solução Derivando implicitamente em relação a x, obteremos

$$1 \cdot \cos y + x(-\operatorname{sen} y)\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}(\cos x) + y(-\operatorname{sen} x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos x - x \operatorname{sen} y) = y \operatorname{sen} x - \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \operatorname{sen} x - \cos y}{\cos x - x \operatorname{sen} y}$$

EXEMPLO 4 Dada a equação $x^2 + y^2 = 9$, ache (a) $\dfrac{dy}{dx}$ por derivação implícita; (b) as duas funções definidas pela equação; (c) a derivada de cada função obtida na parte (b) por derivação explícita. (d) Comprove que o resultado obtido na parte (a) está de acordo com os resultados obtidos na parte (c).

Solução

(a) Vamos derivar implicitamente.

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) Resolvendo a equação dada em y,

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{9 - x^2}$$

Sejam f_1 e f_2 as duas funções para as quais

$$f_1(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$$

(c) Como $f_1(x) = (9 - x^2)^{1/2}$ e $f_2(x) = -(9 - x^2)^{1/2}$, pela regra da cadeia obtemos

$$f_1'(x) = \tfrac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x) \qquad f_2'(x) = -\tfrac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \qquad\qquad = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

(d) Para $y = f_1(x)$ onde, $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$, segue da parte (c) que

$$f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$= -\frac{x}{y}$$

o que está de acordo com a parte (a).

Para $y = f_2(x)$, onde $f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$, temos da parte (c)

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$= -\frac{x}{-\sqrt{9 - x^2}}$$

$$= -\frac{x}{y}$$

o que também está de acordo com o resultado obtido na parte (a).

EXERCÍCIOS 3.8

Nos Exercícios de 1 a 28, ache $\dfrac{dy}{dx}$ *por derivação implícita.*

1. $x^2 + y^2 = 16$
2. $4x^2 - 9y^2 = 1$
3. $x^3 + y^3 = 8xy$
4. $x^2 + y^2 = 7xy$
5. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$
6. $\dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{y} = 2x$
7. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$
8. $2x^3y + 3xy^3 = 5$
9. $x^2y^2 = x^2 + y^2$
10. $(2x + 3)^4 = 3y^4$
11. $x^2 = \dfrac{x + 2y}{x - 2y}$
12. $\dfrac{x}{\sqrt{y}} - 4y = x$
13. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} = 4y^2$
14. $\sqrt{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{y} = x$
15. $\sqrt{xy} + 2x = \sqrt{y}$
16. $y + \sqrt{xy} = 3x^3$
17. $\dfrac{y}{\sqrt{x} - y} = 2 + x^2$
18. $x^2y^3 = x^4 - y^4$
19. $y = \cos(x - y)$
20. $x = \operatorname{sen}(x + y)$
21. $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 y = 4$
22. $\operatorname{cotg} xy + xy = 0$
23. $x \operatorname{sen} y + y \cos x = 1$
24. $\cos(x + y) = y \operatorname{sen} x$
25. $\sec^2 y + \operatorname{cotg}(x - y) = \operatorname{tg}^2 x$
26. $\operatorname{cosec}(x - y) + \sec(x + y) = x$
27. $(x + y)^2 - (x - y)^2 = x^3 + y^3$
28. $y\sqrt{2 + 3x} + x\sqrt{1 + y} = x$

Nos Exercícios de 29 a 32, considere y como a variável independente e ache $\dfrac{dx}{dy}$.

29. $x^4 + y^4 = 12x^2y$
30. $y = 2x^3 - 5x$
31. $x^3y + 2y^4 - x^4 = 0$
32. $y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 9$

33. Ache uma equação da reta tangente à curva $16x^4 + y^4 = 32$ no ponto (1, 2).

34. Ache uma equação da reta normal à curva $9x^3 - y^3 = 1$ no ponto (1, 2).

35. Ache uma equação da reta normal à curva $x^2 + xy + y^2 - 3y = 10$ no ponto (2, 3).

36. Ache uma equação da reta tangente à curva $\sqrt[3]{xy} = 14x + y$ no ponto (2, −32).

37. Ache a taxa de variação de y em relação a x no ponto (3, 2), se $7y^2 - xy^3 = 4$.

38. Para a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, mostre que a reta tangente em todo ponto (x_1, y_1) da curva é perpendicular à reta que passa por (x_1, y_1) e pelo centro da circunferência.

39. Em que ponto da curva $x + \sqrt{xy} + y = 1$ a reta tangente é paralela ao eixo x?

40. Há duas retas que passam pelo ponto $(-1, 3)$ que são tangentes à curva $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$. Ache as equações de cada uma delas.

Nos Exercícios de 41 a 46, é dada uma equação. Faça o seguinte em cada um destes problemas: (a) Ache duas funções definidas pela equação e estabeleça os seus domínios. (b) Faça um esboço do gráfico de cada uma das funções obtidas na parte (a). (c) Faça um esboço do gráfico da equação. (d) Ache a derivada de cada uma das funções obtidas na parte (a) e estabeleça os seus domínios. (e) Ache $\frac{dy}{dx}$ *por derivação implícita da equação dada e comprove que o resultado assim obtido está de acordo com a parte (d). (f) Ache uma equação da reta tangente em cada valor dado de* x_1.

41. $y^2 = 4x - 8;\ x_1 = 3$ **42.** $x^2 + y^2 = 25;\ x_1 = 4$

43. $x^2 - y^2 = 9;\ x_1 = -5$ **44.** $y^2 - x^2 = 16;\ x_1 = -3$

45. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0;\ x_1 = 1$

46. $x^2 + 4y^2 + 6x - 40y + 93 = 0;\ x_1 = -2$

47. Às 8 da manhã, um navio que viaja para o norte com uma velocidade de 24 nós (milhas náuticas por hora) está em um ponto P. Às 10 h, um segundo navio que viaja para o leste com uma velocidade de 32 nós está em P. Qual a taxa de variação da distância entre os dois navios às (a) 9 h e (b) 11 h?

48. Se $x^n y^m = (x + y)^{n+m}$, prove que $x \cdot \frac{dy}{dx} = y$.

49. Ache equações das retas tangentes à curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ nos pontos onde $x = -\frac{1}{8}$.

50. Prove que a soma dos interceptos x e y de qualquer reta tangente à curva $x^{1/2} + y^{1/2} = k^{1/2}$ é constante e igual a k.

51. Seja f a função potência definida por $f(x) = x^r$, onde r é um número racional qualquer. Supondo que f seja derivável, use a derivação implícita para mostrar que $f'(x) = rx^{r-1}$. (*Sugestão:* seja $r = \frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e $q > 0$. Então, substitua $f(x)$ por y e escreva a equação como $y^q = x^p$. Use a derivação implícita para achar $\frac{dy}{dx}$.)

3.9 TAXAS RELACIONADAS

Um problema envolvendo taxas de variação de variáveis relacionadas é chamado de problema de **taxas relacionadas**. Começaremos nossa discussão com um exemplo que descreve uma situação real.

EXEMPLO 1 Uma escada com 25 unidades de comprimento está apoiada numa parede vertical. Se o pé da escada for puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 unidades de comprimento por segundo, qual a velocidade com que a escada está deslizando, quando seu pé está a 15 unidades de comprimento da parede?

Solução Seja t o tempo decorrido desde que a escada começou a deslizar pela parede, y a distância do chão ao topo da escada em t s e x a distância do pé da escada até a parede em t s. Veja a Figura 1.

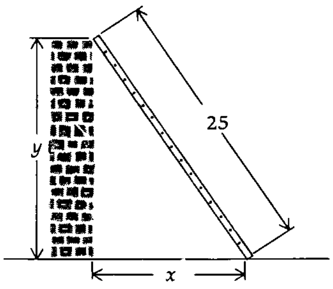


FIGURA 1

Como o pé da escada está sendo puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 unidades de comprimento por segundo, $\frac{dx}{dt} = 3$. Queremos encontrar $\frac{dy}{dt}$ quando $x = 15$. Pelo teorema de Pitágoras,

$$y^2 = 625 - x^2 \tag{1}$$

Como x e y são funções de t, derivamos ambos os lados de (1) em relação a t e obtemos

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Quando $x = 15$, segue de (1) que $y = 20$. Como $\frac{dx}{dt} = 3$, obtemos de (2)

$$\left.\frac{dy}{dt}\right]_{y=20} = -\tfrac{15}{20} \cdot 3$$
$$= -\tfrac{9}{4}$$

Logo, o topo da escada está deslizando pela parede a uma taxa de $2\frac{1}{4}$ unidades de comprimento por segundo, quando o pé está a 15 unidades de comprimento da parede. O sinal *menos* significa que y é decrescente, quando t cresce.

Em problemas com taxas relacionadas, as variáveis têm uma relação específica para os valores de t, onde t é a medida do tempo. Essa relação é usualmente expressa na forma de uma equação, como a equação (1) no Exemplo 1. Os valores das variáveis e as taxas de variação das variáveis em relação a t são freqüentemente dados num determinado instante. No Exemplo 1, no instante em que $x = 15$, então $y = 20$ e $\frac{dx}{dt} = 3$ e queremos encontrar $\frac{dy}{dt}$.

Antes de apresentar mais explicações, damos outro exemplo para demonstrar o cálculo envolvido.

EXEMPLO 2 Dada

$$x \cos y = 5$$

onde x e y são funções de uma terceira variável t. Se $\frac{dx}{dt} = -4$, ache $\frac{dy}{dt}$ quando $y = \frac{1}{3}\pi$.

Solução Derivando ambos os lados da equação, obtemos

$$(\cos y)\frac{dx}{dt} - (x \operatorname{sen} y)\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cos y}{x \operatorname{sen} y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Da equação dada, quando $y = \frac{1}{3}\pi$, $x = 10$. De (3), com $y \frac{1}{3}\pi$, $x = 10$, e $\frac{dx}{dt} = -4$,

$$\left.\frac{dy}{dt}\right]_{y=\pi/3} = \frac{\frac{1}{2}}{10(\frac{1}{2}\sqrt{3})}(-4)$$
$$= -\tfrac{2}{15}\sqrt{3}$$

Os passos a seguir representam um procedimento possível para resolver problemas envolvendo taxas relacionadas.

1. Faça uma figura, se isso for possível.
2. Defina as variáveis. Em geral defina primeiro t, pois as outras variáveis usualmente dependem de t.
3. Escreva todos os fatos numéricos conhecidos sobre as variáveis e suas derivadas em relação a t.
4. Obtenha uma equação envolvendo as variáveis que dependem de t.
5. Derive em relação a t ambos os membros da equação encontrada na etapa 4.
6. Substitua os valores de quantidades conhecidas na equação da etapa 5 e resolva em termos da quantidade desejada.

EXEMPLO 3 Um tanque tem a forma de um cone invertido com 16 m de altura e uma base com 4 m de raio. A água "flui" no tanque a uma taxa de 2 m³/min. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de 5 m?

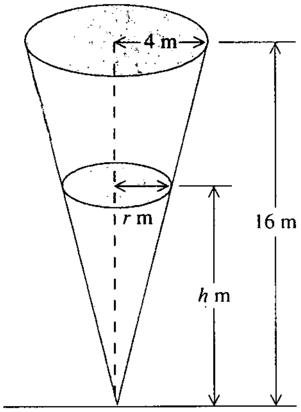


FIGURA 2

Solução Seja t o tempo medido em minutos decorridos desde que a água começou a fluir dentro do tanque; h a altura em metros do nível de água em t min; r a medida em metros do raio da superfície da água em t min; e V a medida, em metros cúbicos, do volume de água no tanque em t min.

Em qualquer instante, o volume de água no tanque pode ser expresso em termos do volume do cone. Veja a Figura 2.

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (4)$$

V, r e h são todas funções de t. Como a água está fluindo no tanque a uma taxa de 2 m³/min, $\dfrac{dV}{dt} = 2$. Queremos encontrar $\dfrac{dh}{dt}$ quando $h = 5$. Para expressar r em termos de h, temos, dos triângulos semelhantes,

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{16} \iff r = \tfrac{1}{4}h$$

Substituindo esse valor de r em (4), obtemos

$$V = \tfrac{1}{3}\pi(\tfrac{1}{4}h)^2(h) \iff V = \tfrac{1}{48}\pi h^3$$

Por derivação de ambos os lados dessa equação em relação a t,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

Substituindo $\dfrac{dV}{dt}$ por 2 e resolvendo em $\dfrac{dh}{dt}$, obtemos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi h^2}$$

Logo,

$$\left.\frac{dh}{dt}\right]_{h=5} = \frac{32}{25\pi}$$

Assim sendo, o nível de água está subindo a uma taxa de $\dfrac{32}{25\pi}$ m/min quando a profundidade da água é de 5 m.

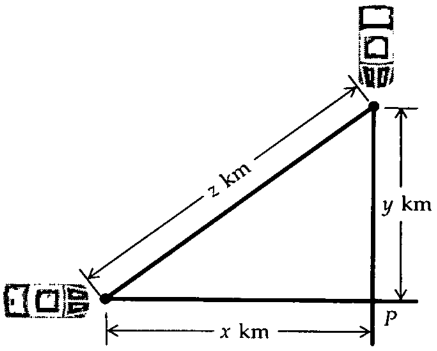


FIGURA 3

EXEMPLO 4 Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, um seguindo a direção leste a uma velocidade de 90 km/h e o outro seguindo a direção sul, a 60 km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a 0,2 km do cruzamento e o segundo a 0,15 km?

Solução Consulte a Figura 3, onde o ponto P é o cruzamento das duas estradas. Seja t h o tempo decorrido desde que os carros começaram a se aproximar de P, x km a distância do primeiro carro em t h, y km a do segundo carro em t h e z km a distância entre os dois carros em t h. Como o primeiro carro aproxima-se de P a uma taxa de 90 km/h e x está decrescendo enquanto t está crescendo, $\frac{dx}{dt} = -90$. Da mesma forma, $\frac{dy}{dt} = -60$. Queremos determinar $\frac{dz}{dt}$ quando $x = 0,2$ e $y = 0,15$. Do teorema de Pitágoras,

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{5}$$

Derivando ambos os membros dessa equação em relação a t, obtemos

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z} \tag{6}$$

Quando $x = 0,2$ e $y = 0,15$, segue de (5) que $z = 0,25$. Em (6), seja $\frac{dx}{dt} = -90$, $\frac{dy}{dt} = -60$, $x = 0,2$, $y = 0,15$ e $z = 0,25$, então obtemos

$$\left.\frac{dz}{dt}\right]_{z=0,25} = \frac{(0,2)(-90) + (0,15)(-60)}{0,25}$$

$$= -108$$

Logo, no instante em questão os carros estão se aproximando um do outro a uma taxa de 108 km/h.

EXEMPLO 5 Suponha que, em certo mercado, x milhares de caixas de laranja sejam fornecidos diariamente sendo p o preço por caixa e a equação de oferta

$$px - 20p - 3x + 105 = 0$$

Se o fornecimento diário estiver decrescendo a uma taxa de 250 caixas por dia, com que taxa os preços estarão variando quando o fornecimento diário for de 5.000 caixas?

Solução Seja t o tempo decorrido medido em dias, desde que o suprimento diário de laranjas começou a decrescer. Então, p e x são ambas funções de t. Como o fornecimento diário está decrescendo a uma taxa de 250 caixas por dia, $\frac{dx}{dt} = -\frac{250}{1000}$, isto é, $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$. Queremos encontrar $\frac{dp}{dt}$ quando $x = 5$.

Da equação de oferta dada, derivamos implicitamente em relação a t e obtemos

$$p\frac{dx}{dt} + x\frac{dp}{dt} - 20\frac{dp}{dt} - 3\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{3-p}{x-20}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Quando $x = 5$, segue da equação de oferta que $p = 6$. Como $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$, temos da equação precedente

$$\left.\frac{dp}{dt}\right]_{p=6} = \frac{3-6}{5-20}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{20}$$

Assim, o preço de uma caixa de laranja estará decrescendo a uma taxa de \$ 0,05 por dia, quando o fornecimento diário for de 5.000 caixas.

EXEMPLO 6 Um avião voa a 152,4 m/s paralelamente ao solo, a uma altitude de 1.220 m no sentido oeste, tomando como referência um holofote fixado no solo que o focaliza e que se encontra à esquerda da projeção vertical do avião em relação ao solo.

Sabendo-se que a luz do holofote deverá permanecer iluminando o avião, qual deverá ser a velocidade angular (de giro) do holofote, no instante em que a distância horizontal entre ele e a projeção vertical do avião for de 610 m?

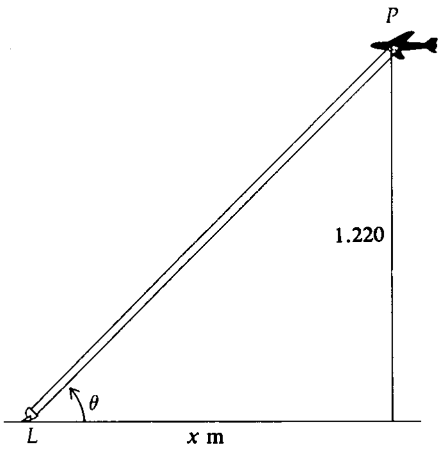


FIGURA 4

Solução Observe a Figura 4. O holofote está no ponto L e num determinado instante o avião está no ponto P. Seja x a distância (em metros) medida horizontalmente entre o holofote e a projeção vertical do avião em relação ao solo, e θ o ângulo de elevação (em radianos) do feixe luminoso emitido pelo holofote em relação ao solo, neste mesmo instante.

Temos $\frac{dx}{dt} = -152,4$ e queremos encontrar $\frac{d\theta}{dt}$ quando $x = 610$.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1.220}{x}$$

Derivando membro a membro em relação a t, obtemos

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1.220}{x^2}\,\frac{dx}{dt}$$

Substituindo $\frac{dx}{dt} = -152,4$ na relação acima e dividindo por $\sec^2\theta$, iremos obter

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{185.928}{x^2\sec^2\theta} \tag{7}$$

Quando $x = 610$, $\operatorname{tg}\theta = 2$. Como $\sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta$, $\sec^2\theta = 5$. Substituindo esses valores em (7) temos, quando $x = 610$,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{185.928}{610^2\cdot 5}$$

$$= \frac{1}{10}$$

Concluímos, então, que no instante dado a medida do ângulo está aumentando a uma taxa de $\frac{1}{10}$rad/s e essa é a velocidade com que o holofote está girando.

EXERCÍCIOS 3.9

Nos Exercícios de 1 a 8, x e y são funções de uma terceira variável t.

1. Se $2x + 3y = 8$ e $\dfrac{dy}{dt} = 2$, ache $\dfrac{dx}{dt}$.
2. Se $\dfrac{x}{y} = 10$ e $\dfrac{dx}{dt} = -5$, ache $\dfrac{dy}{dt}$.
3. Se $xy = 20$ e $\dfrac{dy}{dt} = 10$, ache $\dfrac{dx}{dt}$ quando $x = 2$.
4. Se $2 \operatorname{sen} x + 4 \cos y = 3$ e $\dfrac{dy}{dt} = 3$, ache $\dfrac{dx}{dt}$ em $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi)$.
5. Se $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4}$ e $\dfrac{dx}{dt} = -1$, ache $\dfrac{dy}{dt}$ em $(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.
6. Se $x^2 + y^2 = 25$ e $\dfrac{dx}{dt} = 5$, ache $\dfrac{dy}{dt}$ quando $y = 4$.
7. Se $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ e $\dfrac{dy}{dt} = 3$, ache $\dfrac{dx}{dt}$ quando $x = 1$.
8. Se $y(\operatorname{tg} x + 1) = 4$ e $\dfrac{dy}{dt} = -4$, ache $\dfrac{dx}{dt}$ quando $x = \pi$.

9. Uma pipa está voando a uma altura de 40 m. Uma criança está empinando-a de tal forma que ela se mova horizontalmente, a uma velocidade de 3 m/s. Se a linha estiver esticada, com que velocidade a linha estará sendo "dada", quando o comprimento da linha desenrolada for de 50 m?
10. Um balão esférico está sendo inflado de tal forma que seu volume aumente a uma taxa de 5 m^3/min. Qual a taxa de crescimento do diâmetro quando ele mede 12 m?
11. Uma bola de neve está se formando de tal modo que seu volume cresça a uma taxa de 8 cm^3/min. Ache a taxa segundo a qual o raio está crescendo quando a bola de neve tiver 4 cm de diâmetro.
12. Suponha que quando o diâmetro da bola de neve do Exercício 11 for de 6 cm, ela pare de crescer e comece a derreter a uma taxa $\frac{1}{4}$$cm^3$/min. Ache a taxa segundo a qual o raio estará variando, quando o raio for de 2 cm.
13. Uma certa quantidade de areia é despejada a uma taxa de 10 m^3/min, formando um monte cônico. Se a altura do monte for sempre o dobro do raio da base, com que taxa a altura estará crescendo quando o monte tiver 8 m de altura?
14. Uma lâmpada está pendurada a 4,5 m de um piso horizontal. Se um homem com 1,80 m de altura caminha afastando-se da luz, com uma velocidade de 1,5 m/s, qual a velocidade de crescimento da sombra?
15. No Exercício 14, com que velocidade a ponta da sombra do homem está se movendo?
16. Um homem com 1,80 m de altura caminha em direção a um edifício, com uma velocidade de 1,5 m/s. Se existe um ponto de luz no chão a 15 m do edifício, com que velocidade a sombra do homem no edifício estará diminuindo, quando ele estiver a 9 m do edifício?
17. Suponha que um tumor no corpo de uma pessoa tenha a forma esférica. Se, quando o raio do tumor for 0,5 cm, o raio estiver crescendo a uma taxa de 0,001 cm por dia, qual será a taxa de aumento do volume do tumor naquele instante?
18. Uma célula bacteriana tem a forma esférica. Se o raio da célula estiver crescendo à taxa de 0,01 micrômetros por dia quando ela tiver 1,5 μm, qual será a taxa de crescimento do volume da célula naquele instante?
19. Para o tumor no Exercício 17, qual será a taxa de crescimento da sua área quando seu raio for 0,5 cm?
20. Para a célula do Exercício 18, qual será a taxa de aumento da área quando o seu raio for 1,5 μm?
21. Um tanque com a forma de um cone invertido está sendo esvaziado a uma taxa de 6 m^3/min. A altura do cone é de 24 m e o raio da base é de 12 m. Ache a velocidade com que o nível de água está abaixando, quando a água tiver uma profundidade de 10 m.
22. Um cocho tem 360 cm de comprimento e seus extremos têm a forma de triângulos isósceles invertidos, com 90 cm de altura e 90 cm de base. Água está fluindo no cocho a uma taxa de 60 cm^3/min. Com que velocidade estará se elevando o nível da água quando a profundidade for de 30 cm?
23. A lei de Boyle para a expansão de um gás é $PV = C$, onde P é o número de quilos por unidade quadrada de pressão, V é o número de unidades cúbicas do volume do gás e C é uma constante. Num certo instante, a pressão é de 150 kg/m^2, o volume é 1,5 m^3 e está crescendo a uma taxa de 1 m^3/min. Ache a taxa de variação da pressão nesse instante.
24. A lei adiabática (sem ganho ou perda de calor) para a expansão do ar é $PV^{1,4} = C$, onde P é o número de quilos por unidade quadrática de pressão, V é o número de unidades cúbicas de volume e C é uma constante. Num dado instante, a pressão é de 18.000 g/cm^2 e está crescendo a uma taxa de 3.600 g/cm^2 a cada segundo. Qual será a taxa de variação do volume nesse instante?
25. Uma pedra cai livremente num lago parado. Ondas circulares se espalham e o raio da região afetada aumenta a uma taxa de 16 cm/s. Qual a taxa segundo a qual a região está aumentando quando o raio for de 4 cm?
26. Uma certa quantidade de óleo está sendo despejado num tanque com a forma cônica invertida, a uma taxa de 3π m^3/min. Se o tanque tiver um raio de 2,5 m no topo e 10 m de profundidade, com que velocidade a profundidade do óleo estará variando quando ela estiver com 8 m de produndidade?
27. Um automóvel aproxima-se de um cruzamento a uma velocidade de 30 m/s. Quando o automóvel está a 120 m do cruzamento, um caminhão a uma velocidade de 40 m/s atravessa o cruzamento. O automóvel e o caminhão estão em ruas que se cruzam em ângulo reto. Com que velocidade o automóvel e o caminhão estarão se afastando um do outro, 2 s após o caminhão ter passado pelo cruzamento?
28. Uma corda está amarrada em um barco no nível da água e uma mulher em um cais puxa a corda a uma taxa de 15 m/min. Se as mãos da mulher estão a 5 m acima do nível da água, com que velocidade o bote estará se aproximando do cais, quando o comprimento da corda já puxada for de 6 m?

29. Esta semana uma fábrica está produzindo 50 unidades de um determinado produto e a produção está crescendo a uma taxa de 2 unidades por semana. Se $C(x)$ for o custo total da produção de x unidades e $C(x) = 0{,}08\,x^3 - x^2 + 10x + 48$, ache a taxa corrente segundo a qual o custo de produção está crescendo.
30. A demanda por um determinado tipo de cereal é dada pela equação $px + 50p = 16.000$, onde x milhares de caixas são demandados quando o preço por caixa for p. Se o preço corrente for de \$ 1,60 por caixa e se os preços por caixa crescerem a uma taxa de \$ 0,4 por semana, ache a taxa de variação da demanda.
31. A equação de oferta para certo produto é $x = 1.000\sqrt{3p^2 + 20p}$, onde x unidades são oferecidas por mês quando p for o preço unitário. Ache a taxa de variação na oferta se o preço corrente for de \$ 20 por unidade e se o preço estiver crescendo a uma taxa de \$ 0,50 ao mês.
32. Suponha que na produção de x unidades de certo produto seja necessária uma força de trabalho de y operários e $x = 4y^2$. Se a produção este ano foi de 250.000 unidades e a produção está aumentando a uma taxa de 18.000 unidades ao ano, qual será a taxa corrente segundo a qual a força de trabalho deve ser aumentada?
33. A equação de demanda de uma determinada camisa é $2px + 65p - 4.950 = 0$, onde x centenas de camisas são demandadas por semana quando p for o preço unitário. Se a camisa estiver sendo vendida esta semana a \$ 30 e o preço estiver crescendo a uma taxa de \$ 0,20 por semana, ache a taxa de variação na demanda.
34. A medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo está decrescendo a uma taxa de $\frac{1}{36}\pi$ rad/s. Se o comprimento da hipotenusa for constante e igual a 40 cm, ache a velocidade com que a área está variando, quando a medida do ângulo agudo for $\frac{1}{6}\pi$.
35. Dois caminhões aproximam-se de um cruzamento, um deles vindo da direção oeste e o outro pelo sul. Se ambos estão com uma velocidade de k km/h, mostre que um se aproxima do outro com uma velocidade de $k\sqrt{2}$ km/h, quando cada um está a m km do cruzamento.
36. Uma tina horizontal tem 16 m de comprimento e seus extremos são trapézios isósceles com uma altura de 4 m, uma base menor de 4 m e uma base maior de 6 m. A água está fluindo dentro da tina a uma taxa de 10 m^3/min. Com que velocidade o nível de água está subindo quando a profundidade da água é de 2 m?
37. No Exercício 36, se o nível de água estiver decrescendo a uma taxa de 25 cm/min quando a profundidade é de 3 m, com que velocidade a água está saindo da tina?
38. Uma escada com 7 m de comprimento está apoiada numa parede. Se o pé da escada for empurrado horizontalmente em direção à parede a 1,5 m/s, com que velocidade o topo da escada será deslocado para cima quando o pé da escada estiver a 2 m da parede?
39. Uma viga com 20 m está encostada em um aterro inclinado de 60° em relação à horizontal. Se o pé da viga estiver sendo movido horizontalmente em direção ao aterro a 1 m/s, com que velocidade o topo da viga estará se deslocando quando o pé estiver a 4 m do aterro?
40. O volume de um balão está decrescendo a uma taxa proporcional à sua área da superfície. Mostre que o raio do balão diminui a uma taxa constante.
41. Um avião está voando com velocidade constante a uma altitude de 3 km sobre uma linha reta que irá passar diretamente acima de um observador no chão. Num dado instante, o observador nota que o ângulo de elevação do avião é de $\frac{1}{3}\pi$ rad e está aumentando a uma taxa de $\frac{1}{60}$ rad/s. Ache a velocidade do avião.
42. Uma antena de radar está localizada num navio a 16 km de uma praia reta e está girando com 32 rpm. Com que velocidade o feixe do radar estará percorrendo a praia quando o feixe formar um ângulo de 45° com a praia?
43. Uma viga com 30 m de comprimento está apoiada em uma parede e o seu topo está se deslocando para baixo a uma velocidade de 0,5 m/s. Qual será a taxa de variação da medida do ângulo agudo formado pela viga e pelo chão quando o topo da viga estiver a 18 m do chão?
44. Dentro de um tanque na forma de um cone está fluindo água à razão de 8 m^3/min. O cone tem 6 m de profundidade 3m de diâmetro no topo. Se houver um vazamento na base e se o nível da água estiver subindo a uma razão de 1 cm/min, quando a profundidade for de 4,8 m, como estará escoando o vazamento?

3.10 DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Se a função f for derivável, então f' será chamada a **derivada primeira** de f. Às vezes é chamada de **função derivada primeira**. Se a derivada de f' existir, ela será chamada de **derivada segunda** de f, ou de função derivada segunda e poderá ser denotada por f'' (lemos f duas linhas). Da mesma forma, a **derivada terceira** de f, ou a função derivada terceira, é definida como a derivada de f'', se ela existir. A derivada terceira de f é denotada por f''' (lemos f três linhas).

A **derivada enésima** da função f, onde n é um número inteiro positivo maior do que 1, é a derivada primeira da derivada $(n - 1)$ésima de f. Denotamos a derivada enésima de f por $f^{(n)}$. Assim, se $f^{(n)}$ for a derivada enésima da função, podemos escrever f como sendo $f^{(0)}$.

EXEMPLO 1 Ache todas as derivadas da função f definida por $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$

Solução

$$f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x$$
$$f''(x) = 96x^2 + 30x - 2$$
$$f'''(x) = 192x + 30$$
$$f^{(4)}(x) = 192$$
$$f^{(5)}(x) = 0$$
$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad n \geqslant 5$$

A notação de Leibniz para a derivada primeira é $\dfrac{dy}{dx}$. Para a derivada segunda de y em relação a x, a notação de Leibniz é $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, porque ela representa $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d}{dx}(y)\right]$. O símbolo $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ é uma notação para a derivada enésima de y em relação a x.

Outros símbolos para a derivada enésima de f são

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)] \qquad D_x{}^n[f(x)]$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\frac{d^3}{dx^3}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3)$$

Solução

$$\frac{d}{dx}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3) = 2 \cos x - 3 \text{ sen } x - 3x^2$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3) = -2 \text{ sen } x - 3 \cos x - 6x$$
$$\frac{d^3}{dx^3}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3) = -2 \cos x + 3 \text{ sen } x - 6$$

Como $f'(x)$ dá a taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x, $f''(x)$, que é a derivada de $f'(x)$, dá a taxa de variação instantânea de $f'(x)$ em relação a x. Além disso, se (x, y) for um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = f(x)$, então $\dfrac{dy}{dx}$ dará a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (x, y). Assim, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ será a taxa de variação instantânea da inclinação da reta tangente em relação a x no ponto (x, y).

EXEMPLO 3 Seja $m(x)$ a inclinação da reta tangente à curva

$$y = x^3 - 2x^2 + x$$

no ponto (x, y). Ache a taxa de variação instantânea de $m(x)$ em relação a x no ponto $(2, 2)$.

Solução

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{dy}{dx} \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

A taxa de variação instantânea de $m(x)$ em relação a x é dada por $m'(x)$ ou, equivalentemente, por $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$\begin{aligned} m'(x) &= \frac{d^2y}{dx^2} \\ &= 6x - 4 \end{aligned}$$

No ponto $(2, 2)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 8$.

A derivada segunda $f''(x)$ é expressa em unidades de $f'(x)$ por unidade de x, ou seja, unidades de $f(x)$ por unidade de x, por unidade de x. Por exemplo, no movimento retílineo. Se $f(t)$ cm for a distância de uma partícula à origem no instante t s, então $f'(t)$ cm/s, será a velocidade da partícula no instante t s e $f''(t)$ cm/s/s (centímetros por segundo por segundo) será a taxa de variação instantânea da velocidade no mesmo instante t s. Em Física, a taxa de variação instantânea da velocidade é chamada de **aceleração instantânea**. Logo, se uma partícula está se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento $s = f(t)$, onde a velocidade instantânea é dada por v cm/s e a aceleração instantânea é dada por a cm/s^2, no instante t s, então a será a derivada primeira de v em relação ao tempo ou, equivalentemente, a derivada segunda de s em relação a t; isto é,

$$\boxed{\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ a &= \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow a = \frac{d^2s}{dt^2} \end{aligned}}$$

Quando $a > 0$, v é crescente e quando $a < 0$, v é decrescente. Quando $a = 0$, v não muda. Como a velocidade escalar de uma partícula no instante t é $|v|$ cm/s, temos os seguintes resultados:

(i) Se $v \geqslant 0$ e $a > 0$, a velocidade escalar é crescente.
(ii) Se $v \geqslant 0$ e $a < 0$, a velocidade escalar é decrescente.
(iii) Se $v \leqslant 0$ e $a > 0$, a velocidade escalar é decrescente.
(iv) Se $v \leqslant 0$ e $a < 0$, a velocidade escalar é crescente.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação

$$s = 3t^2 - t^3 \qquad t \geqslant 0 \tag{1}$$

onde s cm é a distância da partícula até a origem, decorridos t s. Se v cm/s for a velocidade instantânea em t s, então $v = \dfrac{ds}{dt}$. Logo,

$$v = 6t - 3t^2 \tag{2}$$

Se a cm/s² for a aceleração em t s, então $a = \dfrac{dv}{dt}$. Assim,

$$a = 6 - 6t \tag{3}$$

Vamos determinar para quais valores de t se anulam as quantidades s, v ou a. De (1),

$$s = 0 \text{ quando } t = 0 \text{ ou } t = 3$$

De (2),

$$v = 0 \text{ quando } t = 0 \text{ ou } t = 2$$

De (3),

$$a = 0 \text{ quando } t = 1$$

Tabela 1

	s	v	a	*Conclusão*
$t = 0$	0	0	6	A partícula está na origem. A velocidade é zero e está crescendo. A velocidade escalar está crescendo.
$0 < t < 1$	+	+	+	A partícula está à direita da origem, movendo-se para a direita. A velocidade é crescente. A velocidade escalar é crescente.
$t = 1$	2	3	0	A partícula está a 2 cm à direita da origem, movendo-se para a direita a 3 cm/s. A velocidade não está mudando, bem como a velocidade escalar.
$1 < t < 2$	+	+	−	A partícula está à direita da origem e está movendo-se para a direita. A velocidade é decrescente, bem como a velocidade escalar.
$t = 2$	4	0	−6	A partícula está a 4 cm à direita da origem e está mudando da direita para a esquerda. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente.
$2 < t < 3$	+	−	−	A partícula está à direita da origem, movendo-se para a esquerda. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente
$t = 3$	0	−9	−12	A partícula está na origem, movendo-se para a esquerda a 9 cm/s. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente.
$3 < t$	−	−	−	A partícula está à esquerda da origem, movendo-se para a esquerda. A velocidade é decrescente. A velocidade escalar é crescente.

Na Tabela 1 estão valores de s, v e a para t igual a 0, 1, 2 e 3. Também estão indicados os sinais das quantidades s, v e a nos intervalos de t, excluindo 0, 1, 2 e 3. Uma conclusão é tirada relativa à posição e ao movimento da partícula para os vários valores de t.

Na Figura 1, o movimento da partícula se faz ao longo de uma reta horizontal e o comportamento do movimento está indicado acima da reta. ◀

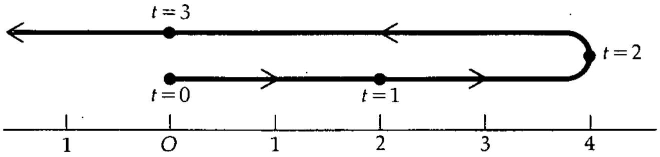


FIGURA 1

EXEMPLO 4 Uma partícula move-se ao longo de uma reta, de acordo com a seguinte equação de movimento:

$$s = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4t}{t+1}$$

onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s. Se v cm/s for a velocidade instantânea em t s e a cm/s² for a aceleração em t s, ache t, s e v quando $a = 0$.

Solução

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$= t + \frac{4}{(t+1)^2} \qquad = 1 - \frac{8}{(t+1)^3}$$

Tomando $a = 0$, teremos

$$\frac{(t+1)^3 - 8}{(t+1)^3} = 0$$

$$(t+1)^3 = 8$$

de onde vemos que o único valor real de t é obtido da raiz cúbica de 8; assim sendo, $t + 1 = 2$ ou $t = 1$. Quando $t = 1$,

$$s = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{4 \cdot 1}{1+1} \qquad v = 1 + \frac{4}{(1+1)^2}$$

$$= \tfrac{5}{2} \qquad = 2$$

Portanto, a aceleração é 0 no instante 1 s, quando a partícula está a $\frac{5}{2}$ cm da origem, movendo-se para a direita com uma velocidade de 2 cm/s.

Uma partícula movendo-se sobre uma reta tem um **movimento harmônico simples** se a medida de sua aceleração for sempre proporcional à medida de seu deslocamento de um ponto fixo na reta e a aceleração e o deslocamento tiverem sempre sentidos opostos.

EXEMPLO 5 Mostre que se uma partícula estiver se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento,

$$s = b\,\text{sen}(kt + \theta) \tag{4}$$

onde b, k e θ são constantes e s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s, então o movimento será harmônico simples.

Solução Queremos mostrar que se a cm/s^2 for a aceleração da partícula em t s, então a será proporcional a s e a e s terão sinais opostos. Para determinar a encontramos primeiro v, onde v cm/s é a velocidade da partícula em t s.

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= b[\cos(kt + \theta)](k) \\ &= bk\cos(kt + \theta) \\ a &= \frac{dv}{dt} \\ &= bk\,[-\text{sen}(kt + \theta)]\,(k) \\ &= -bk^2\,\text{sen}(kt + \theta) \end{aligned}$$

Substituindo (4) nessa igualdade, temos

$$a = -k^2 s$$

Como $-k^2$ é uma constante, a é proporcional a s. Além disso, como $-k^2$ é negativo, a e s têm sentidos opostos. Logo, o movimento é harmônico simples.

A derivada segunda é aplicada ainda na construção do gráfico de uma função (Secção 4.5) e no teste da derivada segunda para extremos relativos (Secção 4.6). Uma aplicação importante das derivadas de ordem superior é no estudo de séries infinitas, conforme mostra o Capítulo 13.

O exemplo a seguir ilustra como a derivada segunda é encontrada para funções definidas implicitamente.

EXEMPLO 6 Dada

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

ache $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ por derivação implícita.

Solução Derivando implicitamente em relação a x, obtemos

$$8x + 18y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{9y} \tag{5}$$

Para encontrar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, calculamos a derivada de um quociente tendo em mente que y é uma função de x. Assim,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9y(-4) - (-4x)\left(9 \cdot \dfrac{dy}{dx}\right)}{81y^2}$$

Substituindo o valor de $\dfrac{dy}{dx}$ de (5) nessa equação, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-36y + (36x)\dfrac{-4x}{9y}}{81y^2}\\ &= \frac{-36y^2 - 16x^2}{81y^3}\\ &= \frac{-4(9y^2 + 4x^2)}{81y^3}\end{aligned}$$

Como qualquer valor de x e y satisfazendo essa equação deve também satisfazer a equação original, podemos substituir $9y^2 + 4x^2$ por 36 e obter

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-4(36)}{81y^3}\\ &= -\frac{16}{9y^3}\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 3.10

Nos Exercícios de 1 a 16 ache as derivadas primeira e segunda da função definida pela equação dada.

1. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$
2. $F(x) = 7x^3 - 8x^2$
3. $g(s) = 2s^4 - 4s^3 + 7s - 1$
4. $G(t) = t^3 - t^2 + t$
5. $F(x) = x^2\sqrt{x} - 5x$
6. $g(r) = \sqrt{r} + \dfrac{1}{\sqrt{r}}$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
8. $h(y) = \sqrt[3]{2y^3 + 5}$
9. $f(t) = 4 \cos t^2$
10. $g(t) = 2 \operatorname{sen}^3 t$
11. $G(x) = \operatorname{cotg}^2 x$
12. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$
13. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$
14. $g(x) = (2x - 3)^2(x + 4)^3$
15. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x + 1}$
16. $f(x) = \sec 2x + \operatorname{tg} 2x$
17. Ache $D_x{}^3(x^4 - 2x^2 + x - 5)$.
18. Ache $D_t{}^3(\sqrt{4t + 1})$.
19. Ache $\dfrac{d^4}{dx^4}\left(\dfrac{3}{2x - 1}\right)$.
20. Ache $f^{(4)}(x)$ se $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$.
21. Ache $D_x{}^3(2 \operatorname{tg} 3x)$.
22. Ache $\dfrac{d^4}{dt^4}(3 \operatorname{sen}^2 2t)$.
23. Ache $f^{(5)}(x)$ se $f(x) = \cos 2x - \operatorname{sen} 2x$.
24. Ache $\dfrac{d^3u}{dv^3}$ se $u = v\sqrt{v - 2}$.
25. Dada $x^2 + y^2 = 1$, mostre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{y^3}$.
26. Dada $x^2 + 25y^2 = 100$, mostre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{4}{25y^3}$.
27. Dada $x^3 + y^3 = 1$, mostre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2x}{y^5}$.
28. Dada $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$, mostre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$.
29. Dada $x^4 + y^4 = a^4$ (a é uma constante), ache $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ na forma mais simples.

30. Dada $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (a e b são constantes), ache $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ na forma mais simples.

31. Ache a inclinação da reta tangente em cada ponto do gráfico de $y = x^4 + x^3 - 3x^2$, onde a taxa de variação da inclinação é zero.

32. Ache a taxa de variação instantânea da inclinação da reta tangente ao gráfico $y = 2x^3 - 6x^2 - x + 1$ no ponto $(3, -2)$.

Nos Exercícios 33 e 34, uma partícula está se movendo ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem, v cm/s é a velocidade da partícula e a cm/s² é a aceleração da partícula no instante t s. Ache v e a em termos de t. Faça uma tabela similar à Tabela 1 que dê uma descrição da posição e movimento da partícula. Inclua na tabela os intervalos de tempo, onde a partícula está se movendo para a direita e para a esquerda, onde a velocidade é crescente e decrescente, quando a velocidade escalar é crescente e decrescente, e a posição da partícula com relação à origem nesses intervalos. Mostre o comportamento do movimento numa figura similar à Figura 1.

33. $s = t^3 - 9t^2 + 15t,\ t \geqslant 0$ **34.** $s = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t - 2,\ t \geqslant 0$

Nos Exercícios de 35 a 39, uma partícula está se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação dada, onde s m é a distância orientada entre a posição da partícula e a origem no instante t s. Ache o instante em que a aceleração instantânea é zero e nesse instante determine a distância orientada a partir da origem e a velocidade instantânea.

35. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1,\ t \geqslant 0$

36. $s = 2t^3 - 6t^2 + 3t - 4,\ t \geqslant 0$ **37.** $s = \dfrac{125}{16t + 32} - \dfrac{2}{5}t^5,\ t \geqslant 0$

38. $s = 9t^2 + 2\sqrt{2t + 1},\ t \geqslant 0$ **39.** $s = \frac{4}{9}t^{3/2} + 2t^{1/2},\ t \geqslant 0$

Nos Exercícios de 40 a 45, uma partícula está se movendo ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento dada, onde s cm é a distância orientada entre a partícula e a origem no instante t s. Mostre que o movimento é harmônico simples.

40. $s = A \operatorname{sen} 2\pi kt + B \cos 2\pi kt$, *onde* A, B, e k são constantes.
41. $s = b \cos (kt + \theta)$, onde b, k, e θ são constantes.
42. $s = 6 \operatorname{sen} (t + \frac{1}{3}\pi) + 4 \operatorname{sen} (t - \frac{1}{6}\pi)$
43. $s = \operatorname{sen} (6t - \frac{1}{3}\pi) + \operatorname{sen} (6t + \frac{1}{6}\pi)$
44. $s = 8 \cos^2 6t - 4$
45. $s = 5 - 10 \operatorname{sen}^2 2t$

Nos Exercícios de 46 a 49, ache as fórmulas para f′(x) e f″(x) e estabeleça os domínios de f′ e f″.

46. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ **47.** $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$

48. $f(x) = |x|^3$ **49.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

50. Para a função do Exercício 48, ache $f'''(x)$ quando ela existir.

51. Para a função do Exercício 49, ache $f'''(x)$ quando ela exitir.

52. Mostre que se $xy = 1$, então $\dfrac{d^2y}{dx^2} \cdot \dfrac{d^2x}{dy^2} = 4$.

53. Se f', g', f'' e g'' existem e se $h = f \circ g$, expresse $h''(x)$ em termos das derivadas de f e g.

54. Se f e g são duas funções, tais que suas derivadas primeira e segunda existem e h é a função definida pela equação $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, prove que

$$h''(x) = f(x) \cdot g''(x) + 2f'(x) \cdot g'(x) + f''(x) \cdot g(x)$$

55. Se $y = x^n$, onde n é qualquer inteiro positivo, prove, por indução matemática, que $\dfrac{d^ny}{dx^n} = n!$

56. Se

$$y = \frac{1}{1 - 2x}$$

prove, por indução matemática, que

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{2^n n!}{(1 - 2x)^{n+1}}$$

57. Se k for um inteiro positivo qualquer, prove, por indução matemática, que

$$D_x^n(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k \\ \cos x & \text{se } n = 4k + 1 \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } n = 4k + 2 \\ -\cos x & \text{se } n = 4k + 3 \end{cases}$$

58. Obtenha uma fórmula similar a do Exercício 57 para $D_x^n(\cos x)$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 3

Nos Exercícios de 1 a 16, ache a derivada da função dada.

1. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 2x - 3$ **2.** $g(x) = 5(x^4 + 3x^7)$

3. $g(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{4}{x^2}$ **4.** $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x^4}$

5. $F(x) = 2x^{1/2} - \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$ **6.** $G(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$

7. $G(t) = (3t^2 - 4)(4t^3 + t - 1)$

8. $f(x) = (x^4 - 2x)(4x^2 + 2x + 5)$

9. $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$

10. $h(y) = \dfrac{y^2}{y^3 + 8}$

11. $f(s) = (2s^3 - 3s + 7)^4$

12. $F(x) = (4x^4 - 4x^2 + 1)^{-1/3}$

13. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^3 + 1}}$

14. $g(x) = \left(\dfrac{3x^2 + 4}{x^7 + 1}\right)^{10}$

15. $F(x) = (x^2 - 1)^{3/2}(x^2 - 4)^{1/2}$

16. $g(x) = (x^4 - x)^{-3}(5 - x^2)^{-1}$

Nos Exercícios de 17 a 24, calcule a derivada indicada.

17. $D_x[(x + 1)\operatorname{sen} x - x \cos x]$

18. $D_r(\operatorname{tg}^2 3r)$

19. $\dfrac{d}{dx}\left(x \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}\right)$

20. $D_t(\operatorname{sen}^2 3t\sqrt{\cos 2t})$

21. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sec^2 t}{1 + t^2}\right)$

22. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{x \cos x}\right)$

23. $D_w[\operatorname{sen}(\cos 3w) - 3 \cos^2 2w]$

24. $D_x(\operatorname{tg}^3 x \cdot \sec x)$

Nos Exercícios de 25 a 34, ache $\dfrac{dy}{dx}$.

25. $4x^2 + 4y^2 - y^3 = 0$

26. $y = \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}$

27. $y = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$

28. $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$

29. $\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = 1$

30. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

31. $y = x^2 + [x^3 + (x^4 + x)^2]^3$

32. $y = \dfrac{x\sqrt{3 + 2x}}{4x - 1}$

33. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = xy$

34. $\sec(x + y) - \sec(x - y) = 1$

35. Ache as equações das retas tangentes à curva $y = 2x^3 + 4x^2 - x$ que têm inclinação $\frac{1}{2}$.

36. Ache uma equação da reta normal à curva $x - y = \sqrt{x + y}$ no ponto (3, 1).

37. Ache as equações das retas tangente e normal à curva $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ no ponto (2, 1).

38. Ache as equações das retas tangente e normal à curva $y = 8 \operatorname{sen}^3 2x$ no ponto $(\frac{1}{12}\pi, 1)$.

39. Prove que a reta tangente à curva $y = -x^4 + 2x^2 + x$ no ponto (1, 2) é também tangente à curva em um outro ponto e determine esse ponto.

40. Prove que as retas tangentes às curvas

$$4y^3 - x^2y - x + 5y = 0 \quad \text{e} \quad x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$$

na origem são perpendiculares.

41. Encontre $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ se $y = \sqrt{3 - 2x}$.

42. Dada $\dfrac{dy}{dx} = y^k$, onde k é uma constante e y, uma função de x, expresse $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ em termos de y e k.

43. Dada $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + 2$. Para que valores de x $f''(x) > 0$?

44. Mostre que se $xy = k$, onde k é uma constante não-nula, então $\dfrac{d^2y}{dx^2} \cdot \dfrac{d^2x}{dy^2} = \dfrac{4}{k}$.

45. Uma partícula se movimenta sobre uma reta horizontal segundo a equação $s = t^3 - 11t^2 + 24t + 100$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem no instante t s. (a) A partícula está no ponto inicial quando $t = 0$. Para que outros valores de t a partícula estará de novo no ponto inicial? (b) Determine a velocidade da partícula em cada instante em que ela estiver no ponto inicial e interprete o sinal da velocidade em cada caso.

46. Uma partícula se movimenta sobre uma reta horizontal, de acordo com a equação $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, onde s cm é a distância orientada da partícula a partir de um ponto O em t s. O sentido positivo do movimento é para a direita. Determine os intervalos de tempo nos quais a partícula se move para a direita e para a esquerda. Determine também quando a partícula inverte o sentido de seu movimento na reta. Mostre o comportamento do movimento como uma figura e escolha valores de t ao acaso, mas inclua os valores de t nos quais a partícula inverte o sentido do seu movimento.

47. Uma partícula move-se ao longo de uma reta segundo a equação $s = 5 - 2\cos^2 t$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s. Se v cm/s e a cm/s² forem, respectivamente, a velocidade e a aceleração da partícula em t s, ache v e a em termos de s.

48. Um objeto está escorregando por um plano inclinado de acordo com a equação $s = 12t^2 + 6t$, onde s m é a distância orientada do objeto até o topo do plano, após t s do início do movimento. (a) Ache a velocidade aos 3 s. (b) Ache a velocidade inicial.

49. Uma bola é atirada para cima do topo de um prédio com 112 m de altura. Sua equação de movimento é $s = -16t^2 + 96t$, onde s m é a distância orientada da bola ao ponto de partida, após t s. Ache (a) a velocidade instantânea da bola após 2 s; (b) qual a altura máxima atingida pela bola? (c) Quanto tempo levará para a bola atingir o solo? (d) Ache a velocidade instantânea da bola ao atingir o solo.

50. A lei de Stefan afirma que um corpo emite energia radiante, de acordo com a fórmula $R = kT^4$, onde R é a medida da taxa de emissão da energia radiante por unidade quadrada de área, T é a medida Kelvin da temperatura da superfície e k é uma constante. Ache (a) a taxa média de variação de R em relação a T quando T passa de 200 a 300; (b) a taxa de variação instantânea de R em relação a T, quando T é 200.

51. Se A unidades quadradas for a área de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos têm x unidades de comprimento, ache (a) a taxa média de variação de A em relação a x quando x varia de 8,00 para 8,01; (b) a taxa de variação instantânea de A em relação a x, quando x é 8,00.

52. Se $y = x^{2/3}$, ache a taxa relativa de variação de y em relação a x quando (a) $x = 8$ e (b) $x = c$, onde c é uma constante.

53. A equação de oferta de uma calculadora é $y = m^2 + \sqrt{m}$, onde $100y$ calculadoras são fornecidas quando o preço de cada calculadora for m. Ache (a) a taxa média de variação da oferta em relação ao preço quando ele passa de \$ 16 para \$ 17; (b) a taxa de variação instantânea (ou marginal) da oferta em relação ao preço, quando ele é \$16.

54. Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$, se $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

55. Use a definição de derivada para encontrar $f'(-5)$, se $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$.

56. Use a definição de derivada para encontrar $f'(5)$, se $f(x) = \sqrt{3x+1}$.

57. Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$, se $f(x) = \sqrt{4x-3}$.

58. Ache $f''(x)$ se $f(x) = 3 \operatorname{sen}^2 x - 4 \cos^2 x$.

59. Ache $f''(\pi)$ se $f(x) = \sqrt{2 + \cos x}$.

60. Ache $f'(-3)$ se $f(x) = (|x| - x)\sqrt[3]{9x}$.

61. Ache $f'(x)$ se $f(x) = (|x+1| - |x|)^2$.

62. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 16 & \text{se } x < 4 \\ 8x - 32 & \text{se } 4 \leqslant x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Determine se f é contínua em 4. (c) Determine se f é derivável em 4.

63. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \leqslant 3 \\ 20 - x^2 & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Determine se f é contínua em 3. (c) Determine se f é derivável em 3.

64. O teorema do resto em Álgebra Elementar afirma que, se $P(x)$ é um polinômio em x e r é um número real qualquer, então existe um polinômio $Q(x)$, tal que $P(x) = Q(x)(x - r) + P(r)$. Qual é o $\lim\limits_{x \to r} Q(x)$?

65. Dada $f(x) = |x|^3$. (a) Faça um esboço do gráfico de f. (b) Ache $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, se existir. (c) Ache $f'(0)$ se existir.

66. Dada $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$. (a) Onde f é derivável? (b) f' é contínua em seu domínio?

67. Dada

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

Ache os valores de a e b, tais que $f'(1)$ exista.

68. Suponha que

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

Ache os valores de a, b e c, tais que $f''(1)$ exista.

69. Se $C(x)$ for a quantia em dinheiro correspondente ao custo total da fabricação de x cadeiras e $C(x) = x^2 + 40x + 800$, ache (a) a função custo marginal; (b) o custo marginal quando 20 cadeiras são fabricadas, (c) o custo real da fabricação da vigésima primeira cadeira.

70. O rendimento total recebido da venda de x lâmpadas é $R(x)$ e $R(x) = 100x - \frac{1}{6}x^2$. Ache (a) a função rendimento marginal; (b) o rendimento marginal quando $x = 15$; (c) o rendimento real da venda da décima sexta lâmpada.

71. Em um lago grande, um peixe predador alimenta-se de um peixe menor e a população de predadores em qualquer época é uma função do número de peixes pequenos no lago, naquele período de tempo. Suponha que quando há x peixes pequenos no lago, a população de predatores é y e $y = \frac{1}{4}x^2 + 80$. Se a temporada de pesca terminou t semanas atrás, $x = 8t + 90$. A que taxa a população do peixe predador estará crescendo 9 semanas após o término da temporada de pesca? Não expresse y em termos de t, mas use a regra da cadeia.

72. A equação de demanda para uma barra de chocolate é

$$px + x + 20p = 3000$$

onde $1.000x$ barras são demandadas por semana quando p centavos é o preço por unidade. Se o preço atual de cada barra for 49 centavos e estiver aumentando à taxa de 0,2 centavos por semana, ache a taxa de variação na demanda.

73. Uma partícula move-se ao longo de uma reta, e

$$s = \operatorname{sen}(4t + \tfrac{1}{3}\pi) + \operatorname{sen}(4t + \tfrac{1}{6}\pi)$$

onde s m é a distância da partícula até a origem no instante t s. Prove que o movimento é harmônico simples.

74. Se a equação do movimento é $s = \cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t$, prove que o movimento é harmônico simples.

75. Se uma partícula se move ao longo de uma reta e $s = \cos 2t + \cos t$, prove que o movimento não é harmônico simples.

76. Uma partícula move-se numa reta, de acordo com a equação $s = \sqrt{a + bt^2}$; onde a e b são constantes positivas. Prove que a medida da aceleração é inversamente proporcional a s^3 para todo t.

77. Um navio deixa um porto ao meio-dia e desloca-se para o oeste com a velocidade de 20 nós (um nó é uma milha náutica por hora e 1 milha náutica equivale a aproximadamente 2 km). Ao meio-dia do dia seguinte um segundo navio deixa o mesmo porto e viaja para o noroeste a 15 nós. Com que velocidade os navios se separam quando o segundo navio percorreu 90 milhas náuticas?

78. Um reservatório tem 80 m de comprimento e sua secção transversal é um trapézio isósceles com lados iguais de 10 m, uma base superior de 17 m e uma base inferior de 5 m. Quando a água tiver 5 m de profundidade, ache a taxa segundo a qual estará escoando, se o nível de água estiver abaixando a uma taxa de 0,1 m/h.

79. Um funil na forma de um cone tem 10 cm de diâmetro do topo e 8 cm de profundidade. A água está fluindo dentro do funil, a uma taxa de 12 cm³/s e para fora do funil, a uma taxa de 4 cm³/s. Com que velocidade o nível de água estará subindo, quando a profundidade for de 5 cm?

80. Quando o último vagão de um trem passa por baixo de um viaduto, um automóvel cruza o viaduto numa rodovia perpendicular aos trilhos e 30 m acima deles. O trem está a 80 m/s, enquanto que o automóvel está a 40 m/s. Com que velocidade se afastam um do outro após 2 s?

81. Um homem com 1,80 m de altura caminha em direção a um edifício com uma velocidade de 1,20 m/s. Há um ponto de luz no chão a 12 m do edifício. Com que velocidade diminui a sombra do homem no edifício, quando ele está a 9 m do edifício?

82. Uma queimadura na pele de uma pessoa tem a forma circular. Se o raio da queimadura estiver diminuindo à taxa de 0,05 cm por dia quando ela tem 1,0 cm, qual será a taxa de diminuição da área da queimadura naquele instante?

83. Suponha que $f(x) = 3x + |x|$ e $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}|x|$. Prove que nem $f'(0)$, nem $g'(0)$ existem, mas que $(f \circ g)'(0)$ existe.

84. Dê um exemplo de duas funções f e g para as quais f é derivável, em $g(0)$, g não é derivável em 0 e $f \circ g$ é derivável em 0.

85. Dê um exemplo de duas funções f e g, tais que f não seja derivável em $g(0)$, g seja derivável em 0 e $f \circ g$ seja derivável em 0.

86. No Exercício 59 dos Exercícios 3.1, prove que se f for derivável em a, então

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\,\Delta x}$$

Mostre, usando a função valor absoluto, que é possível existir o limite acima, mesmo que $f'(a)$ não exista.

87. Se $f'(x_1)$ existir, prove que

$$\lim_{x \to x_1} \frac{xf(x_1) - x_1 f(x)}{x - x_1} = f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

88. Sejam f e g funções cujos domínios são o conjunto de todos os números reais. Além disso, suponha que (i) $g(x) = xf(x) + 1$; (ii) $g(a + b) = g(a) \cdot g(b)$ para todo a e b; (iii) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Prove que $g'(x) = g(x)$.

89. Se duas funções, f e g forem deriváveis num número x_1, a função composta $f \circ g$ será, necessariamente, derivável em x_1? Se sua resposta for afirmativa, prove-a. Se a resposta for negativa, dê um contra-exemplo.

90. Suponha que $g(x) = |f(x)|$. Se $f^{(n)}(x)$ existir e $f(x) \neq 0$, prove que

$$g^{(n)}(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} f^{(n)}(x)$$

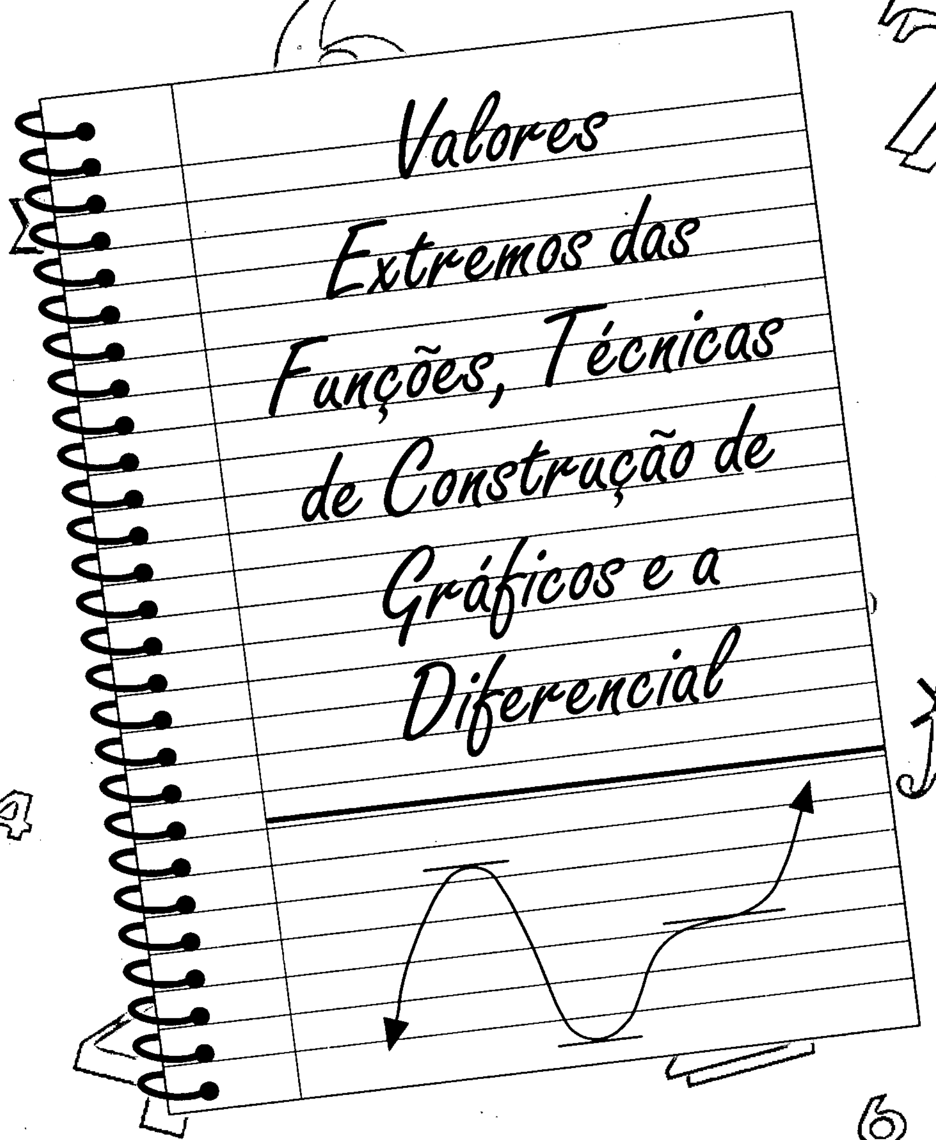
91. Prove que $D_x^n(\text{sen } x) = \text{sen}(x + \frac{1}{2}n\pi)$. (*Sugestão*: use a indução matemática e as fórmulas $\text{sen}(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos x$ ou $\cos(x + \frac{1}{2}\pi) = -\text{sen } x$ após cada derivação.)

92. Suponha que a função f seja definida no intervalo aberto $(0, 1)$ e

$$f(x) = \frac{\text{sen } \pi x}{x(x - 1)}$$

Defina f em 0 e 1, de tal forma que f seja contínua no intervalo fechado $[0, 1]$.

QUATRO



Valores Extremos das Funções, Técnicas de Construção de Gráficos e a Diferencial

A interpretação da derivada como a inclinação de uma reta tangente fornece-nos informações sobre o comportamento das funções, e assim, ela é usada em técnicas de gráficos de funções. As Secções 4.1 e 4.4–4.7 tratam dessa aplicação. Na Secção 4.1, definimos *valores extremos de funções* que são utilizados nas Secções 4.2 e 4.8 para resolver problemas envolvendo máximos e mínimos. Por exemplo, determinamos a maior viga retangular que pode ser cortada de uma dada tora cilíndrica, bem como as dimensões de uma caixa que requer a quantia mínima de material para um volume específico.

Um dos teoremas mais importantes em Cálculo é o *teorema do valor médio*, discutido na Secção 4.3. É usado para provar muitos teoremas de Cálculo Diferencial e Integral, bem como em outros assuntos, como a análise numérica. Na Secção 4.9 introduzimos o conceito de *diferencial*. A Secção Suplementar 4.10 é dedicada ao *Método de Newton*, uma aplicação da derivada a processos numéricos para arredondar soluções de equações.

4.1 VALOR FUNCIONAL MÁXIMO E MÍNIMO

Vimos que a interpretação geométrica de derivada de uma função é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto. Esse fato possibilitanos aplicar derivadas como recurso auxiliar no esboço de gráficos. Por exemplo, podemos usar a derivada para determinar os pontos onde a reta tangente é horizontal; esses são os pontos onde a derivada é zero. A derivada também pode ser usada para encontrarmos os intervalos nos quais a função está acima ou abaixo da reta tangente. Antes de empregar a derivada para fazer esboços de gráficos, precisamos de algumas definições e teoremas.

4.1.1 DEFINIÇÃO A função f terá um **valor máximo relativo** em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x nesse intervalo.

As Figuras 1 e 2 mostram o esboço de parte do gráfico de uma função, tendo um valor máximo relativo em c.

4.1.2 DEFINIÇÃO A função f terá um **valor mínimo relativo** em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x nesse intervalo.

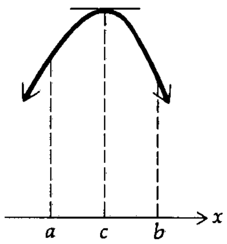


FIGURA 1

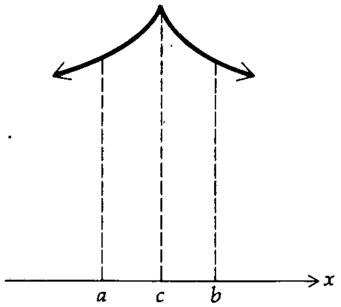


FIGURA 2

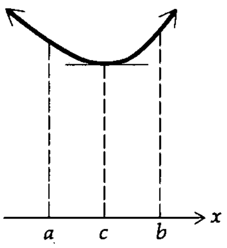


FIGURA 3

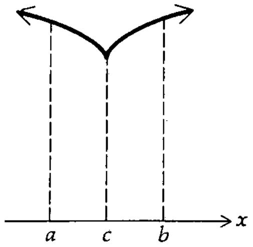


FIGURA 4

As Figuras 3 e 4 mostram o esboço de parte do gráfico de uma função, tendo um valor mínimo relativo em c.

Se a função f tiver um máximo relativo em c ou um mínimo relativo, então dizemos que f tem um **extremo relativo** em c.

O seguinte teorema será usado para localizar os valores possíveis de c para os quais existe um extremo relativo.

4.1.3 TEOREMA Se $f(x)$ foi definida para todos os valores de x no intervalo aberto (a, b) e se f tiver um extremo relativo em c, onde $a < c < b$, então $f'(c) = 0$, se $f'(c)$ existir.

A interpretação geométrica desse teorema é que se f tiver um extremo relativo em c, e se $f'(c)$ existir, então o gráfico de f precisará ter uma reta tangente horizontal no ponto onde $x = c$.

Para demonstrar o Teorema 4.1.3, usamos os Teoremas 2.10.3 e 2.10.4. Seria útil que você consultasse esses teoremas, bem como as Ilustrações 3 e 4 da Secção Suplementar 2.10 que apresentam suas respectivas interpretações geométricas.

Prova do Teorema 4.1.3 A demonstração será dada para o caso em que f tem um valor mínimo relativo em c.

Se $f'(x)$ existir, então

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{1}$$

Como f tem um valor mínimo relativo em c, pela Definição 4.1.2 existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - c| < \delta, \text{ então } f(x) - f(x) \geqslant 0$$

Se x tende a c pela direita, $x - c > 0$; logo

$$\text{se } 0 < x - c < \delta, \text{ então } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$

Pelo Teorema 2.10.4, se o limite existir,

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \tag{2}$$

Da mesma forma, se x tende a c pela esquerda, $x - c < 0$ e, portanto,

$$\text{se } -\delta < x - c < 0, \text{ então } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

assim, pelo Teorema 2.10.3, se o limite existir,

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0 \tag{3}$$

Como $f'(c)$ existe, os limites nas desigualdades (2) e (3) têm que ser iguais a $f'(c)$. Assim, de (2),

$$f'(c) \geqslant 0$$

e de (3),

$$f'(c) \leqslant 0$$

Como ambas as desigualdades são verdadeiras, concluímos que

$$f'(c) = 0$$

que era o que queríamos provar.

A demonstração no caso em que f tem um valor máximo relativo em c é similar e será proposta como um exercício (veja o Exercício 59). ■

Se f for uma função derivável em um intervalo aberto (a, b), então os únicos valores possíveis de x para os quais f pode ter um extremo relativo são aqueles em que $f'(x) = 0$; no entanto, $f'(x)$ pode ser igual a zero para um valor específico de x, sem que f possua um extremo relativo neste ponto. Em outras palavras, para funções deriváveis em um intervalo (a, b), a anulação da derivada em um ponto c é condição necessária mas **não** suficiente para que c seja um extremo relativo, e essa afirmação será comprovada pela ilustração a seguir.

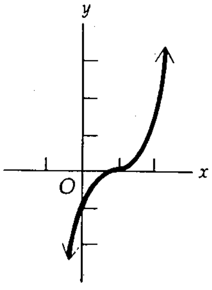


FIGURA 5

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Consideremos a função f definida por

$$f(x) = (x - 1)^3$$

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 5. $f'(x) = 3(x - 1)^2$, e assim $f'(1) = 0$. Mas, $f(x) < 0$ se $x < 1$ e $f(x) > 0$ se $x > 1$. Assim, f não tem um extremo relativo em 1. ◀

Uma função f pode ter um extremo relativo num número e f' pode não existir para este número. Isso é mostrado na Ilustração 2.

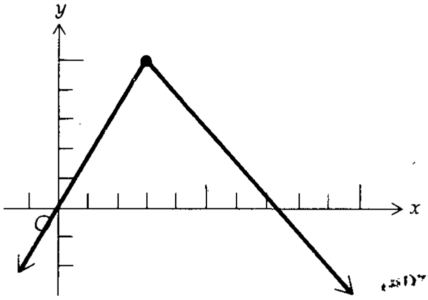


FIGURA 6

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \leqslant 3 \\ 8 - x & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

Um esboço do gráfico dessa função está na Figura 6. A função f tem um valor máximo relativo em 3. A derivada à esquerda em 3 é dada por $f'_-(3) = 2$, enquanto que a derivada à direita de 3 é dada por $f'_+(3) = -1$. Concluímos, então, que $f'(3)$ não existe. ◀

A Ilustração 2 demonstra por que a condição "$f'(c)$ existe" deve ser incluída nas hipóteses do Teorema 4.1.3.

É possível que uma função f possa ser definida num número c, onde $f'(c)$ não exista e ainda f pode não ter um extremo relativo nesse número. Tal função será ilustrada agora.

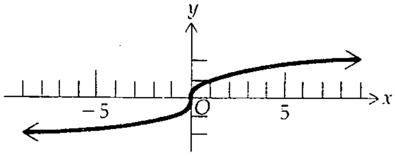


FIGURA 7

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Seja a função f definida por

$$f(x) = x^{1/3}$$

O domínio de f é o conjunto de todos números reais.

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \qquad \text{se } x \neq 0$$

Além disso, $f'(0)$ não existe. A Figura 7 mostra um esboço do gráfico de f. A função não tem extremos relativos. ◀

Em suma, se uma função f está definida em um número c, uma condição necessária à existência de um extremo relativo para f é que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não exista. Porém, essa condição não é suficiente.

4.1.4 DEFINIÇÃO Se c for um número no domínio da função f e se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existir, então c será chamado de **número crítico** de f.

Dessa definição e da discussão anterior, uma condição necessária (mas não suficiente) à existência de um extremo relativo em c é que c seja um número crítico.

EXEMPLO 1 Ache os números críticos da função f definida por

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

Solução

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x+1) \\ &= \frac{4(x+1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

Quando $x = -1$, $f'(x) = 0$ e quando $x = 0$, $f'(x)$ não existe. Ambos -1 e 0 estão no domínio de f; logo, os pontos críticos de f são -1 e 0.

EXEMPLO 2 Ache os números críticos da função g definida por

$$g(x) = \text{sen } x \cos x$$

Solução Como sen $2x = 2$ sen $x \cos x$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{1}{2} \text{ sen } 2x \\ g'(x) &= \tfrac{1}{2}(\cos 2x)2 \\ &= \cos 2x \end{aligned}$$

Desde que $g'(x)$ exista para todo x, os únicos números críticos são aqueles para os quais $g'(x) = 0$. Como $\cos 2x = 0$, quando

$$2x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \quad \text{onde } k \text{ é um inteiro qualquer}$$

os números críticos de g são $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

Um problema freqüente refere-se a uma função dada num certo intervalo, onde queremos encontrar o maior ou o menor valor da função. Esses intervalos podem ser fechados, abertos ou fechados num extremo e abertos no outro. O maior valor da função no intervalo é chamado de *valor máximo absoluto* e o menor valor da função no intervalo é chamado de *valor mínimo absoluto*. A seguir, são dadas as definições precisas.

4.1.5 DEFINIÇÃO A função f terá um **valor máximo absoluto num intervalo,** se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$ será o valor máximo absoluto de f no intervalo.

4.1.6 DEFINIÇÃO A função f terá um **valor mínimo absoluto num intervalo,** se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$ será o valor mínimo absoluto de f no intervalo.

Um **extremo absoluto** de uma função num intervalo é um valor máximo absoluto ou um valor mínimo absoluto da função no intervalo. Uma função pode ou não ter um extremo absoluto num intervalo dado. Em cada uma das ilustrações a seguir, uma função e um intervalo são dados e determinamos os extremos absolutos da função no intervalo, quando existirem.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Suponha que f seja a função definida por

$$f(x) = 2x$$

Um esboço do gráfico de f em $[1, 4)$ está na Figura 8. A função f tem um valor mínimo absoluto de 2 em $[1, 4)$. Não há valor máximo absoluto de f em $[1, 4)$, pois $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 8$, mas $f(x)$ é sempre menor do que 8 no intervalo dado. ◀

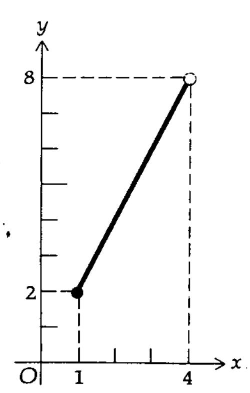


FIGURA 8

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Consideremos a função definida por

$$f(x) = -x^2$$

Um esboço do gráfico de f em $(-3, 2]$ está na Figura 9. A função f tem um valor máximo absoluto de 0 em $(-3, 2]$. Não há valor mínimo absoluto de f em $(-3, 2]$, pois $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -9$, mas $f(x)$ é sempre maior do que -9 no intervalo dado. ◀

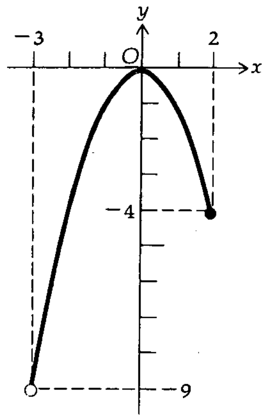


FIGURA 9

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** A função f definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

não possui nem valor máximo absoluto nem valor mínimo absoluto em $(-1, 1)$. Um esboço do gráfico de f em $(-1, 1)$ está na Figura 10. Observe que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$ ◀

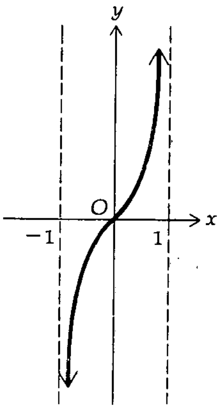


FIGURA 10

▶ **ILUSTRAÇÃO 7** Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

Um esboço do gráfico de f em $[-5, 4]$ está na Figura 11. O valor máximo absoluto de f em $[-5, 4]$ ocorre em 1 e $f(1) = 2$; o valor mínimo absoluto de f em $[-5, 4]$ ocorre em -5 e $f(-5) = -4$. Note que f tem um valor máximo relativo em 1 e um valor mínimo relativo em 3. Observe também que 1 é um número crítico de f, pois $f'(1)$ não existe e 3 é um número crítico de f, já que $f'(3) = 0$. ◀

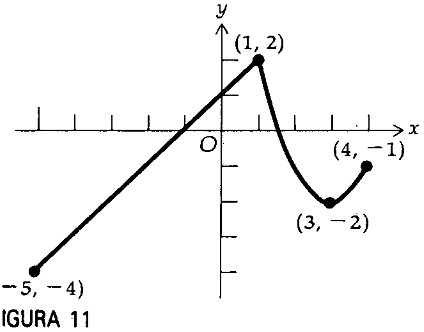


FIGURA 11

▶ **ILUSTRAÇÃO 8** A função f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x - 3}$$

não possui nem valor máximo nem valor mínimo absolutos em $[1, 5]$. Veja, na Figura 12, um esboço do gráfico de f. Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, então, $f(x)$ pode se tornar menor do que qualquer número negativo, quando tomamos $3 - x > 0$, e menor do que um $\delta > 0$ adequado. Da mesma forma, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$; assim, $f(x)$ pode se tornar maior do que qualquer número positivo, quando tomamos $x - 3 > 0$ e menor do que um $\delta > 0$ adequado. ◀

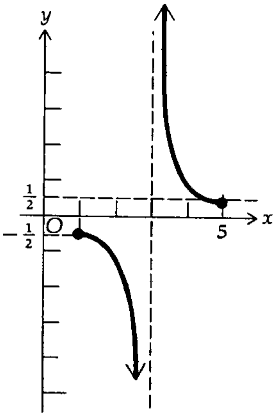


FIGURA 12

Podemos falar de um extremo absoluto de uma função, mesmo que não seja especificado o intervalo. Em tal caso, estamos nos referindo ao extremo absoluto da função em todo o seu domínio.

4.1.7 DEFINIÇÃO $f(c)$ será o **valor máximo absoluto** da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \geqslant f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

4.1.8 DEFINIÇÃO $f(c)$ será o **valor mínimo absoluto** da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \leqslant f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

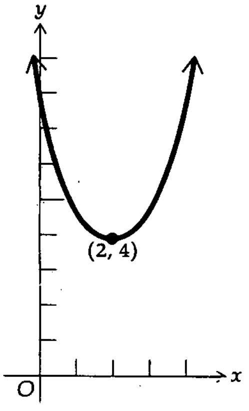


FIGURA 13

► **ILUSTRAÇÃO 9** O gráfico da função f definida por

$$f(x) = x^2 - 4x + 8$$

é uma parábola e o seu esboço está na Figura 13. O ponto mais baixo da parábola está em (2, 4) e a parábola abre-se para cima. A função tem um valor mínimo absoluto de 4 em 2. Não há valor máximo absoluto de f. ◄

Consultando as Ilustrações 4-9, vemos que o único caso no qual existem ambos os valores absolutos máximo e mínimo da função é na Ilustração 7, onde a função é contínua no intervalo fechado $[-5, 4]$. Nas demais ilustrações, não temos um intervalo fechado, ou não temos uma função contínua. Se uma função for contínua num intervalo fechado, há um teorema, conhecido como *teorema do valor extremo*, o qual assegura que a função tem ambos os valores máximo e mínimo absolutos no intervalo. A demonstração desse teorema foge ao contexto deste livro. Você poderá encontrá-la num texto de Cálculo Avançado.

4.1.9 TEOREMA
Teorema do Valor Extremo

Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$.

O Teorema 4.1.9 assegura que a continuidade de uma função em um intervalo fechado é condição suficiente para garantir que a função tenha no intervalo ambos os valores, máximo e mínimo, absolutos. A condição, contudo, não é necessária. Por exemplo, a função cujo gráfico está na Figura 14 tem um valor máximo absoluto em $x = c$ e um valor mínimo absoluto em $x = d$ e, no entanto, ela é descontínua no intervalo aberto $(-1, 1)$.

Um extremo absoluto de uma função contínua num intervalo fechado deve ser um extremo relativo, ou um valor de função num extremo do intervalo. Como uma condição necessária para que uma função tenha um extremo relativo num número c é que c seja um número crítico, o valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto de uma função contínua f num intervalo fechado $[a, b]$ podem ser determinados pelo seguinte procedimento:

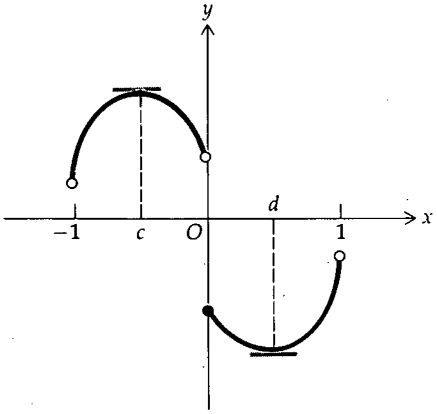


FIGURA 14

1. Ache os valores da função nos números críticos de f em (a, b).
2. Ache os valores de $f(a)$ e $f(b)$.
3. O maior dentre os valores das etapas 1 e 2 será o valor máximo absoluto e o menor será o valor mínimo absoluto.

EXEMPLO 3 Ache os extremos absolutos de f em $[-2, \frac{1}{2}]$ se

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

Solução Como f é contínua em $[-2, \frac{1}{2}]$, o teorema do valor extremo pode ser aplicado. Para achar os números críticos de f, calculamos primeiro f':

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

Como $f'(x)$ existe para todos os números reais, os únicos números críticos de f serão os valores de x para os quais $f'(x) = 0$. Vamos tomar $f'(x) = 0$.

$$(3x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = \tfrac{1}{3} \qquad x = -1$$

Os números críticos de f são -1 e $\frac{1}{3}$ e cada um deles está no intervalo fechado $[-2, \frac{1}{2}]$. Os valores da função nos números críticos e nos extremos do intervalo são dados na Tabela 1.

O valor máximo absoluto de f em $[-2, \frac{1}{2}]$ é, portanto, 2, o que ocorre em -1, e o valor mínimo absoluto de f em $[-2, \frac{1}{2}]$ é -1, que ocorre no extremo esquerdo -2. A Figura 15 mostra um esboço do gráfico de f em $[-2, \frac{1}{2}]$.

Tabela 1

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	-1	2	$\frac{22}{27}$	$\frac{7}{8}$

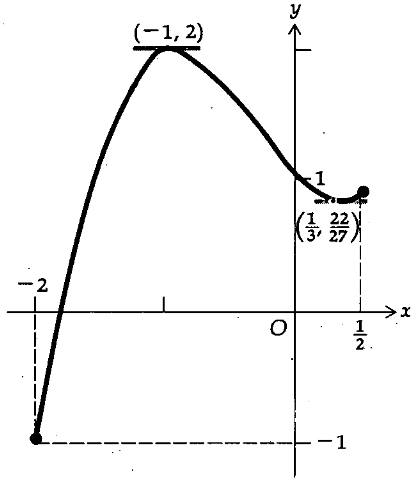


FIGURA 15

EXEMPLO 4 Ache os extremos absolutos de f em $[1, 5]$ se

$$f(x) = (x - 2)^{2/3}$$

Solução Como f é contínua em $[1, 5]$, o teorema do valor extremo pode ser aplicado

$$f'(x) = \frac{2}{3(x - 2)^{1/3}}$$

Não existe valor de x para a qual $f'(x) = 0$. Mas, como $f'(x)$ não existe em 2, concluímos que 2 é um número crítico de f; assim, os extremos absolutos ocorrem em 2 ou num dos extremos do intervalo. Os valores da função nesses números estão na Tabela 2.

Da tabela, concluímos que o valor mínimo absoluto de f em $[1, 5]$ é 0, ocorrendo em 2, e o valor máximo absoluto de f em $[1, 5]$ é $\sqrt[3]{9}$, ocorrendo em 5. Um esboço do gráfico dessa função em $[1, 5]$ está na Figura 16.

Tabela 2

x	1	2	5
$f(x)$	1	0	$\sqrt[3]{9}$

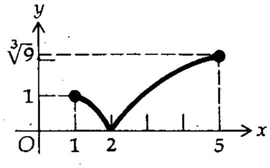


FIGURA 16

EXERCÍCIOS 4.1

Nos Exercícios de 1 a 20, ache os números críticos da função dada.

1. $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$
2. $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 1$
3. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$
4. $f(x) = x^{7/3} + x^{4/3} - 3x^{1/3}$
5. $g(x) = x^{6/5} - 12x^{1/5}$
6. $f(x) = x^4 + 11x^3 + 34x^2 + 15x - 2$

7. $f(t) = (t^2 - 4)^{2/3}$

8. $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{1/3}$

9. $h(x) = \dfrac{x - 3}{x + 7}$

10. $f(t) = t^{5/3} - 3t^{2/3}$

11. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

12. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 5x + 4}$

13. $f(x) = \operatorname{sen}^2 3x$

14. $f(z) = \cos^2 4z$

15. $g(t) = \operatorname{sen} 2t \cos 2t$

16. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$

17. $f(x) = \operatorname{tg}^2 4x$

18. $g(x) = \sec^2 3x$

19. $G(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$

20. $F(x) = (5 + x)^3(2 - x)^2$

Nos Exercícios de 21 a 40, ache os extremos absolutos da função dada no intervalo indicado, se existirem, e determine os valores de x nos quais ocorrem os extremos absolutos. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo.

21. $f(x) = 4 - 3x$; $(-1, 2]$

22. $f(x) = x^2 - 2x + 4$; $(-\infty, +\infty)$

23. $g(x) = \dfrac{1}{x}$; $[-2, 3]$

24. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $[2, 3)$

25. $f(x) = 2 \cos x$; $[-\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$

26. $G(x) = -3 \operatorname{sen} x$; $[0, \frac{3}{4}\pi)$

27. $f(x) = \sqrt{3 + x}$; $[-3, +\infty)$

28. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $(-2, 2)$

29. $h(x) = \dfrac{4}{(x - 3)^2}$; $[2, 5]$

30. $g(x) = \dfrac{3x}{9 - x^2}$; $(-3, 2)$

31. $F(x) = |x - 4| + 1$; $(0, 6)$

32. $f(x) = |4 - x^2|$; $(-\infty, +\infty)$

33. $g(x) = \sqrt{4 + 7x}$; $[0, 3)$

34. $F(x) = U(x) - U(x - 1)$ onde $U(x) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leqslant x \end{Bmatrix}$; $(-1, 1)$

35. $f(x) = \begin{Bmatrix} \dfrac{2}{x - 5} & \text{se } x \neq 5 \\ 2 & \text{se } x = 5 \end{Bmatrix}$; $[3, 5]$

36. $f(x) = \begin{Bmatrix} |x + 1| & \text{se } x \neq -1 \\ 3 & \text{se } x = -1 \end{Bmatrix}$; $[-2, 1]$

37. $f(x) = x - [\![x]\!]$; $(1, 3)$

38. $h(x) = 2x + [\![2x - 1]\!]$; $(1, 2]$

39. $g(x) = \sec 3x$; $[-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi]$

40. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$; $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi]$

Nos Exercícios de 41 a 58, ache o valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto da função dada no intervalo indicado pelo método usado nos Exemplos 3 e 4 desta secção. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo.

41. $g(x) = x^3 + 5x - 4$; $[-3, -1]$

42. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$; $[-4, 4]$

43. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; $[-4, 0]$

44. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; $[-3, 2]$

45. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; $[0, 3]$

46. $g(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; $[-1, 4]$

47. $f(t) = 2 \operatorname{sen} t$; $[-\pi, \pi]$

48. $f(w) = 3 \cos 2w$; $[\frac{1}{6}\pi, \frac{3}{4}\pi]$

49. $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} 2x$; $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi]$

50. $h(x) = 2 \sec \frac{1}{2}x$; $[-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

51. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$; $[-1, 2]$

52. $f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 3}$; $[-5, 2]$

53. $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 3}$; $[0, 1]$

54. $f(x) = \begin{Bmatrix} 2x - 7 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 - x^2 & \text{se } 2 < x \leqslant 4 \end{Bmatrix}$; $[-1, 4]$

55. $F(x) = \begin{Bmatrix} 3x - 4 & \text{se } -3 \leqslant x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{Bmatrix}$; $[-3, 3]$

56. $G(x) = \begin{Bmatrix} 4 - (x + 5)^2 & \text{se } -6 \leqslant x \leqslant -4 \\ 12 - (x + 1)^2 & \text{se } -4 < x \leqslant 0 \end{Bmatrix}$; $[-6, 0]$

57. $f(x) = (x + 1)^{2/3}$; $[-2, 1]$

58. $g(x) = 1 - (x - 3)^{2/3}$; $[-5, 4]$

59. Prove o Teorema 4.1.3 para o caso em que f tem um valor máximo relativo em c.

4.2 APLICAÇÕES ENVOLVENDO EXTREMOS ABSOLUTOS NUM INTERVALO FECHADO

Vamos aplicar o teorema do valor extremo a alguns problemas nos quais a solução é um extremo absoluto de uma função num intervalo fechado. O teorema assegura a existência de ambos os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua num intervalo fechado. Na ilustração a seguir mostraremos o procedimento, considerando o problema discutido no Exemplo 4 da Secção 2.7.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas a partir de pedaços de papelão com 12 cm² cortando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Queremos encontrar o comprimento do lado do quadrado a ser cortado para obter uma caixa com o maior volume possível. A Figura 1 representa um dado pedaço de papelão e a Figura 2 representa a caixa. Mostramos no Exemplo 4 da Secção 2.7 que se x cm for o comprimento do lado do quadrado a ser cortado e $V(x)$ cm³ for o volume da caixa, então

$$V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

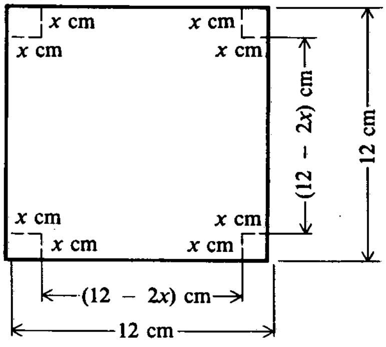


FIGURA 1

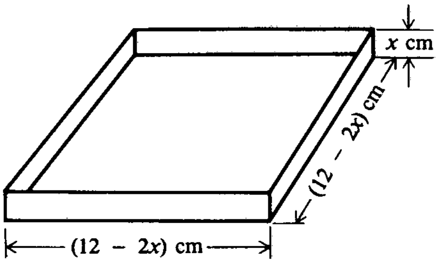


FIGURA 2

e o domínio de V será o intervalo fechado $[0, 6]$. Como V é contínua em $[0, 6]$, segue do teorema do valor extremo que V tem um valor máximo absoluto nesse intervalo. Sabemos também que esse valor máximo absoluto precisa ocorrer num número crítico de V ou num extremo do intervalo. Para encontrar os números críticos de V determinamos $V'(x)$ e então encontramos os valores de x para os quais $V'(x) = 0$ ou $V'(x)$ não existe.

$$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$$

$V'(x)$ existe para todos os valores de x. Se $V'(x) = 0$,

$$12(x^2 - 8x + 12) = 0$$

$$x = 6 \qquad x = 2$$

Os números críticos de V são 2 e 6, ambos pertencentes ao intervalo fechado $[0, 6]$. O valor máximo absoluto de V em $[0, 6]$ precisa ocorrer num número crítico ou num extremo do intervalo. Como $V(0) = 0$ e $V(6) = 0$, enquanto que $V(2) = 128$, o valor máximo absoluto de V em $[0, 6]$ é 128, ocorrendo quando $x = 2$.

Logo, o maior volume possível é de 128 cm^3, obtido quando o comprimento do lado do quadrado a ser cortado é de 2 cm. ◀

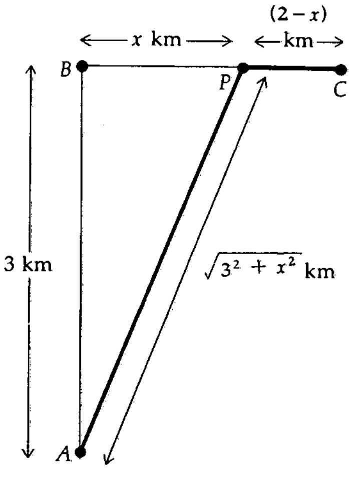


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Os pontos A e B estão em lados opostos de um rio reto com 3 km de largura. O ponto C está na mesma margem que B, mas 2 km rio abaixo. Uma companhia telefônica deseja estender um cabo de A até C. Se o custo por quilômetro do cabo é 25% maior sob a água do que em terra, como deve ser estendido o cabo, de forma que o custo seja o menor para a companhia?

Solução Consulte a Figura 3. Seja P um ponto na mesma margem que B e C e entre B e C, de tal forma que o cabo será estendido de A para P e deste para C. Seja x km a distância de B até P. Logo, $(2 - x)$ quilômetros será a distância de P até C e $x \in [0, 2]$. Seja k o custo por quilômetro em terra e $\frac{5}{4}k$ o custo por quilômetro sob a água (k é uma constante). Se $C(x)$ for o custo total da ligação de A até P e de P até C, então

$$C(x) = \tfrac{5}{4}k\sqrt{3^2 + x^2} + k(2 - x)$$

Como C é contínua em $[0, 2]$, o teorema do valor extremo pode ser aplicado, assim, C tem ambos os valores, máximo e mínimo, absolutos, em $[0, 2]$. Queremos encontrar o valor mínimo absoluto.

$$C'(x) = \frac{5kx}{4\sqrt{9+x^2}} - k$$

$C'(x)$ existe para todos os valores de x. Equacionando $C'(x) = 0$ e resolvendo em x, teremos

$$\frac{5kx}{4\sqrt{9+x^2}} - k = 0$$

$$5x = 4\sqrt{9+x^2} \tag{1}$$

$$25x^2 = 16(9+x^2)$$

$$9x^2 = 16 \cdot 9$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

O número -4 é uma raiz estranha de (1) e 4 não está no intervalo $[0, 2]$. Logo, não existem números críticos de C em $[0, 2]$. O valor mínimo absoluto de C em $[0, 2]$ deve, portanto, ocorrer num dos extremos do intervalo. Calculando $C(0)$ e $C(2)$, obtemos

$$C(0) = \tfrac{23}{4}k \quad \text{e} \quad C(2) = \tfrac{5}{4}k\sqrt{13}$$

Como $\frac{5}{4}k\sqrt{13} < \frac{23}{4}k$, o valor mínimo absoluto de C em $[0, 2]$ é $\frac{5}{4}k\sqrt{13}$, ocorrendo quando $x = 2$. Logo, para minimizar o custo do cabo, devemos estendê-lo diretamente de A até C sob a água.

EXEMPLO 2 Um campo retangular à margem de um rio deve ser cercado, com exceção do lado ao longo do rio. Se o custo do material for de \$12 por metro linear no lado paralelo ao rio e de \$8 por metro linear nos dois extremos, ache o campo de maior área possível que possa ser cercado com \$3600 de material.

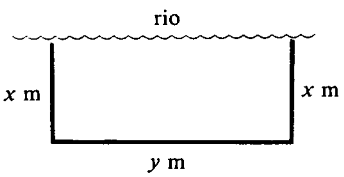


FIGURA 4

Solução Seja x m o comprimento de cada extremo do campo, y m o comprimento do lado paralelo ao rio e A m^2 a área do campo. Veja a Figura 4. Logo,

$$A = xy \tag{2}$$

Como o custo do material em cada extremo é de \$8 por metro linear e o comprimento de cada extremo é de x m, o custo total da cerca para cada extremo será de \$$8x$. Analogamente, o custo total da cerca para o terceiro lado é de \$$12y$. Então,

$$8x + 8x + 12y = 3.600 \tag{3}$$

Para expressar A em termos de uma única variável, resolvemos (3) obtendo y em termos de x e substituímos esse valor em (2), obtendo A como uma função de x, e

$$A(x) = x(300 - \tfrac{4}{3}x) \tag{4}$$

De (3), se $y = 0$, $x = 225$ e se $x = 0$, $y = 300$. Como ambos, x e y, devem ser não-negativos, o valor de x que irá tornar A um máximo absoluto está no intervalo fechado $[0, 225]$. Como A é contínua no intervalo fechado $[0, 225]$, do teorema do valor extremo, A terá um valor máximo absoluto nesse intervalo. De (4),

$$A(x) = 300x - \tfrac{4}{3}x^2$$

$$A'(x) = 300 - \tfrac{8}{3}x$$

Como $A'(x)$ existe para todo x, os números críticos de A são encontrados ao equacionarmos $A'(x) = 0$, o que dá

$$x = 112\tfrac{1}{2}$$

O único número crítico de A é $112\frac{1}{2}$, que está no intervalo fechado $[0, 225]$. Assim, o valor máximo absoluto de A deve ocorrer em 0, $112\frac{1}{2}$ ou 225. Como $A(0) = 0$ e $A(225) = 0$, enquanto que $A(112\frac{1}{2}) = 16.875$, o valor máximo absoluto de A em $[0, 225]$ é 16.875, ocorrendo quando $x = 112\frac{1}{2}$ e $y = 150$ (obtido de (3), substituindo $112\frac{1}{2}$ por x).

Assim sendo, a maior área possível que poderá ser cercada com \$3.600 de material será 16.875 m^2, e isto acontece quando o lado paralelo ao rio tiver 150 m e os extremos tiverem, cada um, $112\frac{1}{2}$ m.

EXEMPLO 3 Ao planejar um restaurante, estima-se que se houver de 40 a 80 lugares, o lucro bruto diário será de \$16 por lugar. Se, contudo, o número de assentos for acima de 80 lugares, o lucro bruto diário por lugar decrescerá de \$0,08 vezes o número de lugares acima de 80. Qual deverá ser o número de assentos para que o lucro bruto diário seja máximo?

Solução Seja x o número de lugares e $P(x)$ o lucro bruto diário. $P(x)$ é obtido ao multiplicarmos por x o lucro por lugar. Quando $40 \leqslant x \leqslant 80$, o lucro por lugar será de \$16; assim, $P(x) = 16x$. Se contudo, $x > 80$, então o lucro por lugar será de $16 - 0{,}08\,(x - 80)$, dando assim $P(x) = x\,[16 - 0{,}08\,(x - 80)]$; isto é, $P(x) = 22{,}40x - 0{,}08x^2$. Assim,

$$P(x) = \begin{cases} 16x & \text{se} \quad 40 \leqslant x \leqslant 80 \\ 22{,}40x - 0{,}08x^2 & \text{se} \quad 80 < x \leqslant 280 \end{cases}$$

O limitante superior de 280 para x foi obtido notando que $22{,}40x - 0{,}08x^2 = 0$ quando $x = 280$ e quando $x > 280$, $22{,}40x - 0{,}08x^2$ é negativo.

Mesmo que x, por definição, seja um inteiro, para ter uma função contínua, vamos supor que x possa assumir todos os valores reais no intervalo $[40, 280]$. Há continuidade em 80, pois $P(80) = 1.280$ e

$$\lim_{x \to 80^-} P(x) = \lim_{x \to 80^-} 16x = 1.280 \qquad \lim_{x \to 80^+} P(x) = \lim_{x \to 80^+} (22{,}40x - 0{,}08x^2) = 1.280$$

Assim, P é contínua no intervalo fechado $[40, 280]$ e o teorema do valor extremo garante um valor máximo absoluto de P nesse intervalo.

Quando $40 < x < 80$, $P'(x) = 16$; quando $80 < x < 280$, $P'(x) = 22{,}40 - 0{,}16x$. $P'(80)$ não existe, pois $P'_-(80) = 16$ e $P'_+(80) = 9{,}60$. Equacionando $P'(x) = 0$,

$$\begin{aligned} 22{,}40 - 0{,}16x &= 0 \\ x &= 140 \end{aligned}$$

Os números críticos de P são, então, 80 e 140. Vamos calcular $P(x)$ nos pontos extremos do intervalo $[40, 280]$ e nos números críticos.

$$P(40) = 640 \qquad P(80) = 1.280 \qquad P(140) = 1.568 \qquad P(280) = 0$$

O valor máximo absoluto de P é, portanto, de 1.568, ocorrendo quando $x = 140$.

A capacidade de assentos deve ser de 140 lugares, o que dá um lucro bruto diário de \$1.568.

EXEMPLO 4 Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito num cone circular reto com um raio de 5 cm e 12 cm de altura.

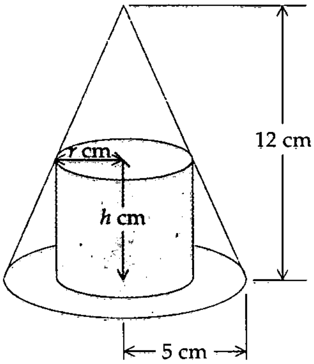


FIGURA 5

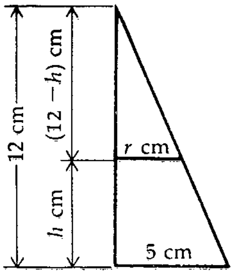


FIGURA 6

Solução Seja r cm o raio do cilindro, h cm sua altura e V cm³ o seu volume.

A Figura 5 ilustra o cilindro inscrito no cone e a Figura 6 mostra uma secção plana através do eixo do cone.

Se $r = 0$ e $h = 12$, temos um cilindro degenerado que é o eixo do cone. Se $r = 5$ e $h = 0$, também temos um cilindro degenerado, que é um diâmetro da base do cone. O número r está no intervalo fechado $[0, 5]$ e h está no intervalo fechado $[0, 12]$.

A fórmula a seguir expressa V em termos de r e h:

$$V = \pi r^2 h \tag{5}$$

Para expressar V em termos de uma única variável, precisamos de uma outra equação envolvendo r e h. Da Figura 6, usando semelhança de triângulos,

$$\frac{12 - h}{r} = \frac{12}{5}$$

$$h = \frac{60 - 12r}{5} \tag{6}$$

Substituindo (6) na fórmula (5), iremos obter V como uma função de r e escrevemos

$$V(r) = \tfrac{12}{5}\pi(5r^2 - r^3) \qquad \text{com } r \text{ em } [0, 5] \tag{7}$$

Como V é contínua no intervalo fechado $[0, 5]$, segue do teorema do valor extremo que V tem um valor máximo absoluto nesse intervalo. Os valores de r e h que acarretam esse valor máximo absoluto para V são os números que devem ser encontrados.

$$V'(r) = \tfrac{12}{5}\pi(10r - 3r^2)$$

Para encontrar os números críticos de V, equacionamos $V'(r) = 0$ e resolvemos em r:

$$r(10 - 3r) = 0$$

$$r = 0 \qquad r = \tfrac{10}{3}$$

Como $V'(r)$ existe para todos os valores de r, os únicos números críticos de V são 0 e $\frac{10}{3}$, ambos no intervalo fechado $[0, 5]$. O valor máximo absoluto de V em $[0, 5]$ deve ocorrer em um dos números 0, $\frac{10}{3}$ ou 5. De (7), obtemos

$$V(0) = 0 \qquad V(\tfrac{10}{3}) = \tfrac{400}{9}\pi \qquad V(5) = 0$$

Logo, o valor máximo absoluto de V é $\frac{400}{9}\pi$, ocorrendo quando $r = \frac{10}{3}$. Quando $r = \frac{10}{3}$, de (6) decorre que $h = 4$.

Assim sendo, o maior volume do cilindro inscrito no cone dado é $\frac{400}{9}\pi$ cm^3 e teremos esse valor quando o raio for de $\frac{10}{3}$ cm e a altura for de 4 cm.

EXERCÍCIOS 4.2

Em alguns dos exercícios, a variável independente, por definição, pode representar um número inteiro não-negativo. Por exemplo, no Exercício 17, se x representar o número de estudantes, então x deverá ser um inteiro não-negativo. Para que haja continuidade em tais exercícios, requisito necessário para podermos aplicar o cálculo, permita que a variável independente seja um número real não-negativo.

1. Consulte o Exercício 41 da série de Exercícios 2.7. Um fabricante de latas sem tampas deseja usar folhas-de-flandres com dimensões de 8 cm por 15 cm, cortando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Use o método desta secção para encontrar o comprimento do lado do quadrado a ser cortado, a fim de obter de cada folha-de-flandres uma caixa aberta, tendo o maior volume possível.
2. Consulte o Exercício 42, da série de Exercícios 2.7. Suponha que o fabricante do Exercício 1 faça as latas abertas de pedaços quadrados de flandres com k cm de lado. Determine o comprimento do quadrado a ser cortado, de tal forma que o volume da caixa seja um máximo.
3. Consulte o Exercício 43 da série de Exercícios 2.7. Ache as dimensões do maior campo retangular que pode ser fechado com 240 m de cerca.
4. Ache as dimensões do maior jardim retangular que pode ser fechado com 100 m de cerca.
5. Se um dos lados de um campo retangular for um rio, ache as dimensões do maior campo retangular que pode ser fechado usando 240 m de cerca para os outros três lados.
6. Consulte o Exercício 44 da série de Exercícios 2.7. Ache as dimensões do maior jardim retangular, de forma que uma casa limite um lado do jardim e 100 m de cerca sejam usados nos outros três lados.
7. Ache o número no intervalo $[0, 1]$, tal que a diferença entre o número e seu quadrado seja um máximo.
8. Ache o número no intervalo $[\frac{1}{3}, 2]$, tal que a soma do número com seu recíproco seja um máximo.
9. Ache a área do maior retângulo tendo dois vértices no eixo x e os dois outros vértices sobre a parábola $y = 9 - x^2$ acima do eixo x.
10. Ache a área do maior retângulo que possa ser inscrito numa circunferência dada de raio r.
11. Uma ilha está num ponto A, a 6 km do ponto mais próximo B, numa praia reta. Uma mulher na ilha deseja ir a um ponto C, a 9 km do ponto B. A mulher pode alugar um barco por \$15 o quilômetro e navegar até um ponto P entre B e C e então alugar um carro a um custo de \$12 por quilômetro e chegar a C por uma estrada reta. Ache o percurso mais barato de A até C.;
12. Resolva o Exercício 11 se o ponto C estiver a 7 km de B.
13. Resolva o Exemplo 1 desta secção se o ponto C estiver a 6 km rio abaixo de B.
14. O Exemplo 1 e os Exercícios 11, 12 e 13 são casos particulares do seguinte problema geral. Seja

$$f(x) = u\sqrt{a^2 + x^2} + v(b - x).$$

onde x está em $[0, b]$ e $u > v > 0$. Mostre que para o valor mínimo absoluto de f ocorrer em um número do intervalo aberto $(0, b)$, a seguinte desigualdade deve estar satisfeita: $av < b\sqrt{u^2 - v^2}$.

15. Se R m for o alcance de um projétil, então

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{1}{2}\pi$$

onde v_0 m/s é a velocidade inicial, g m/s^2 é a aceleração da gravidade e θ é a medida em radianos do ângulo que a arma faz com a horizontal. Ache o valor de θ para que o alcance seja máximo.

16. Se um corpo com W kg de peso for arrastado ao longo de um piso horizontal por uma força com F kg de magnitude e segundo uma direção que faz um ângulo de θ rad. com o plano do piso, então F será dada pela equação

$$F = \frac{kW}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

onde k é uma constante chamada de coeficiente de atrito e $0 < k < 1$. Se $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, ache $\cos \theta$ quando F for mínima.

17. Consulte o Exercício 39, da série de Exercícios 3.2. Uma excursão de uma escola que pode acomodar até 250 estudantes custará \$15 por estudante, se no máximo 150 fizerem a viagem, contudo, o custo por estudante será reduzido em \$0,05 para cada estudante que exceder 150, até que o custo seja de \$10 por estudante. Quantos estudantes devem fazer a excursão para que a escola receba a maior renda bruta?
18. Resolva o Exercício 17, se a redução por estudante que exceder 150 for de \$0,07.
19. Um clube privado cobra a anuidade de \$100 por membro, menos \$0,50 para cada membro acima de 600 e mais \$0,50 para cada membro abaixo de 600. Quantos membros darão ao clube um rendimento anual máximo?

20. Consulte o Exercício 40, da série de Exercícios 3.2. Um fabricante pode obter um luco de $20 em cada item, se forem produzidos por semana no máximo 800 itens. O lucro decresce $0,02 por item acima de 800. Quantos itens deverão ser produzidos por semana, para que ele obtenha um lucro máximo?

21. Laranjeiras na Califórnia produzem 600 laranjas por ano, se forem plantadas no máximo 20 árvores por acre (4 km^2). Cada árvore plantada a mais causa um decréscimo de 15 laranjas por pé. Quantas árvores devem ser plantadas por acre para se obter o maior número de laranjas?

22. Mostre que o maior retângulo tendo um perímetro dado de p unidades é um quadrado.

23. Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior área de superfície lateral que possa ser inscrito numa esfera com um raio de 6 cm.

24. Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito numa esfera com um raio de 6 cm.

25. Para um pacote ser aceito por um determinado serviço de entrega de encomendas, a soma do comprimento e do perímetro da secção transversal não deve ser maior do que 100 cm. Se um pacote tiver o formato de uma caixa retangular com uma secção quadrada, ache as dimensões do pacote tendo o maior volume possível que possa ser despachado.

26. Dois produtos, A e B, são produzidos por determinada fábrica. Se C for o custo total de produção numa jornada de 8 horas por dia, então $C = 3x^2 + 42y$, onde x e y são o número de máquinas que são usadas para produzir A e B, respectivamente. Se durante a jornada de 8 horas tivermos 15 máquinas em funcionamento, determine quantas devem produzir A e quantas devem produzir B, para que o custo total seja mínimo.

27. Dado a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$, ache (a) a menor distância entre o ponto (4, 5) e um ponto na circunferência; (b) a maior distância entre o ponto (4, 5) e um ponto na circunferência.

28. Suponha que um peso deva ser mantido 10 m abaixo de uma reta horizontal AB por um fio com a forma de Y. Se os pontos A e B estão a uma distância de 8 m um do outro, qual o fio de menor comprimento que pode ser usado?

29. Suponha que a diminuição na pressão sangüínea de uma pessoa dependa de uma determinada droga que ela deverá tomar. Assim, se x mg da droga forem tomados, a queda na pressão sangüínea será uma função de x. Seja $f(x)$ esta função e

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2(k - x)$$

onde x está em $[0, k]$ e k é uma constante positiva. Determine o valor de x que cause o maior decréscimo na pressão sangüínea.

30. Durante a tosse há um decréscimo no raio da traquéia de uma pessoa. Suponha que o raio normal da traquéia seja R cm e que durante a tosse o raio seja de r cm, onde R é uma constante e r é uma variável. Podemos mostrar que a velocidade do ar através da traquéia é uma função de r e se $V(r)$ cm/s for essa velocidade, então

$$V(r) = kr^2(R - r)$$

onde k é uma constante positiva e r está em $[\frac{1}{2} R, R]$. Determine o raio da traquéia durante a tosse, para o qual a velocidade do ar através da traquéia seja máxima.

31. Numa determinada vila, a taxa segundo a qual um boato se espalha é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que ouviram o boato e ao número de pessoas que não ouviram. Mostre que o boato está sendo espalhado com velocidade máxima, quando a metade da população da cidade já o escutou.

32. Um determinado lago pode suportar até 14.000 peixes e a taxa de crescimento da população de peixes é conjuntamente proporcional ao número de peixes presentes e à diferença entre 14.000 e o número de peixes existentes. Qual deve ser o tamanho da população de peixes para que a taxa de crescimento seja máxima?

33. A resistência de uma viga retangular é conjuntamente proporcional à sua largura e ao quadrado de sua profundidade. Ache as dimensões da viga mais resistente que possa ser cortada de uma tora na forma de um cilindro circular reto com 72 cm de raio.

34. A rigidez de uma viga retangular é conjuntamente proporcional à sua largura e ao cubo de sua profundidade. Ache as dimensões da viga mais rígida que possa ser cortada de uma tora na forma de um cilindro circular reto com a cm de raio.

35. Um pedaço de arame com 10 m é cortado em duas partes. Uma delas é curvada na forma circular e a outra, na forma de um quadrado. Como dividir o fio, de tal forma que (a) a área combinada das duas figuras seja a menor possível; (b) a área combinada das duas figuras seja a maior possível?

36. Resolva o Exercício 35, se uma das partes for dobrada na forma de um triângulo equilátero, e a outra, na forma de um quadrado.

4.3 TEOREMA DE ROLLE E TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Ressaltamos a importância do teorema do valor médio na introdução deste capítulo. A demonstração do teorema do valor médio é baseada num caso particular, conhecido como *teorema de Rolle*, que discutiremos primeiro.

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, derivável no intervalo aberto (a, b) e tal que $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$. O matemático francês Michel Rolle (1652-1719) provou que se uma função satisfaz essas condições, existe pelo menos um número c entre a e b para o qual $f'(c) = 0$.

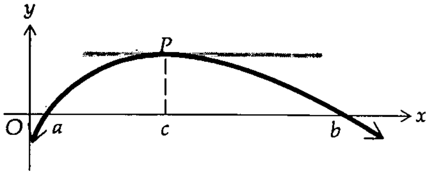


FIGURA 1

Vejamos qual o significado geométrico disto. A Figura 1 mostra um esboço do gráfico de uma função f que satisfaz as condições do parágrafo precedente. Vemos, intuitivamente, que existe pelo menos um ponto sobre a curva entre os pontos $(a, 0)$ e $(b, 0)$, onde a reta tangente é paralela ao eixo x; isto é, a inclinação da reta tangente é zero. Esta situação é ilustrada na Figura 1, no ponto P. Assim sendo, a abscissa de P é o c, tal que $f'(c) = 0$.

A função cujo gráfico está esboçado na Figura 1 não é derivável apenas no intervalo aberto (a, b); isso ocorre também nos extremos do intervalo. Mas, a condição de que f seja derivável nos extremos não é necessária, para que o gráfico tenha uma reta tangente horizontal em algum ponto no intervalo; a Figura 2 ilustra isso. Vemos, nessa figura, que a função não é derivável em a e b; contudo, existe uma reta tangente no ponto onde $x = c$ e c está entre a e b.

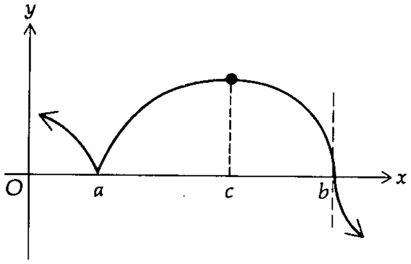


FIGURA 2

Entretanto, é necessário que a função seja contínua nos extremos do intervalo, para garantir a existência dessa tangente. A Figura 3 mostra um esboço do gráfico de uma função que é contínua no intervalo $[a, b)$, mas descontínua em b; a função é derivável no intervalo aberto (a, b), e os valores funcionais são zero em ambos os pontos, a e b. Não existe, contudo, nenhum ponto no qual o gráfico tenha uma reta tangente horizontal.

Vamos enunciar e provar agora o teorema de Rolle.

4.3.1 TEOREMA
Teorema de Rolle

Seja f uma função, tal que

(i) ela seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$;
(ii) ela seja derivável no intervalo aberto (a, b);
(iii) $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$.

Então existe um número c no intervalo aberto (a, b), tal que

$f'(c) = 0$.

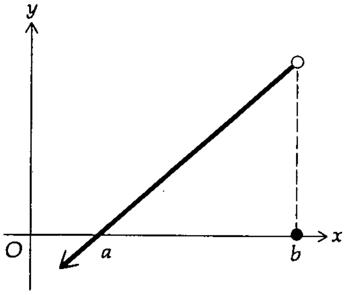


FIGURA 3

Prova Vamos considerar dois casos.

Caso 1: $f(x) = 0$ para todo x em $[a, b]$.

Então, $f'(x) = 0$ para todo x em (a, b); logo, qualquer número entre a e c pode ser tomado como c.

Caso 2: $f(x)$ não se anula para todos os valores de x no intervalo aberto (a, b).

Como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, do teorema do valor extremo, f tem um valor máximo e um valor mínimo absolutos em $[a, b]$. De (iii), $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$. Além disso, $f(x)$ não é zero para todo x em (a, b). Logo, f terá um valor máximo absoluto positivo em algum c_1 de (a, b), ou um valor mínimo absoluto negativo em algum c_2 de (a, b), ou ambos. Assim, para $c = c_1$ ou $c = c_2$, conforme o caso, existe um extremo absoluto num ponto interior ao intervalo $[a, b]$. Logo, o extremo absoluto $f(c)$ é também um extremo relativo, e como por hipótese existe $f'(c)$, segue do Teorema 4.1.3 que $f'(c) = 0$. Isso prova o teorema. ■

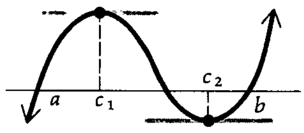


FIGURA 4

Pode existir mais de um número no intervalo aberto (a, b), para o qual a derivada de f seja zero. Isso é ilustrado geometricamente na Figura 4, onde a reta tangente é horizontal no ponto onde $x = c_1$ e também no ponto onde $x = c_2$; assim, ambos $f'(c_1) = 0$ e $f'(c_2) = 0$.

O inverso do teorema de Rolle não é verdadeiro. Isto é, não podemos concluir que se uma função f for tal que $f'(c) = 0$, como $a < c < b$, então serão verdadeiras as condições (i), (ii) e (iii). Veja o Exercício 32.

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x) = 4x^3 - 9x$$

comprove que as condições (i), (ii) e (iii) das hipóteses do teorema de Rolle estão satisfeitas em cada um dos seguintes intervalos: $[-\frac{3}{2}, 0]$, $[0, \frac{3}{2}]$ e $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. Ache então um valor de c em cada um desses intervalos para os quais $f'(c) = 0$.

Solução

$$f'(x) = 12x^2 - 9$$

Como $f'(x)$ existe para todos os valores de x, f é derivável em $(-\infty, +\infty)$. Assim, as condições (i) e (ii) do teorema de Rolle são válidas em qualquer intervalo. Para determinar em quais intervalos a condição (iii) se verifica, encontramos os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Se $f(x) = 0$,

$$4x(x^2 - \tfrac{9}{4}) = 0$$

$$x = -\tfrac{3}{2} \qquad x = 0 \qquad x = \tfrac{3}{2}$$

Com $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 0$ o teorema de Rolle é válido em $[-\frac{3}{2}, 0]$. Analogamente, o teorema de Rolle é válido em $[0, \frac{3}{2}]$ e $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

Para encontrar os valores adequados de c, equacionamos $f'(x) = 0$, obtendo

$$12x^2 - 9 = 0$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \qquad x = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Portanto, no intervalo $[-\frac{3}{2}, 0]$, uma escolha adequada para c é $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. No intervalo $[0, \frac{3}{2}]$, tomamos $c = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, enquanto que no intervalo $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ temos duas possibilidades para c: $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ou $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Vamos aplicar agora o teorema de Rolle para provar o teorema do valor médio. Você deverá se familiarizar bem com o conteúdo deste teorema.

4.3.2 TEOREMA
Teorema do Valor Médio

Seja f uma função, tal que

(i) seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$;
(ii) seja derivável no intervalo aberto (a, b).

Então, existirá um número c no intervalo aberto (a, b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Antes de demonstrar o teorema, vamos interpretá-lo geometricamente. Num esboço do gráfico da função f, $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ é a inclinação do segmento de reta que liga os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. O teorema do valor médio afirma que existe um ponto sobre a curva entre A e B, onde a reta tangente é paralela à reta secante por A e B; isto é, existe um número c em (a, b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Consulte a Figura 5.

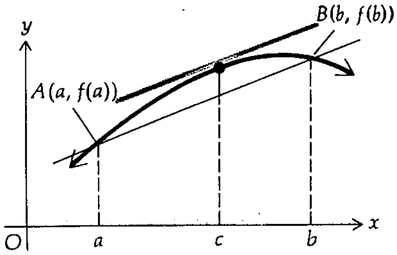


FIGURA 5

Se tomarmos o eixo x coincidente com a reta secante AB, podemos observar que o teorema do valor médio é uma generalização do teorema de Rolle, o qual será usado em sua demonstração.

Prova do Teorema 4.3.2 Uma equação da reta que passa por A e B na Figura 5 é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow \qquad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Seja, agora, $F(x)$ a medida da distância vertical entre o ponto $(x, f(x))$ do gráfico da função f e o ponto correspondente sobre a reta secante por A e B; então,

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \tag{1}$$

Vamos mostrar que a função F satisfaz as três condições da hipótese do teorema de Rolle.

A função F é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, pois é a soma de f com uma função polinomial linear, ambas as quais são contínuas no intervalo. Logo, a condição (i) está satisfeita por F. A condição (ii) está satisfeita por F, pois f é derivável em (a, b). De (1), segue que $F(a) = 0$ e $F(b) = 0$. Portanto, também a condição (iii) do teorema de Rolle está satisfeita por F.

Da conclusão do teorema de Rolle, temos que existe um c no intervalo aberto (a, b), tal que $F'(c) = 0$. Mas

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Assim,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Logo, existe um número c em (a, b), tal que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

como queríamos demonstrar. ■

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$$

comprove que as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas para $a = 1$ e $b = 3$. Então, encontre todos os números c no intervalo aberto $(1, 3)$, tais que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

Solução Como f é uma função polinomial, ela será contínua e derivável para todos os valores de x. Logo, as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas para todo a e b.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$$

$$f(1) = -7 \quad \text{e} \quad f(3) = -27$$

Logo,

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-27 - (-7)}{2}$$

$$= -10$$

Equacionando $f'(c) = -10$, obtemos

$$3c^2 - 10c - 3 = -10$$

$$3c^2 - 10c + 7 = 0$$

$$(3c - 7)(c - 1) = 0$$

$$c = \tfrac{7}{3} \qquad c = 1$$

Como 1 não está no intervalo aberto $(1, 3)$, o único valor possível para c é $\frac{7}{3}$.

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x) = x^{2/3}$$

faça um esboço do gráfico de f. Mostre que não existe nenhum número c no intervalo aberto $(-2, 2)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$$

Que condição dentre as hipóteses do teorema do valor médio não está satisfeita para f quando $a = -2$ e $b = 2$?

Solução Um esboço do gráfico f aparece na Figura 6.

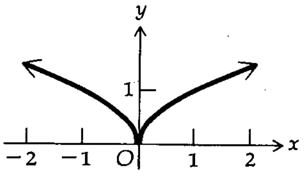


FIGURA 6

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$

Assim,

$$f'(c) = \frac{2}{3c^{1/3}}$$

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{4^{1/3} - 4^{1/3}}{4}$$

$$= 0$$

Não existe um número c para o qual $\dfrac{2}{3c^{1/3}} = 0$.

A função f é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$; contudo, f não é derivável no intervalo aberto $(-2, 2)$, pois $f'(0)$ não existe. Logo, a condição (ii) das hipóteses do teorema do valor médio não está satisfeita para f, quando $a = -2$ e $b = 2$.

Antes do enunciado do teorema do valor médio, indicamos que se trata de um dos mais importantes teoremas de cálculo, pois é usado na demonstração de muitos outros teoremas. Em tais casos, não é necessário encontrar o valor do número c garantido pelo teorema. O fato crucial do teorema é a existência do número c. Para indicar importância do teorema do valor médio, mostramos o seu uso na demonstração do teorema a seguir, que será necessário no Capítulo 5.

4.3.3 TEOREMA Se f for uma função tal que $f'(x) = 0$ para todos os valores de x num intervalo I, então f será constante em I.

Prova Suponha que f não seja constante no intervalo I. Então, existem dois números distintos, x_1 e x_2 em I, com $x_1 < x_2$, tais que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Como, por hipótese, $f'(x) = 0$ para todo x em I, então $f'(x) = 0$ para todo x no intervalo fechado $[x_1, x_2]$. Logo, f é derivável para todo x em $[x_1, x_2]$ e f é contínua em $[x_1, x_2]$. Portanto, a hipótese do teorema do valor médio está satisfeita, e então existe um número c, com $x_1 < c < x_2$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \tag{2}$$

Mas como $f'(x) = 0$ para todo x no intervalo $[x_1, x_2]$, então $f'(c) = 0$ e de (2) segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Mas supomos que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Temos, portanto, uma contradição e, assim sendo, f é constante em I. ■

Um outro teorema importante, em cuja demonstração é utilizado o teorema do valor médio, é o Teorema 4.4.3, dado na secção a seguir.

EXERCÍCIOS 4.3

Nos Exercícios de 1 a 4, comprove que as condições (i), (ii) e (iii) das hipóteses do teorema de Rolle estão satisfeitas pela função dada no intervalo indicado. Ache, então, um valor adequado de c que satisfaça a conclusão do teorema de Rolle.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $[1, 3]$
2. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$; $[1, 2]$
3. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$; $[0, \frac{1}{2}\pi]$
4. $f(x) = 3\cos^2 x$; $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$

Nos Exercícios de 5 a 10, comprove que as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas pela função dada no intervalo indicado. Ache, então, um valor adequado de c que satisfaça a conclusão do teorema do valor médio.

5. $f(x) = x^2 + 2x - 1$; $[0, 1]$
6. $f(x) = x^3 + x^2 - x$; $[-2, 1]$
7. $f(x) = x^{2/3}$; $[0, 1]$
8. $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$; $[0, \frac{1}{2}\pi]$
9. $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$; $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$
10. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7}$; $[2, 6]$

Nos Exercícios de 11 a 16, (a) faça um esboço do gráfico da função no intervalo indicado; (b) teste as três condições (i), (ii) e (iii) das hipóteses do teorema de Rolle e determine quais entre elas são satisfeitas; e (c) se as três condições de (b) forem satisfeitas, determine um ponto no qual existe uma reta tangente horizontal.

11. $f(x) = x^{4/3} - 3x^{1/3}$; $[0, 3]$
12. $f(x) = x^{3/4} - 2x^{1/4}$; $[0, 4]$
13. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 3}$; $[-3, 4]$
14. $f(x) = \begin{cases} 3x + 6 & \text{se } x < 1 \\ x - 4 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$; $[-2, 4]$
15. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 1 \\ 5x - 8 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$; $[-2, \frac{8}{5}]$
16. $f(x) = 1 - |x|$; $[-1, 1]$

A interpretação geométrica do teorema do valor médio é que para um valor adequado de c no intervalo aberto (a, b), a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Nos Exercícios de 17 a 20, ache um valor de c que satisfaça a conclusão do teorema do valor médio, faça um esboço do gráfico no intervalo fechado $[a, b]$ e coloque no gráfico as retas tangente e secante.

17. $f(x) = x^2$; $a = 3, b = 5$ **18.** $f(x) = x^2$; $a = 2, b = 4$

19. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $a = 0, b = \frac{1}{2}\pi$

20. $f(x) = 2\cos x$; $a = \frac{1}{3}\pi, b = \frac{2}{3}\pi$

Para cada uma das funções dos Exercícios de 21 a 24, não existe um número c no intervalo aberto (a, b) que satisfaça a conclusão do teorema do valor médio. Em cada exercício, determine qual das hipóteses do teorema do valor médio não é satisfeita. Faça um esboço do gráfico de $y = f(x)$ e da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

21. $f(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2}$; $a = 1, b = 6$

22. $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x-4}$; $a = 1, b = 2$

23. $f(x) = 3(x-4)^{2/3}$; $a = -4, b = 5$

24. $f(x) = \begin{Bmatrix} 2x+3 & \text{se } x < 3 \\ 15-2x & \text{se } 3 \leqslant x \end{Bmatrix}$; $a = -1, b = 5$

25. Se $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$, then $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$. Prove, pelo teorema de Rolle, que a equação a seguir tem pelo menos uma raiz real no intervalo aberto $(0, 1)$:

$$4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0.$$

26. Prove, pelo teorema de Rolle, que a equação $x^3 + 2x + c = 0$, onde c é qualquer constante, não pode ter mais do que uma raiz real.

27. Use o teorema de Rolle para provar que a equação

$$4x^5 + 3x^3 + 3x - 2 = 0$$

tem exatamente uma raiz no intervalo $(0, 1)$. (*Sugestão*: mostre primeiro que existe um número em $(0, 1)$ que é a raiz da equação. Então, suponha que exista mais de uma raiz da equação em $(0, 1)$ e mostre que isso leva a uma contradição.)

28. Suponha que $s = f(t)$ seja a equação do movimento de uma partícula sobre uma reta, onde f satisfaz as hipóteses do teorema do valor médio. Mostre que a conclusão do teorema do valor médio assegura que irá existir um certo instante em qualquer intervalo de tempo, no qual a velocidade instantânea será igual à velocidade média para aquele mesmo intervalo de tempo.

29. Se a equação do movimento do Exercício 28 for $s = t^2 - t + 4$ e $t \in [0, 3]$, ache o valor de t onde a velocidade instantânea é igual à velocidade média para o intervalo dado.

30. Se $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$, use o Teorema 4.3.3 para mostrar que $f(x) = 1$ para todo x em $[-2\pi, 2\pi]$.

31. Suponha que a função f seja contínua em $[a, b]$ e $f'(x) = 1$ para todo x em (a, b). Prove que $f(x) = x - a + f(a)$ para todo x em $[a, b]$.

32. O inverso do teorema de Rolle não é válido. Dê um exemplo de uma função para a qual a conclusão do teorema de Rolle é verdadeira e para a qual (a) a condição (i) não está satisfeita, mas as condições (ii) e (iii) estão; (b) a condição (ii) não está satisfeita, mas as condições (i) e (iii) estão; (c) a condição (iii) não está satisfeita, mas as condições (i) e (ii) estão. Faça um esboço do gráfico, mostrando a reta tangente horizontal em cada caso.

33. Use o teorema de Rolle para provar que se todo polinômio de quarto grau tiver no máximo quatro raízes reais, então todo polinômio do quinto grau terá no máximo cinco raízes reais. (*Sugestão*: suponha que um polinômio do quinto grau tenha seis raízes reais e mostre que isto leva a uma contradição.)

34. Use o método do Exercício 33 e a indução matemática para provar que um polinômio de grau n tem no máximo n raízes reais.

4.4 FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES E O TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA

A Figura 1 representa um esboço do gráfico de uma função f para todo x no intervalo fechado $[x_1, x_7]$. Neste esboço, estamos supondo que f seja contínua em $[x_1, x_7]$. A figura mostra que quando um ponto se move ao longo da curva de A para B, os valores funcionais aumentam quando as abscissas aumentam, e que quando um ponto se move ao longo da curva de B para C, os valores funcionais decrescem, enquanto que as abscissas crescem. Dizemos, então, que f é *crescente* no intervalo fechado $[x_1, x_2]$ e é *decrescente* no intervalo fechado $[x_2, x_3]$. Seguem as definições precisas de funções crescentes e decrescentes num intervalo.

4.4.1 DEFINIÇÃO

Uma função f definida num intervalo será **crescente** naquele intervalo, se e somente se

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{sempre que} \quad x_1 < x_2$$

onde x_1 e x_2 são quaisquer números no intervalo.

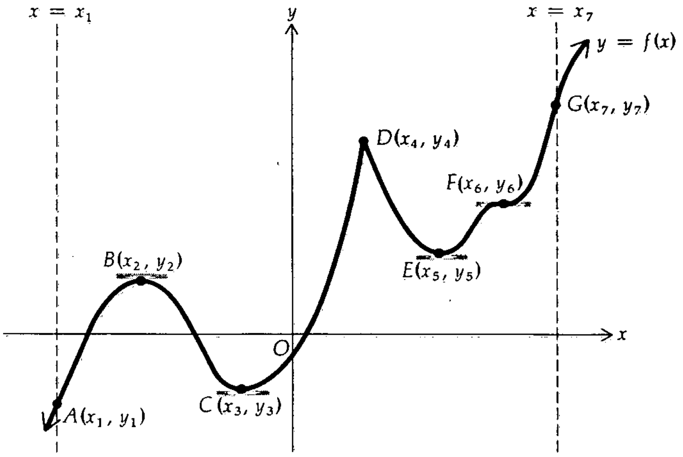


FIGURA 1

A funçao mostrada na Figura 1 é crescente nos seguintes intervalos fechados: $[x_1, x_2]$; $[x_3, x_4]$; $[x_5, x_6]$; $[x_6, x_7]$; $[x_5, x_7]$.

4.4.2 DEFINIÇÃO Uma função f definida num intervalo será **decrescente** naquele intervalo se e somente se

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{sempre que} \quad x_1 < x_2$$

onde x_1 e x_2 são quaisquer números no intervalo.

A função representada na Figura 1 é decrescente nos seguintes intervalos fechados: $[x_2, x_3]$; $[x_4, x_5]$.

Se uma função for crescente ou decrescente num dado intervalo, então dizemos que ela é **monótona** no intervalo.

Antes de enunciar um teorema que dá um teste para determinar se uma dada função é monótona* num intervalo, vejamos o que está acontecendo geometricamente. Consulte a Figura 1 e observe que quando a inclinação da reta tangente for positiva, a função será crescente e quando a inclinação da reta tangente for negativa, a função será decrescente. Como $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$, f é crescente quando $f'(x) > 0$ e decrescente quando $f'(x) < 0$. Também, como $f'(x)$ é a taxa de variação dos valores funcionais de $f(x)$ em relação a x, quando $f'(x) > 0$, os valores funcionais estão crescendo à medida que x cresce; e quando $f'(x) < 0$, os valores funcionais estão decrescendo à medida que x cresce.

4.4.3 TEOREMA Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b):

(i) se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f será crescente em $[a, b]$;
(ii) se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f será decrescente em $[a, b]$.

Prova de (i) Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $[a, b]$, tais que $x_1 < x_2$. Então, f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2). Do teorema do valor médio, segue que existe um número c em (x_1, x_2), tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

***N. do T.**: Em alguns textos da literatura matemática em língua portuguesa é empregada a palavra "*monotônica*" para esse significado.

Como $x_1 < x_2$, então $x_2 - x_1 > 0$. Também, por hipótese, $f'(c) > 0$. Logo, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, e assim $f(x_2) > f(x_1)$. Mostramos que $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, onde x_1 e x_2 são números quaisquer no intervalo $[a, b]$. Logo, pela Definição 4.4.1, segue que f é crescente em $[a, b]$.

A demonstração da parte (ii) é similar e será deixada como exercício (veja o Exercício 41). ■

Uma aplicação imediata do Teorema 4.4.3 é a demonstração do que conhecemos como **teste da derivada primeira para extremos relativos** de uma função.

4.4.4 TEOREMA
Teste da Derivada Primeira para Extremos Relativos

Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) contendo o número c e suponha que f' exista em todos os pontos de (a, b), exceto possivelmente em c:

(i) se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto tendo c como extremo direito, e se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto tendo c como extremo esquerdo, então f terá um valor máximo relativo em c;

(ii) se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto, tendo c como extremo direito, e se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto, tendo c como extremo esquerdo, então f terá um valor mínimo relativo em c.

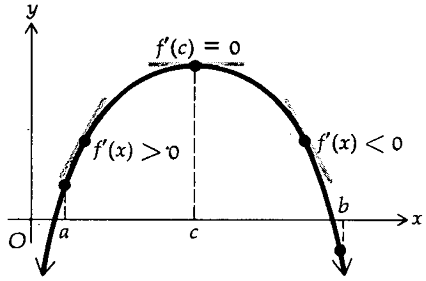


FIGURA 2

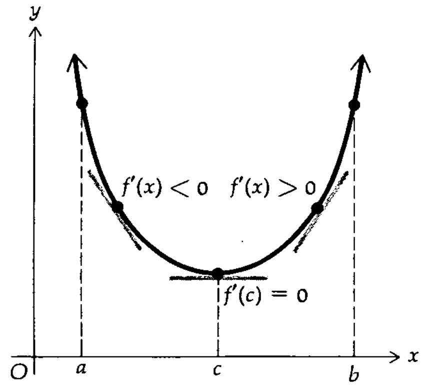


FIGURA 3

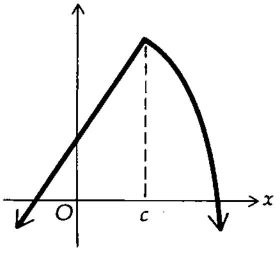


FIGURA 4

Prova de (i) Seja (d, c) (onde $d > a$) o intervalo tendo c como seu extremo direito, para o qual $f'(x) > 0$ para todo x no intervalo. Segue, do Teorema 4.4.3 (i), que f é crescente em $[d, c]$. Seja (c, e) (onde $e < b$) o intervalo tendo c como seu extremo esquerdo, para o qual $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo. Pelo Teorema 4.4.3 (ii), f é decrescente em $[c, e]$. Como f é crescente em $[d, c]$, segue da Definição 4.4.1 que se x_1 está em $[d, c]$ e $x_1 \neq c$, então $f(x_1) < f(c)$. Também, como f é decrescente em $[c, e]$, segue da Definição 4.4.2 que se x_2 está em $[c, e]$ e $x_2 \neq c$, então $f(c) > f(x_2)$. Logo, da Definição 4.1.1, f tem um valor máximo relativo em c.

A demonstração da parte (ii) é similar à demonstração da parte (i) e será deixada como um exercício (veja o Exercício 42). ■

O teste da derivada primeira para extremos relativos estabelece essencialmente que se f for contínua em c e $f'(x)$ mudar o sinal algébrico de positivo para negativo quando x cresce através de c, então f terá um valor máximo relativo em c, e se $f'(x)$ mudar o sinal algébrico de negativo para positivo enquanto x cresce através de c, então f terá um valor mínimo relativo em c.

As Figuras 2 e 3 ilustram as partes (i) e (ii), respectivamente, do Teorema 4.4.4, quando $f'(c)$ existe. A Figura 4 mostra um esboço do gráfico de uma função f que tem um valor máximo relativo num número c, mas $f'(c)$ não existe; contudo, $f'(x) > 0$ quando $x < c$ e $f'(x) < 0$ quando $x > c$. Na Figura 5 há um esboço do gráfico de uma função f para a qual c é um número crítico e $f'(x) < 0$ quando $x < c$ e $f'(x) < 0$ quando $x > c$; f não tem um extremo relativo em c.

As demais ilustrações do Teorema 4.4.4 aparecem na Figura 1. Em x_2 e x_4, a função tem um valor máximo relativo e em x_3 e x_5, a função tem um valor mínimo relativo; mesmo que x_6 seja um número crítico para a função, não há extremo relativo em x_6.

Em suma, para determinar os extremos relativos de f:

1. Ache $f'(x)$.
2. Ache os números críticos de f, isto é, os valores de x para os quais $f'(x) = 0$, ou para os quais $f'(x)$ não existe.
3. Aplique o teste da derivada primeira (Teorema 4.4.4).

Os exemplos a seguir ilustram esse procedimento.

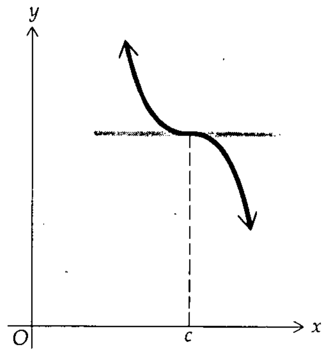


FIGURA 5

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

ache os extremos relativos de f, aplicando o teste da derivada primeira. Determine os valores de x nos quais ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

Solução

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$f'(x)$ existe para todos os valores de x. Equacione $f'(x) = 0$.

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 3 \qquad x = 1$$

Assim, os números críticos de f são 1 e 3. Para determinar se f tem um extremo relativo nesses números, aplicamos o teste da derivada primeira. Os resultados são resumidos na Tabela 1.

Tabela 1

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusão*
$x < 1$		$+$	f é crescente
$x = 1$	5	0	f tem um valor máximo relativo
$1 < x < 3$		$-$	f é decrescente
$x = 3$	1	0	f tem um valor mínimo relativo
$3 < x$		$+$	f é crescente

Segundo a tabela, 5 é um valor máximo relativo de f ocorrendo em $x = 1$, e 1 é um valor mínimo relativo de f, ocorrendo em $x = 3$. Um esboço do gráfico está na Figura 6.

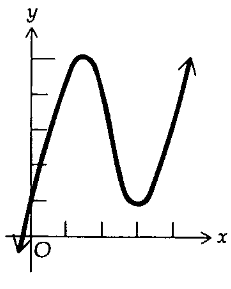


FIGURA 6

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 3 \\ 8 - x & \text{se } 3 \leqslant x \end{cases}$$

ache os extremos relativos de f, aplicando o teste da derivada primeira. Determine os valores de x onde ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

Solução Se $x < 3$, $f'(x) = 2x$. Se $x > 3$, $f'(x) = -1$. Como $f'_{-}(3) = 6$ e $f'_{+}(3) = -1$, $f'(3)$ não existe. Logo, 3 é um número crítico de f.

Como $f'(x) = 0$ se $x = 0$, segue que 0 é um número crítico de f. Aplicando o teste da derivada primeira, resumimos os resultados na Tabela 2. Um esboço do gráfico está na Figura 7.

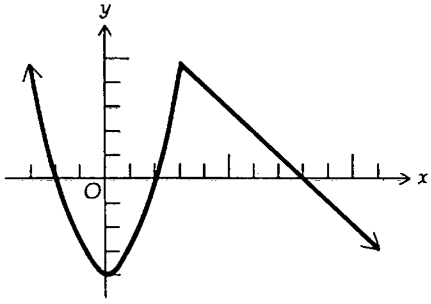


FIGURA 7

Tabela 2

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusão*
$x < 0$		$-$	f é decrescente
$x = 0$	-4	0	f tem um valor mínimo relativo
$0 < x < 3$		$+$	f é crescente
$x = 3$	5	não existe	f tem um valor máximo relativo
$3 < x$		$-$	f é decrescente

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

ache os extremos relativos de f, determine os valores de x onde ocorrem extremos relativos e determine os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

Solução

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x + 1) \end{aligned}$$

Como $f'(x)$ não existe quando $x = 0$ e $f'(x) = 0$ quando $x = -1$, os números críticos de f são -1 e 0. Vamos aplicar o teste da derivada primeira, cujos resultados estão resumidos na Tabela 3. Um esboço do gráfico está na Figura 8.

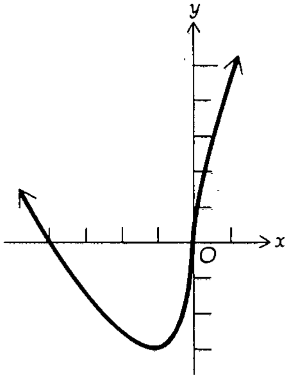


FIGURA 8

Tabela 3

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusão*
$x < -1$		$-$	f é decrescente
$x = -1$	-3	0	f tem um valor mínimo relativo
$-1 < x < 0$		$+$	f é crescente
$x = 0$	0	não existe	f não tem um extremo relativo em $x = 0$
$0 < x$		$+$	f é crescente

EXERCÍCIOS 4.4

Nos Exercícios de 1 a 40, faça o seguinte: (a) ache os extremos relativos de f pelo teste da derivada primeira; (b) determine os valores de x nos quais os extremos relativos ocorrem; (c) determine os intervalos nos quais f é crescente; (d) determine os intervalos nos quais f é decrescente; (e) faça um esboço do gráfico.

1. $f(x) = x^2 - 4x - 1$
2. $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$
3. $f(x) = x^3 - x^2 - x$
4. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$
5. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$
6. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
7. $f(x) = 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$
8. $f(x) = x^4 + 4x$
9. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$
10. $f(x) = 2 \cos 3x$
11. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 1$
12. $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x - 2$
13. $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
14. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$
15. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$
16. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2x}$
17. $f(x) = (1 - x)^2(1 + x)^3$
18. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^2$
19. $f(x) = 2x\sqrt{3 - x}$
20. $f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$
21. $f(x) = x - 3x^{1/3}$
22. $f(x) = 4x - 6x^{2/3}$
23. $f(x) = 2 - 3(x - 4)^{2/3}$
24. $f(x) = 2 - (x - 1)^{1/3}$
25. $f(x) = x^{2/3} - x^{1/3}$
26. $f(x) = 3 \operatorname{cosec} 2x$
27. $f(x) = \frac{1}{2} \sec 4x$
28. $f(x) = x^{2/3}(x - 1)^2$

29. $f(x) = (x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3}$ **30.** $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x & \text{se } x < 3 \\ 3x - 10 & \text{se } 3 \leqslant x \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} 2x + 9 & \text{se } x \leqslant -2 \\ x^2 + 1 & \text{se } -2 < x \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - (x+7)^2} & \text{se } -12 \leqslant x \leqslant -3 \\ 12 - x^2 & \text{se } -3 < x \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{se } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{se } -1 \leqslant x < 2 \\ 7 - x & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 4 - (x+5)^2 & \text{se } x < -4 \\ 12 - (x+1)^2 & \text{se } -4 \leqslant x \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} (x+9)^2 - 8 & \text{se } x < -7 \\ -\sqrt{25 - (x+4)^2} & \text{se } -7 \leqslant x \leqslant 0 \\ (x-2)^2 - 7 & \text{se } 0 < x \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} 12 - (x+5)^2 & \text{se } x \leqslant -3 \\ 5 - x & \text{se } -3 < x \leqslant -1 \\ \sqrt{100 - (x-7)^2} & \text{se } -1 < x \leqslant 17 \end{cases}$

37. $f(x) = x^{5/4} + 10x^{1/4}$ **38.** $f(x) = (x - a)^{2/5} + 1$

39. $f(x) = x^{1/3}(x+4)^{-2/3}$ **40.** $f(x) = x^{5/3} - 10x^{2/3}$

41. Prove o Teorema 4.4.3(ii) **42.** Prove o Teorema 4.4.4(ii)

43. Ache a e b, tais que a função definida por

$$f(x) = x^3 + ax^2 + \mathrm{b}$$

tenha um extremo relativo em (2, 3).

44. Ache a, b e c, tais que a função definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

tenha um valor máximo relativo de 7 em 1, e que o gráfico de $y = f(x)$ passe pelo ponto $(2, -2)$.

45. Ache a, b, c e d, de tal forma que a função definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenha extremos relativos em (1, 2) e (2, 3).

46. Dado que a função f é contínua para todos os valores de x, $f(3) = 2$, $f'(x) < 0$ se $x < 3$ e $f'(x) > 0$ se $x > 3$, faça um esboço de um possível gráfico de f em cada um dos seguintes casos, onde forem satisfeitas as condições adicionais: (a) f' é contínua em 3; (b) $f'(x) = -1$, se $x > 3$, e $f'(x) = 1$, se $x > 3$; (c) $\lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = 1$ e $f'(a) \neq f'(b)$, se $a \neq b$.

47. Dada $f(x) = x^p(1 - x)^q$, onde p e q são inteiros positivos maiores do que 1, prove cada uma das seguintes afirmativas: (a) se p for par, f terá um valor mínimo relativo em 0; (b) se q for par, f terá um valor mínimo relativo em 1; (c) f terá um valor máximo relativo em $p/(p + q)$, se p e q forem pares ou ímpares.

48. A função f é derivável no intervalo fechado $[a, b]$. Prove que se $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, então existirá um número c no intervalo aberto (a, b), tal que $f'(c) = 0$.

49. Se $f(x) = x^k$, onde k é um inteiro positivo ímpar, prove que f não tem extremos relativos.

50. Prove que se f for crescente em $[a, b]$ e se g for crescente em $[f(a), f(b)]$, então, se $g \circ f$ existir em $[a, b]$, $g \circ f$ será crescente em $[a, b]$.

51. A função f é crescente no intervalo I. Prove que (a) se $g(x) = -f(x)$, então g será decrescente em I; (b) se $h(x) = 1/f(x)$ e $f(x) > 0$ em I, então h será decrescente em I.

4.5 CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO

A Figura 1 mostra um esboço do gráfico de uma função f cujas derivadas primeira e segunda existem no intervalo fechado $[x_1, x_7]$. Como ambas f e f' são diferenciáveis nele, f e f' são contínuas em $[x_1, x_7]$.

Se considerarmos um ponto movendo-se ao longo do gráfico da Figura 1, de A para G, então a posição de P irá variar quando x crescer de x_1 até x_7. Quando P move-se ao longo do gráfico, de A para B, a inclinação da reta tangente ao gráfico é positiva e decrescente; isto é, a reta tangente está girando no sentido horário, e o gráfico está abaixo da reta tangente. Quando o ponto P está em B, a inclinação da reta tangente é zero e ainda é decrescente. Quando P move-se ao longo do gráfico, de B para C, a inclinação da reta tangente é

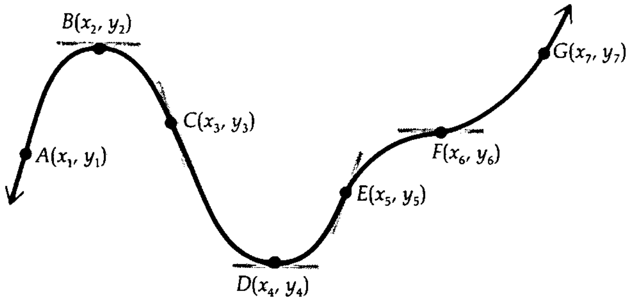


FIGURA 1

negativa e ainda é decrescente, a reta tangente ainda está girando no sentido horário e o gráfico está abaixo da reta tangente. Dizemos que o gráfico é *côncavo para baixo*, de A até C. Quando P se move ao longo do gráfico, de C para D, a inclinação da reta tangente é negativa e crescente; isto é, a reta tangente está girando no sentido anti-horário e o gráfico está acima de sua reta tangente. Em D, a inclinação da reta tangente é zero e ainda está crescendo. De D para E, a inclinação da reta tangente é positiva e crescente; a reta tangente continua girando no sentido anti-horário, e o gráfico está acima de sua reta tangente. Dizemos que o gráfico é *côncavo para cima* de C até E. O gráfico côncavo para baixo passa a ser côncavo para cima no ponto C, o qual é chamado de *ponto de inflexão*. Temos as seguintes definições:

4.5.1 DEFINIÇÃO

O gráfico de uma função f será **côncavo para cima** no ponto $(c, f(c))$ se $f'(c)$ existir e se houver um intervalo aberto I contendo c, tal que para todos os valores de $x \neq c$ em I, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico estará acima da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.

4.5.2 DEFINIÇÃO

O gráfico de uma função f será **côncavo para baixo** no ponto $(c, f(c))$, se $f'(c)$ existir e se houver um intervalo aberto I contendo c, tal que para todos os valores de $x \neq c$ em I, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico estará abaixo da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.

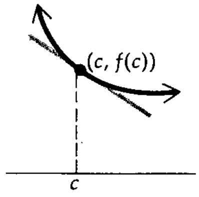


FIGURA 2

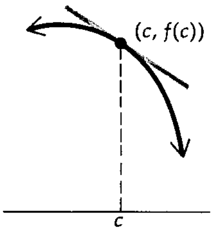


FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A Figura 2 mostra o esboço de parte do gráfico de uma função f que é côncava para cima no ponto $(c, f(c))$ e a Figura 3 mostra o esboço de parte do gráfico de uma função f que é côncava para baixo no ponto $(c, f(c))$. ◀

O gráfico da função f mostrado na Figura 1 é côncavo para baixo em todos os pontos $(x, f(x))$ para os quais x está num dos seguintes intervalos abertos: (x_1, x_3) ou (x_5, x_6). Da mesma forma, para x num dos intervalos abertos (x_3, x_5) ou (x_6, x_7), o gráfico da função f, na Figura 1, é côncavo para cima.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se f for a função definida por $f(x) = x^2$, então $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$. Assim, $f''(x) > 0$ para todo x. Além disso, o gráfico de f, na Figura 4, está acima de suas retas tangentes. Então, o gráfico de f é côncavo para cima, em todos os seus pontos.

Se g for a função definida por $g(x) = -x^2$, então $g'(x) = -2x$ e $g''(x) = -2$. Logo, $g''(x) < 0$ para todo x. Também, o gráfico de g, na Figura 5, está abaixo de suas retas tangentes. Logo, o gráfico de g é côncavo para baixo em todos os seus pontos. ◀

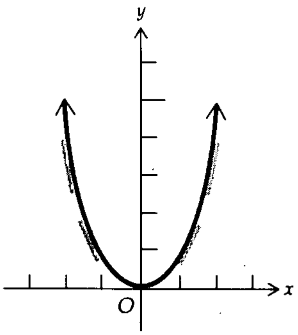


FIGURA 4

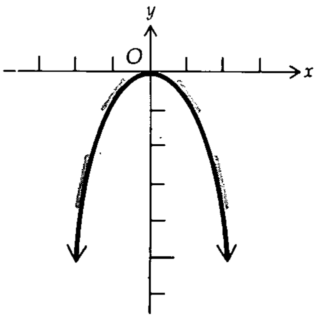


FIGURA 5

A função f da Ilustração 2 é tal que $f''(x) > 0$ para todo x, e o gráfico de f é côncavo para cima em toda parte. Para a função g da Ilustração 2, $g''(x) < 0$ para todo x, e o gráfico de g é côncavo para baixo em toda parte. Essas duas situações são casos especiais do teorema a seguir.

4.5.3 TEOREMA Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c. Então,

(i) se $f''(c) > 0$, o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f(c))$;
(ii) se $f''(c) < 0$, o gráfico de f é côncavo para baixo em $(c, f(c))$.

Prova de (i)

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$$

Como $f''(c) > 0$,

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

Então, pelo Teorema 2.10.1, existe um intervalo aberto I contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \qquad (1)$$

para todo $x \neq c$ em I.

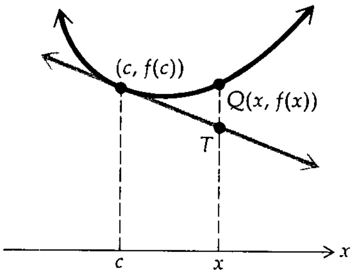


FIGURA 6

Consideremos agora a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$. Uma equação da reta tangente é

$$y = f(c) + f'(c)(x - c) \qquad (2)$$

Seja x um número no intervalo I tal que $x \neq c$, e seja Q o ponto do gráfico de f cuja abscissa é x. Através de Q traçamos uma reta paralela ao eixo y e seja T o ponto de intersecção dessa reta com a reta tangente (veja a Figura 6).

Para provar que o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f(c))$, precisamos mostrar que o ponto Q está acima do ponto T ou, equivalentemente, que a distância orientada $\overline{TQ} > 0$ para todos os valores de $x \neq c$ em I. $\overline{TQ}$ é igual à ordenada de Q menos a ordenada de T. A ordenada de Q é $f(x)$ e a de T é obtida de (2); assim,

$$\overline{TQ} = f(x) - [f(c) + f'(c)(x - c)]$$
$$\overline{TQ} = [f(x) - f(c)] - f'(c)(x - c) \qquad (3)$$

Do teorema do valor médio, existe algum número d entre x e c, tal que

$$f'(d) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Isto é,

$$f(x) - f(c) = f'(d)(x - c) \qquad \text{para algum } d \text{ entre } x \text{ e } c$$

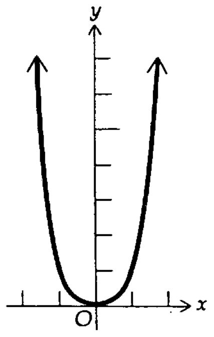


FIGURA 7

Substituindo essa igualdade em (3), temos

$$\overline{TQ} = f'(d)(x - c) - f'(c)(x - c)$$

$$\overline{TQ} = (x - c)[f'(d) - f'(c)] \tag{4}$$

Como d está entre x e c, d está no intervalo I, e assim, tomando $x = d$ na desigualdade (1), obtemos

$$\frac{f'(d) - f'(c)}{d - c} > 0 \tag{5}$$

Para provar que $\overline{TQ} > 0$, vamos mostrar que ambos os fatores à direita de (4) têm o mesmo sinal. Se $x - c > 0$, então $x > c$. E como d está entre x e c, então $d > c$; logo, da desigualdade (5), $f'(d) - f'(c) > 0$. Se $x - c < 0$, então $x < c$ e assim $d < c$; portanto, de (5), $f'(d) - f'(c) < 0$. Concluímos que $x - c$ e $f'(d) - f'(c)$ têm o mesmo sinal; logo, $\overline{TQ}$ é um número positivo. Assim, o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f(c))$.

A prova da parte (ii) é similar e será omitida. ■

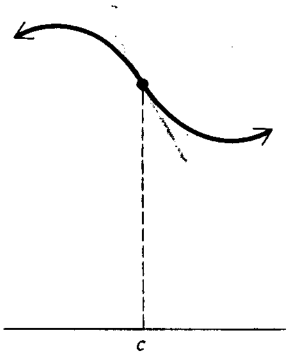


FIGURA 8

O inverso do Teorema 4.5.3 não é verdadeiro. Por exemplo, se f for a função definida por $f(x) = x^4$, o gráfico de f será côncavo para cima no ponto (0, 0) mas $f''(0) = 0$ pois $f''(x) = 12x^2$ (veja a Figura 7). Assim sendo, uma condição suficiente para que o gráfico de uma função f seja côncavo para cima no ponto $(c, f(c))$ é que $f''(c) > 0$, mas a condição não é necessária. Analogamente, uma condição suficiente — mas não necessária — para que o gráfico de uma função f seja côncavo para baixo no ponto $(c, f(c))$ é que $f''(c) < 0$.

Se existe no gráfico de uma função um ponto no qual o sentido da concavidade muda, havendo aí uma reta tangente ao gráfico, então o gráfico da função cruzará sua reta tangente nesse ponto, conforme mostram as Figuras 8, 9 e 10. Tal ponto é chamado *ponto de inflexão*.

4.5.4 DEFINIÇÃO

O ponto $(c, f(c))$ será um **ponto de inflexão** do gráfico da função f se o gráfico tiver nele uma reta tangente e se existir um intervalo aberto I contendo c, tal que se x estiver em I, então

(i) $f''(x) < 0$ se $x < c$ e $f''(x) > 0$ se $x > c$, ou
(ii) $f''(x) > 0$ se $x < c$ e $f''(x) < 0$ se $x > c$.

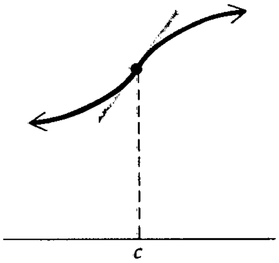


FIGURA 9

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** A Figura 8 ilustra um ponto de inflexão onde verificamos a condição (i) da Definição 4.5.4; neste caso, o gráfico é côncavo para baixo em pontos imediatamente à esquerda do ponto de inflexão e côncavo para cima em pontos imediatamente à sua direita. A condição (ii) está ilustrada na Figura 9, onde o sentido da concavidade muda de cima para baixo no ponto de inflexão. A Figura 10 é outra ilustração da condição (i), onde o sentido da concavidade muda de baixo para cima no ponto de inflexão. Note que na Figura 10 há uma reta tangente horizontal no ponto de inflexão. ◀

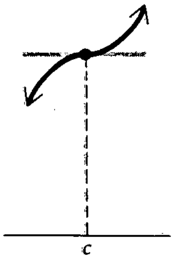


FIGURA 10

No gráfico da Figura 1 há pontos de inflexão em C, E e F.

A parte crucial da Definição 4.5.4 é que o gráfico deve ter uma reta tangente no ponto de inflexão. Considere, por exemplo, a função do Exemplo 3, da Secção 2.3. Ela é definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2 + x^2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

Um esboço do gráfico de h está na Figura 11. Observe que $h''(x) = -2$ se $x < 1$ e $h''(x) = 2$ se $x > 1$. Assim, no ponto (1, 3) do gráfico, o sentido da concavidade muda de baixo para cima. No entanto, (1, 3) não é um ponto de inflexão, pois o gráfico não tem uma reta tangente ali.

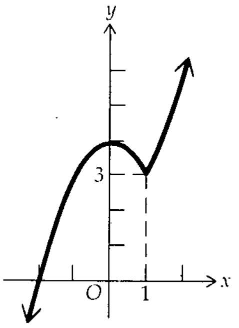


FIGURA 11

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Suponha que tenha sido estimado que t horas após ter começado a trabalhar às 7 da manhã, um operário de uma linha de montagem tenha concluído determinada tarefa em $f(t)$ unidades, e

$$f(t) = 21t + 9t^2 - t^3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 5$$

Na Tabela 1 estão os valores funcionais para valores inteiros de t de 1 até 5, e um esboço do gráfico de f em [0, 5] está na Figura 12.

Tabela 1

t	1	2	3	4	5
$f(t)$	29	70	117	164	205

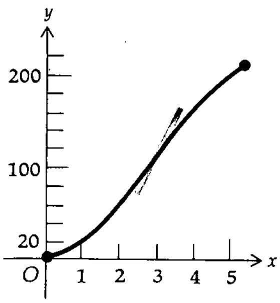


FIGURA 12

$$f'(t) = 21 + 18t - 3t^2 \qquad f''(t) = 18 - 6t$$
$$= 6(3 - t)$$

Observe que $f''(t) > 0$ se $0 < t < 3$ e $f''(t) < 0$ se $3 < t < 5$. Da Definição 4.5.4 (ii) segue que o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $t = 3$. Do Teorema 4.4.3, como $f''(t) > 0$ quando $0 < t < 3$, $f'(t)$ é crescente em [0, 3] e como $f''(t) < 0$ quando $3 < t < 5$, $f'(t)$ é decrescente em [3, 5]. Logo, como $f'(t)$ é a taxa de variação de $f(t)$ em relação a t, concluímos que nas primeiras três horas (de 7 às 10 h da manhã) o operário executa sua tarefa numa taxa crescente e durante as duas horas restantes (de 10 até meio dia), o operário executa a tarefa numa taxa decrescente. Em $t = 3$ (10 h da manhã), o operário está produzindo com maior eficiência, e quando $3 < t < 5$ (após as 10 h), há uma redução em sua taxa de produção. O ponto no qual o operário está produzindo com maior eficiência é chamado de *ponto de diminuição do retorno*; é um ponto de inflexão do gráfico de f. ◀

A Definição 4.5.4 não indica nada sobre o valor da derivada segunda de f num ponto de inflexão. O teorema a seguir estabelece que se a derivada segunda existir num ponto de inflexão, ela deverá ser zero nele.

4.5.5 TEOREMA Se a função f for derivável em algum intervalo aberto contendo c e se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f, então, se $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$.

Prova Seja g a função tal que $g(x) = f'(x)$; então $g'(x) = f''(x)$. Como $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f, então $f''(x)$ muda de sinal em c e assim $g'(x)$ muda de sinal em c. Logo, pelo teste da derivada primeira (Teorema 4.4.4), g tem um extremo relativo em c, e c é um número crítico de g. Como $g'(c) = f''(c)$ e como por hipótese $f''(c)$ existe, segue que $g'(c)$ existe. Logo, pelo Teorema 4.1.3, $g'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, como queríamos provar. ■

O inverso do Teorema 4.5.5 não é verdadeiro. Isto é, se a derivada segunda de uma função for nula num número c, o gráfico da função não terá, necessariamente, um ponto de inflexão em $x = c$. Esse fato é o que mostra a ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Considere a função f definida por $f(x) = x^4$. Um esboço do gráfico de f está na Figura 7.

$$f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2$$

Observe que $f''(0) = 0$; mas, como $f''(x) > 0$ se $x < 0$, e $f''(x) > 0$ se $x > 0$, o gráfico é côncavo para cima em pontos imediatamente à esquerda e à direita de (0, 0). Conseqüentemente, (0, 0) não é um ponto de inflexão. ◀

EXEMPLO 1 A função do Exemplo 1 da Secção 4.4 é definida por

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Ache o ponto de inflexão do gráfico de f e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico e mostre um segmento da tangente no ponto de inflexão.

Solução

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \qquad f''(x) = 6x - 12$$

$f''(x)$ existe para todos os valores de x; assim sendo, o único ponto de inflexão possível é onde $f''(x) = 0$, o que ocorre em $x = 2$. Para determinar se existe ou não um ponto de inflexão em $x = 2$, precisamos verificar se $f''(x)$ muda de sinal; ao mesmo tempo, determinamos a concavidade do gráfico para os respectivos intervalos. Os resultados estão resumidos na Tabela 2.

Tabela 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < 2$			$-$	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 2$	3	-3	0	o gráfico tem um ponto de inflexão
$2 < x$			$+$	o gráfico é côncavo para cima

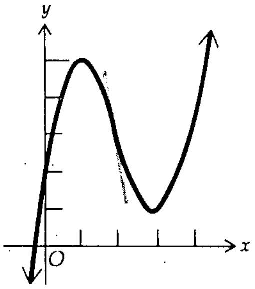


FIGURA 13

No Exemplo 1 da Secção 4.4, mostramos que f tem um valor máximo relativo em 1 e um valor mínimo relativo em 3. Um esboço do gráfico mostrando um segmento da tangente encontra-se na Figura 13.

O gráfico de uma função pode ter um ponto de inflexão onde a derivada segunda não exista. Isso será ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x) = x^{1/3}$$

ache o ponto de inflexão do gráfico de f e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde ele é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico.

Solução

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3}$$

Nem $f'(0)$, nem $f''(0)$ existem. Na Ilustração 3 da Secção 3.2, mostramos que o eixo y é a reta tangente ao gráfico dessa função em (0, 0). Além disso,

$$f''(x) > 0 \text{ se } x < 0 \quad \text{e} \quad f''(x) < 0 \text{ se } x > 0$$

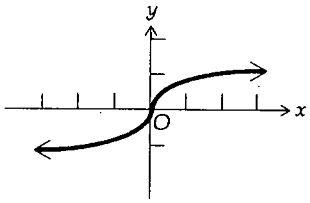


FIGURA 14

Logo, da Definição 4.5.4 (ii), f tem um ponto de inflexão em (0, 0). A concavidade do gráfico é determinada pelo sinal de $f''(x)$. Os resultados estão resumidos na Tabela 3.

Um esboço do gráfico de f está na Figura 14.

Tabela 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < 0$		$+$	$+$	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 0$	0	não existe	não existe	o gráfico tem um ponto de inflexão
$0 < x$		$+$	$-$	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo

EXEMPLO 3 Se

$$f(x) = (1 - 2x)^3$$

ache o ponto de inflexão do gráfico de f e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde ele é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico de f.

Solução

$$f'(x) = -6(1 - 2x)^2 \qquad f''(x) = 24(1 - 2x)$$

Como $f''(x)$ existe para todos os valores de x, o único ponto de inflexão possível é onde $f''(x) = 0$, isto é, em $x = \frac{1}{2}$. Os resultados estão resumidos na Tabela 4: $f''(x)$ muda de sinal de $+$ para $-$ em $x = \frac{1}{2}$; assim, o gráfico tem um ponto de inflexão ali. Note também que como $f'(\frac{1}{2}) = 0$, o gráfico tem uma reta tangente horizontal no ponto de inflexão. Um esboço do gráfico está na Figura 15.

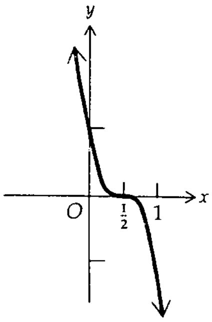


FIGURA 15

Tabela 4

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < \frac{1}{2}$			$+$	o gráfico é côncavo para cima
$x = \frac{1}{2}$	0	0	0	o gráfico tem um ponto de inflexão
$\frac{1}{2} < x$			$-$	o gráfico é côncavo para baixo

EXEMPLO 4 Ache os pontos de inflexão do gráfico da função seno. Ache também as inclinações das tangentes nos pontos de inflexão. Faça o gráfico da função seno num intervalo de 2π de comprimento, contendo o ponto de inflexão com menor abscissa positiva. Mostre um segmento da tangente nesse ponto de inflexão.

Solução Seja

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

Então,

$$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\operatorname{sen} x$$

$f''(x)$ existe para todo x. Para determinar os pontos de inflexão, equacionamos $f''(x) = 0$.

$$-\operatorname{sen} x = 0$$

$$x = k\pi \qquad k \text{ é um inteiro qualquer}$$

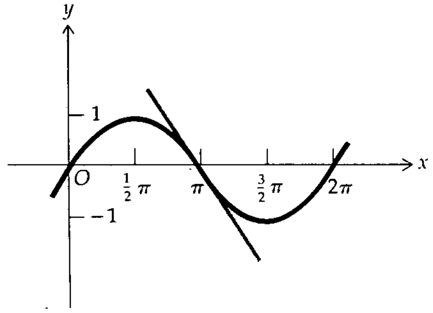


FIGURA 16

Como $f''(x)$ muda de sinal em cada um desses valores de x, o gráfico tem um ponto de inflexão em todos os pontos com essas abscissas. Em cada ponto de inflexão,

$$f'(k\pi) = \cos k\pi \qquad k \text{ é um inteiro qualquer}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ for um inteiro par} \\ -1 & \text{se } k \text{ for um inteiro ímpar} \end{cases}$$

Logo, as inclinações das tangentes nos pontos de inflexão são $+1$ ou -1. A Figura 16 mostra o gráfico da função seno no intervalo $[0, 2\pi]$. No ponto de inflexão $(\pi, 0)$ vê-se um segmento da reta tangente.

EXERCÍCIOS 4.5

Nos Exercícios de 1 a 16, encontre os pontos de inflexão do gráfico da função dada, se existirem. Determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde ele é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico e mostre um segmento da reta tangente ao gráfico nos pontos de inflexão.

1. $f(x) = x^3 + 9x$
2. $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 3$
3. $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$
4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 20$
5. $F(x) = x^4 - 8x^3$
6. $f(x) = x^4 - 2x^3$
7. $g(x) = (x - 1)^3$
8. $G(x) = (x + 2)^3$
9. $f(x) = (x + 2)^{1/3}$
10. $g(x) = (x - 1)^{1/3}$
11. $G(x) = \dfrac{2}{x^2 + 3}$
12. $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$
13. $g(x) = 2 \operatorname{sen} 3x;\ x \in [-\pi, \pi]$
14. $f(x) = 3 \cos 2x;\ x \in [-\pi, \pi]$
15. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x;\ x \in (-\pi, \pi)$
16. $g(x) = \operatorname{cotg} 2x;\ x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$

Nos Exercícios de 17 a 24, ache o ponto de inflexão do gráfico da função dada, se existir. Determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde ele é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico.

17. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 7 - x^2 & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$
18. $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 4 - x^2 & \text{se } 1 < x \end{cases}$
19. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 < x \end{cases}$
20. $g(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{se } x < 0 \\ x^3 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$
21. $F(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x < 0 \\ x^4 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$
22. $G(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^4 & \text{se } 0 < x \end{cases}$
23. $f(x) = (x - 2)^{1/5} + 3$
24. $g(x) = (2x - 6)^{3/2} + 1$

25. Se $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine a e b, de forma que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1, 2)$.

26. Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determine a, b e c, de forma que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1, 2)$ e que a inclinação da reta tangente no ponto de inflexão seja -2.

27. Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determine a, b, c e d, de forma que f tenha um extremo relativo em $(0, 3)$ e que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1, -1)$.

28. Se $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, determine os valores de a, b, c, d e e, de forma que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1, -1)$, passe pela origem e seja simétrico com respeito ao eixo y.

Nos Exercícios de 29 a 31, (a) ache os pontos de inflexão do gráfico da função trigonométrica dada; (b) ache a inclinação das retas tangentes nos pontos de inflexão; (c) faça um esboço do gráfico da função num intervalo de 2π de comprimento e contendo o ponto de inflexão com menor abscissa positiva, e mostre um segmento da reta tangente nesse ponto de inflexão.

29. A função co-seno
30. A função tangente
31. A função co-tangente
32. Prove que os gráficos das funções secante e co-secante não têm pontos de inflexão.

Nos Exercícios de 33 a 46, esboçe parte do gráfico de uma função f contendo o ponto onde x = c, se as condições dadas estiverem satisfeitas. Suponha que f seja contínua em algum intervalo aberto contendo c.

33. $f'(x) > 0$ se $x < c$; $f'(x) < 0$ se $x > c$; $f''(x) < 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $x > c$
34. $f'(x) > 0$ se $x < c$; $f'(x) > 0$ se $x > c$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $x > c$
35. $f'(x) > 0$ se $x < c$; $f'(x) < 0$ se $x > c$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$
36. $f'(x) < 0$ se $x < c$; $f'(x) > 0$ se $x > c$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $x > c$
37. $f''(c) = 0$; $f'(c) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $x > c$
38. $f'(c) = 0$; $f'(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$
39. $f''(c) = 0$; $f'(c) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$
40. $f'(c) = 0$; $f'(x) < 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$
41. $f''(c) = 0$; $f'(c) = -1$; $f''(x) < 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$
42. $f''(c) = 0$; $f'(c) = \frac{1}{2}$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $x > c$
43. $f'(c)$ não existe; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$
44. $f'(c)$ não existe; $f''(c)$ não existe; $f''(x) < 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$

45. $\lim\limits_{x\to c^-} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to c^+} f'(x) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $x > c$

46. $\lim\limits_{x\to c^-} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to c^+} f'(x) = -\infty$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $x > c$

47. Faça um esboço do gráfico de uma função f para a qual $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ existem e são positivas para todo x.

48. Faça um esboço do gráfico de uma função f para a qual $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ existem e são negativas para todo x.

49. Se $f(x) = x^5$, mostre que 0 é um número crítico de f, mas que $f(0)$ não é um extremo relativo. A origem é um ponto de inflexão do gráfico de f? Prove sua resposta.

50. Se $f(x) = 3x^2 + x|x|$, prove que $f''(0)$ não existe, mas o gráfico de f é côncavo para cima em toda parte.

51. Estima-se que um operário de uma oficina que fabrica molduras para quadros possa pintar y molduras, x horas após ter começado a trabalhar às 8 da manhã, e

$$y = 3x + 8x^2 - x^3 \quad 0 \leqslant x \leqslant 4$$

Ache o momento em que o operário está trabalhando mais eficientemente (isto é, em que instante ele atinge o ponto de diminuição do retorno?). (*Sugestão:* veja a Ilustração 4.)

52. Desenhe um esboço do gráfico da equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. (*Sugestão*: o gráfico não é aquele de uma função. Entretanto, a parte no primeiro quadrante é o gráfico de uma função. Obtenha essa porção e então complete o gráfico por propriedades de simetria. A concavidade desempenha um papel importante.)

4.6 O TESTE DA DERIVADA SEGUNDA PARA EXTREMOS RELATIVOS

Na Secção 4.4, você aprendeu como determinar se uma função f tem um valor máximo ou mínimo relativo num número crítico c, verificando o sinal algébrico de f' em números contidos em intervalos à direita e à esquerda de c. Outro teste para extremos relativos envolve somente o número crítico c. Antes de enunciá-lo na forma de teorema, vamos apresentar uma discussão geométrica informal que deverá apelar para sua intuição.

Suponhamos que f seja uma função, tal que f' e f'' existam em algum intervalo aberto (a, b) contendo c e que $f'(c) = 0$. Suponhamos também, que f'' seja negativa em (a, b). Do Teorema 4.4.3 (ii), como $f''(x) < 0$ em (a, b), então f' será decrescente em $[a, b]$. Como o valor de f' num ponto do gráfico de f dá a inclinação da reta tangente no ponto, segue que a inclinação da reta é decrescente em $[a, b]$. Na Figura 1 há um esboço do gráfico de uma função f com essas propriedades. Do Teorema 4.5.3 (ii), o gráfico de f é côncavo para baixo em todos os pontos da figura, e um segmento da reta tangente aparece em alguns pontos. Observe que a inclinação da reta tangente é decrescente em $[a, b]$. Note que f tem um valor máximo relativo em c, onde $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$.

Suponhamos agora que f seja uma função tendo as propriedades da função citadas no parágrafo anterior, exceto que, agora, f'' é positiva em (a, b). Então, do Teorema 4.4.3 (i), como $f''(x) > 0$ em (a, b), segue que f' é crescente em $[a, b]$. Assim, a inclinação da reta tangente é crescente em $[a, b]$. A Figura 2 mostra um esboço do gráfico de uma função f com essas propriedades. Do Teo-

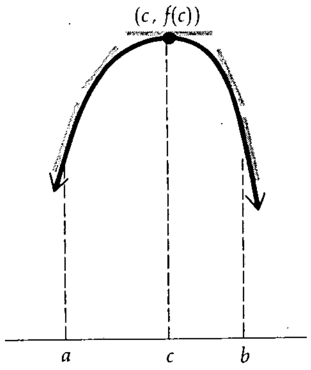


FIGURA 1

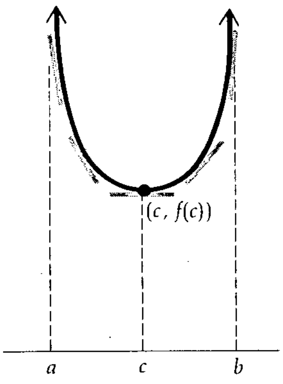


FIGURA 2

rema 4.5.3 (i), o gráfico de f é côncavo para cima em todos os pontos da figura. Nessa figura, aparecem segmentos da reta tangente em alguns pontos. As inclinações dessas retas tangentes são crescentes em $[a, b]$. A função f tem um valor mínimo relativo em c, onde $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$.

As deduções dos dois parágrafos precedentes são mencionadas no **teste da derivada segunda para extremos relativos**, que enunciaremos agora.

4.6.1 TEOREMA Teste da Derivada Segunda para Extremos Relativos

Seja c um número crítico de uma função f, no qual $f'(c) = 0$ e suponhamos que f' exista para todos os valores de x em algum intervalo aberto contendo c. Se $f''(c)$ existe e

(i) se $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c;
(ii) se $f''(c) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c.

A demonstração da parte (i) faz uso do Teorema 2.10.2 e na parte (ii) é aplicado o Teorema 2.10.1. Você pode querer consultá-los agora, além de rever as Ilustrações 1 e 2 da Secção Suplementar 2.10, que apresentam interpretações geométricas dos teoremas.

Prova de (i) Por hipótese, $f''(c)$ existe e é negativa; assim

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

Logo, pelo Teorema 2.10.2, existe um intervalo aberto I contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0 \qquad (1)$$

para todo $x \neq c$ no intervalo.

Seja I_1 o intervalo aberto contendo todos os valores de x em I para os quais $x < c$; logo, c é o extremo direito de I_1. Seja I_2 o intervalo aberto contendo todos os valores de x em I para os quais $x > c$; assim, c é o extremo esquerdo do intervalo aberto I_2.

Então, se x está em I_1, $x - c < 0$, e segue de (1) que $f'(x) - f'(c) > 0$ ou, equivalentemente, $f'(x) > f'(c)$. Se x está em I_2, $x - c > 0$ e segue de (1) que $f'(x) - f'(c) < 0$ ou, equivalentemente, $f'(x) < f'(c)$.

Mas como $f'(c) = 0$, concluímos que se x está em I_1, $f'(x) > 0$, e se x está em I_2, $f'(x) < 0$. Logo, $f'(x)$ muda o sinal algébrico de positivo para negativo, quando x cresce passando por c, e assim, pelo Teorema 4.4.4, f tem um valor máximo relativo em c.

A demostração da parte (ii) é similar e será deixada como um exercício (veja o Exercício 46). ■

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x) = x^4 + \tfrac{4}{3}x^3 - 4x^2$$

ache os máximos e mínimos relativos de f, aplicando o teste da derivada segunda. Faça um esboço do gráfico de f.

Solução Calculamos as derivadas primeira e segunda de f.

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x \qquad f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$$

Equacionando $f'(x) = 0$,

$$4x(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = -2 \qquad x = 1$$

Assim, os números críticos de f são -2, 0 e 1. Vamos determinar se existe extremo relativo entre esses números críticos, encontrando o sinal da derivada segunda neles. Os resultados estão resumidos na Tabela 1.

Tabela 1

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x = -2$	$-\frac{32}{2}$	0	+	f tem um valor mínimo relativo
$x = 0$	0	0	−	f tem um valor máximo relativo
$x = 1$	$-\frac{5}{3}$	0	+	f tem um valor mínimo relativo

A partir da tabela e mais alguns pontos, obtemos o esboço do gráfico de f, conforme mostra a Figura 3.

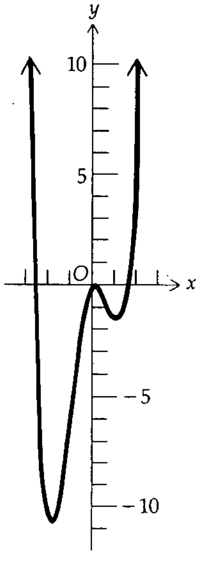


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Ache os extremos relativos da função seno, aplicando o teste da derivada segunda.

Solução Seja

$$f(x) = \text{sen}\, x$$

Então,

$$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\text{sen}\, x$$

$f'(x)$ existe para todo x. Os números críticos são obtidos equacionando $f'(x) = 0$

$$\cos x = 0$$

$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \qquad k \text{ é um inteiro qualquer}$$

Vamos determinar se entre esses números críticos existe um extremo relativo usando o sinal da derivada segunda neles.

$$\begin{aligned} f''(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi) &= -\text{sen}(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi) \\ &= -\cos k\pi \\ &= \begin{cases} -1 & \text{se } k \text{ for um inteiro par} \\ 1 & \text{se } k \text{ for um inteiro ímpar} \end{cases} \end{aligned}$$

Os resultados do teste da derivada segunda estão resumidos na Tabela 2.

Tabela 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k é um inteiro par)	1	0	−	f tem um valor máximo relativo
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k é um inteiro ímpar)	−1	0	+	f tem um valor mínimo relativo

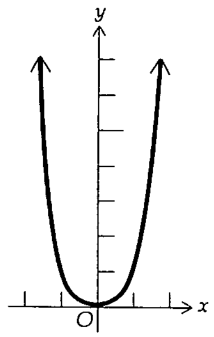


FIGURA 4

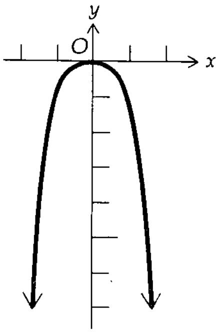


FIGURA 5

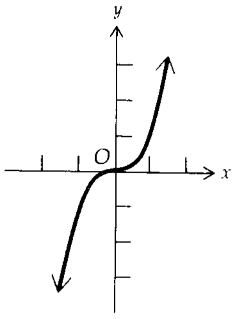


FIGURA 6

Se $f''(c) = 0$, bem como quando $f'(c) = 0$, nenhuma conclusão pode ser tirada relativa à existência de extremo relativo de f em c. As ilustrações a seguir mostram isso.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $f(x) = x^4$, então $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$. Assim, $f(0)$, $f'(0)$ e $f''(0)$ são todas nulas. Aplicando o teste da derivada primeira, vemos que f tem um valor mínimo relativo em 0. Um esboço do gráfico de f está na Figura 4. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se $g(x) = -x^4$, então $g'(x) = -4x^3$ e $g''(x) = -12x^2$. Assim, $g(0)$, $g'(0)$ e $g''(0)$ são todas nulas. Nesse caso, g tem um valor máximo relativo em 0, conforme podemos ver aplicando o teste da derivada primeira. Um esboço do gráfico de g está na Figura 5. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se $h(x) = x^3$, então $h'(x) = 3x^2$ e $h''(x) = 6x$; assim $h(0)$, $h'(0)$ e $h''(0)$ são todas nulas. A função h não tem extremo relativo em 0, pois se $x < 0$, $h(x) < h(0)$ e se $x > 0$, $h(x) > h(0)$. Um esboço do gráfico de h está na Figura 6. ◀

Nas Ilustrações 1, 2 e 3 temos exemplos de três funções, cada uma com derivada segunda nula num número onde a derivada primeira também é nula; mesmo assim, uma das funções tem um valor mínimo relativo, outra função tem um valor máximo relativo e a terceira função não tem extremo relativo.

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$$

ache os extremos relativos de f, aplicando o teste da derivada segunda, quando possível. Use a derivada segunda para encontrar os pontos de inflexão do gráfico de f e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico.

Solução

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}x^{-1/3} - \tfrac{2}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-4/3} + \tfrac{4}{9}x^{-5/3}$$

Como $f'(0)$ não existe, 0 é um númeo crítico de f. Encontramos os demais números críticos equacionando $f'(x) = 0$.

$$\frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{2}{3x^{2/3}} = 0$$

$$2x^{1/3} - 2 = 0$$

$$x^{1/3} = 1$$

$$x = 1$$

Assim, 1 também é um número crítico. Podemos determinar se há um extremo relativo em 1 aplicando o teste da derivada segunda. Não podemos usar o teste da derivada segunda no número crítico 0, pois $f'(0)$ não existe. Aplicamos então, em $x = 0$, o teste da derivada primeira. A Tabela 3 mostra os resultados desses testes.

Como $f''(0)$ não existe, $(0, 0)$ é um possível ponto de inflexão. Para achar outras possibilidades equacionamos $f''(x) = 0$.

$$-\frac{2}{9x^{4/3}} + \frac{4}{9x^{5/3}} = 0$$

$$-2x^{1/3} + 4 = 0$$

$$x^{1/3} = 2$$

$$x = 8$$

Para determinar se existe ponto de inflexão em $x = 0$ e $x = 8$, verificamos se $f''(x)$ muda de sinal; ao mesmo tempo, descobrimos o sentido da concavidade nos respectivos intervalos. Num ponto de inflexão é necessário que o gráfico tenha uma reta tangente. Na origem há uma tangente vertical, pois

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2x^{1/3} - 2}{3x^{2/3}}$$

$$= -\infty$$

A Tabela 3 resume nossos resultados e deles obtemos o esboço do gráfico da Figura 7.

Tabela 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < 0$		$-$	$-$	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	não existe	não existe	f não tem extremo relativo; o gráfico tem um ponto de inflexão
$0 < x < 1$		$-$	$+$	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 1$	-1	0	$+$	f tem um valor mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$1 < x < 8$		$+$	$+$	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 8$	0	$\frac{1}{6}$	0	f é crescente; o gráfico tem um ponto de inflexão
$8 < x$		$+$	$-$	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo

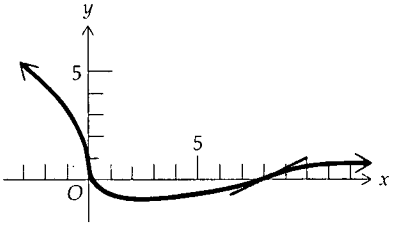


FIGURA 7

EXERCÍCIOS 4.6

Nos Exercícios de 1 a 26, ache os extremos relativos da função dada usando o teste da derivada segunda, quando aplicável. Quando ele não for aplicável, use o teste da derivada primeira. Use a derivada segunda para encontrar os pontos de inflexão do gráfico da função e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é para baixo. Faça um esboço do gráfico.

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

2. $g(x) = 7 - 6x - 3x^2$

3. $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$

4. $h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$

5. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3$

6. $f(y) = y^3 - 5y + 6$

7. $f(z) = (4 - z)^4$

8. $G(x) = (x + 2)^3$

9. $h(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

10. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3$

11. $F(x) = \cos 3x;\ x \in [-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

12. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 4x;\ x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$

13. $f(x) = x(x + 2)^3$

14. $g(t) = (t - 2)^{7/3}$

15. $f(x) = 4x^{1/2} + 4x^{-1/2}$

16. $f(x) = x(x - 1)^3$

17. $h(x) = x\sqrt{x + 3}$

18. $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

19. $F(x) = 6x^{1/3} - x^{2/3}$

20. $g(x) = \dfrac{9}{x} + \dfrac{x^2}{9}$

21. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$

22. $G(x) = x^{2/3}(x - 4)^2$

23. $f(x) = \operatorname{tg}^2 x;\ x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

24. $g(x) = \sec x \operatorname{tg} x;\ x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

25. $g(x) = x + \cos x;\ x \in [-2\pi, 2\pi]$

26. $f(x) = \operatorname{sen} x - x;\ x \in [-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$

Nos Exercícios de 27 a 30, ache os extremos relativos das funções trigonométricas dadas, pelo teste da derivada segunda.

27. Função co-seno

28. Função secante

29. Função co-secante

30. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

Nos Exercícios de 31 a 42, faça um esboço do gráfico de uma função f que passa pelos pontos (c, f(c)), (d, f(d)) e (e, f(e)), se as condições dadas forem satisfeitas. Trace também um segmento da reta tangente em cada um desses pontos, se houver uma reta tangente. Suponha que c < d < e e que f seja contínua em algum intervalo contendo c, d, e e.

31. $f'(c) = 0$; $f'(d) = 1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < d$; $f''(x) < 0$ se $x > d$

32. $f'(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x < d$; $f''(x) > 0$ se $x > d$

33. $f'(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(e) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x < d$; $f''(x) > 0$ se $d < x < e$; $f''(x) < 0$ se $x > e$

34. $f'(c) = 0$; $f'(d) = 1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(e) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < d$; $f''(x) < 0$ se $d < x < e$; $f''(x) > 0$ se $x > e$

35. $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $c < x < d$; $f''(x) > 0$ se $x > d$

36. $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d) = 1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $c < x < d$; $f''(x) < 0$ se $x > d$

37. $f'(c) = 0$; $\lim\limits_{x \to d^-} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to d^+} f'(x) = +\infty$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < d$; $f''(x) < 0$ se $x > d$

38. $f'(c) = 0$; $\lim\limits_{x \to d^-} f'(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to d^+} f'(x) = -\infty$; $f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x < d$; $f''(x) > 0$ se $x > d$

39. $f'(c)$ não existe; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x < c$; $f''(x) < 0$ se $c < x < d$; $f''(x) > 0$ se $x > d$

40. $f'(c) = 0$; $f'(d) = -1$; $f''(d) = 0$; $f'(e)$ não existe; $f''(x) < 0$ se $x < d$; $f''(x) > 0$ se $d < x < e$; $f''(x) < 0$ se $x > e$

41. $f'(c) = 0$; $f'(d)$ não existe; $f'(e) = 0$; $f''(e) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x < d$; $f''(x) < 0$ se $d < x < e$; $f''(x) > 0$ se $x > e$

42. $f'(c) = 0$; $f''(c) = 0$; $f'(d)$ não existe; $f'(e) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x < c$; $f''(x) > 0$ se $c < x < d$; $f''(x) > 0$ se $x > d$

43. Suponha que $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ sejam números críticos de uma função f e que $f''(x) = x[\![\frac{1}{2}x^2 + 1]\!]$. Em cada um desses números determine se f tem um extremo relativo; se tiver, classifique-o.

44. Dada $f(x) = x^r - rx + k$, onde $r > 0$ e $r \neq 1$, prove que (a) se $0 < r < 1$, f tem um valor máximo relativo em 1; (b) se $r > 1$, f tem um valor mínimo relativo em 1.

45. Dada $f(x) = x^3 + 3rx + 5$, prove que (a) se $r > 0$, f não tem extremos relativos; (b) se $r < 0$, f tem ambos os valores, máximo e mínimo, relativos.

46. Prove o Teorema 4.6.1 (ii).

47. Dada $f(x) = x^2 + rx^{-1}$, prove que, independentemente do valor de r, f tem um valor mínimo relativo, mas não tem valor máximo relativo.

48. Se $f(x) = ax^2 + bx + c$, use o teste da derivada segunda para mostrar que f tem um valor máximo relativo, se $a < 0$. Ache o número onde ele ocorre.

49. Suponha que f seja uma função para a qual $f''(x)$ existe para todos os valores de x num intervalo aberto I e que para um número c em I, $f''(c) = 0$ e $f'''(c)$ existe e não é zero. Prove que o ponto $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f. (*Sugestão:* a prova é similar àquela do teste da derivada segunda.)

4.7 TRAÇANDO UM ESBOÇO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Nas Secções 2.4 e 2.5 comentamos que para facilitar a elaboração do esboço do gráfico de uma função, encontramos, se existirem, as assíntotas do gráfico. Na Secção 2.4, tratamos das assíntotas verticais e na Secção 2.5, discutimos as assíntotas horizontais. Você poderá fazer uma revisão dessas secções agora, pois nós estaremos aplicando tais conceitos aqui.

Uma assíntota de um gráfico que não seja nem horizontal nem vertical é chamada de **assíntota oblíqüa**. Na Secção 11.6 daremos a definição formal (11.6.3) de assíntota oblíqüa. Então, mostraremos que o gráfico de uma função racional da forma $f(x)/g(x)$, onde o grau de $f(x)$ é um a mais do que o grau de $g(x)$, tem a reta $y = mx + b$ como assíntota oblíqüa, provando que

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - (mx + b) \right| = 0 \tag{1}$$

Se dividirmos o polinômio $f(x)$ no numerador pelo polinômio $g(x)$ do denominador, iremos obter a soma de uma função linear com uma função racional; isto é,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = mx + b + \frac{h(x)}{g(x)}$$

onde o grau do polinômio $h(x)$ é menor do que o grau de $g(x)$. Então,

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-(mx+b)\right| = \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right|$$

Quando o numerador e o denominador de $h(x)/g(x)$ forem divididos pela maior potência de x que aparece em $g(x)$, haverá um termo constante no denominador e todos os termos do denominador e do numerador serão da forma k/x^r, onde k é uma constante. Logo, quando $x \to +\infty$, o limite do numerador será 0, enquanto que o limite do denominador será uma constante. Assim,

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right| = 0$$

o que estabelece (1).

EXEMPLO 1 Ache as assíntotas do gráfico da função h definida por

$$h(x) = \frac{x^2+3}{x-1} \tag{2}$$

e faça um esboço do gráfico.

Solução Como

$$\lim_{x\to1^-} h(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1^+} h(x) = +\infty$$

a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical. Não existem assíntotas horizontais, pois se o numerador e o denominador de $h(x)$ forem divididos por x^2, obteremos

$$\frac{1+\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}$$

e quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, o limite do numerador é 1 e o limite do denominador é 0. Mas, o grau do numerador de $h(x)$ é um a mais do que o grau do denominador e quando o numerador for dividido pelo denominador, obteremos

$$h(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$$

Logo, a reta $y = x + 1$ é uma assíntota oblíqüa.

Para traçar o gráfico de h, determinamos se existe alguma reta tangente horizontal. De (2),

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

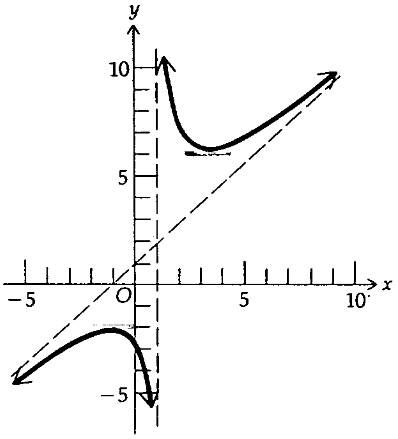


FIGURA 1

Equacionando $h'(x) = 0$, obtemos

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x + 1)(x - 3) = 0$$
$$x = -1 \qquad x = 3$$

Assim sendo, existem retas tangentes horizontais nos pontos $(-1, -2)$ e $(3, 6)$. Indicamos as assíntotas, as retas tangentes horizontais e marcando mais alguns pontos, obtemos o esboço do gráfico de h dado pela Figura 1.

Para obter um esboço do gráfico de uma função f, você deverá aplicar as propriedades discutidas nesse capítulo e proceder da seguinte forma:

1. Determine o domínio de f.
2. Ache os interceptos y do gráfico. Localize os interceptos x do gráfico, se a equação resultante for fácil de resolver.
3. Teste a simetria em relação ao eixo y e a origem.
4. Calcule $f'(x)$ e $f''(x)$.
5. Determine os números críticos de f. Esses são os valores de x no domínio de f para os quais ou $f'(x)$ não existe ou $f'(x) = 0$.
6. Aplique o teste da derivada primeira (Teorema 4.4.4) ou o teste da derivada segunda (Teorema 4.6.1) para determinar se nos números críticos existe um valor máximo relativo, um valor mínimo relativo, ou nenhum dos dois.
7. Determine os intervalos nos quais f é crescente, encontrando os valores de x para os quais $f'(x)$ é positiva; determine os intervalos nos quais f é decrescente, encontrando os valores de x para os quais $f'(x)$ é negativa. Ao localizar os intervalos nos quais f é monótona, verifique os pontos críticos onde f não tem um extremo relativo.
8. Para obter os pontos de inflexão possíveis, ache os números críticos de f', isto é, os valores de x para os quais $f''(x)$ não existe ou $f''(x) = 0$. Em cada um desses valores de x, verifique se $f''(x)$ muda de sinal e se o gráfico tem uma reta tangente nele, a fim de determinar se realmente existe um ponto de inflexão.
9. Verifique a concavidade do gráfico. Ache os valores de x para os quais $f''(x)$ é positiva e negativa, a fim de obter os pontos nos quais a concavidade é para cima e para baixo, respectivamente.
10. É útil achar a inclinação da reta tangente nos pontos de inflexão.
11. Verifique a existência de possíveis assíntotas horizontais, verticais ou oblíqüas.

Sugerimos que as informações obtidas sejam incorporadas numa tabela, como nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$

Faça um esboço do gráfico de f determinando primeiro: os extremos relativos de f; os pontos de inflexão do gráfico de f; os intervalos nos quais f é crescente e decrescente; onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo e a inclinação da reta tangente nos pontos de inflexão.

Solução O domínio de f é o conjunto de todos números reais. O intercepto y é 3.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \qquad f''(x) = 6x - 6$$

Equacione $f'(x) = 0$ para obter $x = 0$ e $x = 2$. De $f''(x) = 0$, obtemos $x = 1$. Ao fazer a tabela, considere os pontos nos quais $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$, bem como os intervalos excluindo esses valores de x:

$$x < 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 1 < x < 2 \qquad 2 < x$$

Das informações na Tabela 1 e determinando mais alguns pontos do gráfico, obteremos o gráfico da Figura 2.

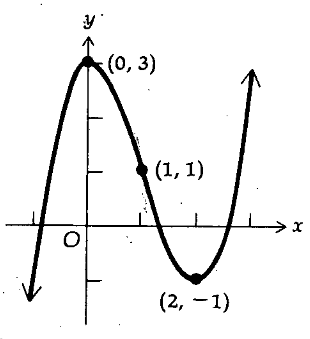


FIGURA 2

Tabela 1

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < 0$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	3	0	−	f tem um valor máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$0 < x < 1$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 1$	1	−3	0	f é decrescente; o gráfico tem um ponto de inflexão
$1 < x < 2$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = 2$	−1	0	+	f tem um valor mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima
$2 < x$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima

EXEMPLO 3 Dada

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

Faça um esboço do gráfico de f, seguindo as instruções do Exemplo 2. Ache também as assíntotas horizontais e verticais.

Solução O domínio de f é o conjunto de todos números reais exceto ±2. A única intersecção do gráfico com os eixos é a origem. Como $f(-x) = f(x)$, o gráfico é simétrico em relação ao eixo y.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2)}{(x^2 - 4)^2} \qquad f''(x) = \frac{-8(x^2 - 4)^2 + 8x[2(x^2 - 4)(2x)]}{(x^2 - 4)^4}$$

$$= \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \qquad = \frac{24x^2 + 32}{(x^2 - 4)^3}$$

Equacione $f'(x) = 0$ para obter $x = 0$; $f'(x)$ não se anula nunca. Para a Tabela 2, considere os pontos nos quais $x = 0$ e $x = \pm 2$, pois 2 e -2 não estão no domínio de f. Também, para a tabela, considere os intervalos excluindo estes valores de x:

$$x < -2 \qquad -2 < x < 0 \qquad 0 < x < 2 \qquad 2 < x$$

Como 2 e -2 estão excluídos do domínio de f, calculamos os seguintes limites:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty$$

Portanto, $x = 2$ e $x = -2$ são assíntotas verticais do gráfico.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

$$= 1 \qquad\qquad\qquad = 1$$

Logo, $y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico.

Com os dados da Tabela 2, as assíntotas como guias, tendo mais alguns pontos marcados no gráfico, e as propriedades de simetria, obtemos o esboço do gráfico de f mostrado na Figura 3.

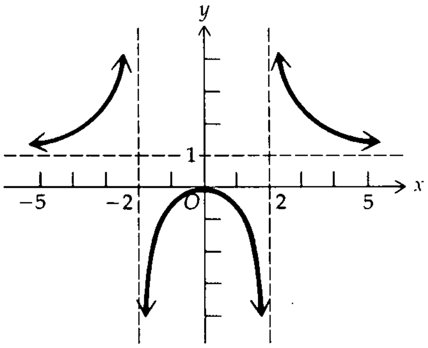


FIGURA 3

Tabela 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < -2$		+	+	f é crescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -2$	não existe	não existe	não existe	
$-2 < x < 0$		+	−	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	0	−	f tem um valor máximo relativo
$0 < x < 2$		−	−	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 2$	não existe	não existe	não existe	
$2 < x$		−	+	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima

Observe, no Exemplo 3, que dada a simetria com respeito ao eixo y, podemos obter o gráfico fazendo os cálculos para x em $[0, +\infty)$ e então, aplicamos as propriedades de simetria.

EXEMPLO 4 Dada

$$f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$$

Faça um esboço do gráfico de f, seguindo as instruções do Exemplo 2.

Solução O domínio de f é o conjunto de todos os números reais. O intercepto y é 0. Equacionando $f(x) = 0$, obtemos

$$x^{2/3}(5 - x) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 5$$

Logo, os interceptos x são 0 e 5.

$$f'(x) = \tfrac{10}{3}x^{-1/3} - \tfrac{5}{3}x^{2/3} \qquad f''(x) = -\tfrac{10}{9}x^{-4/3} - \tfrac{10}{9}x^{-1/3}$$
$$= \tfrac{5}{3}x^{-1/3}(2 - x) \qquad\qquad = -\tfrac{10}{9}x^{-4/3}(1 + x)$$

Quando $x = 0$, nem $f'(x)$ nem $f''(x)$ existem. Equacionando $f'(x) = 0$, obtemos $x = 2$. Assim sendo, os números críticos de f são 0 e 2. De $f''(x) = 0$, obtemos $x = -1$. Ao fazer a tabela, consideraremos os pontos nos quais x é -1, 0 e 2 e os seguintes intervalos:

$$x < -1 \qquad -1 < x < 0 \qquad 0 < x < 2 \qquad 2 < x$$

Um esboço do gráfico, com as informações da Tabela 3 e com alguns pontos adicionais está na Figura 4.

Tabela 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x < -1$		$-$	$+$	f é decrescente; o gráfico é côncavo para cima
$x = -1$	6	-5	0	f é decrescente; o gráfico tem um ponto de inflexão
$-1 < x < 0$		$-$	$-$	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 0$	0	não existe	não existe	f tem um valor mínimo relativo
$0 < x < 2$		$+$	$-$	f é crescente; o gráfico é côncavo para baixo
$x = 2$	$3\sqrt[3]{4} \approx 4{,}8$	0	$-$	f tem um valor máximo relativo; o gráfico é côncavo para baixo
$2 < x$		$-$	$-$	f é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo

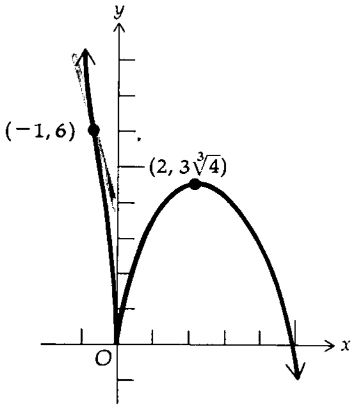


FIGURA 4

EXERCÍCIOS 4.7

Nos Exercícios de 1 a 8, ache as assíntotas horizontal e vertical do gráfico da função e faça um esboço do gráfico.

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 8}{x - 3}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 4}$

5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x + 2}$

6. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$

7. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$

Nos Exercícios de 9 a 58, ache as assíntotas horizontal e vertical do gráfico de f, determinando o seguinte: os extremos relativos de f; os pontos de inflexão do gráfico de f; os intervalos em que f é crescente; os intervalos em que f é decrescente; onde o gráfico é côncavo para cima; onde o gráfico é côncavo para baixo; a inclinação de qualquer tangente de inflexão; as assíntotas horizontal, vertical e oblíqüa; se existirem.

9. $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

10. $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$

11. $f(x) = x^4 - 2x^3$

12. $f(x) = 3x^4 + 2x^3$

13. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$

14. $f(x) = 2x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - 12x + 1$

15. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$

16. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$

17. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

18. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$

19. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2$

20. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4$

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ 2x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{se } x < 0 \\ x^3 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} -x^4 & \text{se } x < 0 \\ x^4 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} 2(x-1)^3 & \text{se } x < 1 \\ (x-1)^4 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} 3(x-2)^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ (2-x)^3 & \text{se } 2 < x \end{cases}$

26. $f(x) = x^2(x + 4)^3$

27. $f(x) = (x + 1)^3(x - 2)^2$

28. $f(x) = 3x^5 + 5x^3$

29. $f(x) = 3x^5 + 5x^4$

30. $f(x) = |4 - x^2|$

31. $f(x) = 3 \cos 2x;\ x \in [-\pi, \pi]$

32. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x;\ x \in [-\pi, \pi]$

33. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 \leqslant x < \frac{1}{2}\pi \\ \operatorname{sen}(x - \frac{1}{2}\pi) & \text{se } \frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \cos(\pi - x) & \text{se } 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$

35. $f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x;\ x \in (-\pi, \pi)$

36. $f(x) = 3 \sec \frac{1}{4}x;\ x \in (-2\pi, 2\pi)$

37. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x;\ x \in [-2\pi, 2\pi]$

38. $f(x) = |\operatorname{sen} x|;\ x \in [-2\pi, 2\pi]$

39. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

40. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

41. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

42. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$

43. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

44. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$

45. $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$

46. $f(x) = x^{1/3} + 2x^{4/3}$

47. $f(x) = 3x^{4/3} - 4x$

48. $f(x) = 3x^{1/3} - x$

49. $f(x) = 2 + (x - 3)^{1/3}$

50. $f(x) = 2 + (x - 3)^{4/3}$

51. $f(x) = 2 + (x - 3)^{5/3}$

52. $f(x) = 2 + (x - 3)^{2/3}$

53. $f(x) = x^2\sqrt{4 - x}$

54. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

55. $f(x) = (x + 2)\sqrt{-x}$

56. $f(x) = \dfrac{9x}{x^2 + 9}$

57. $f(x) = (x + 1)^{2/3}(x - 2)^{1/3}$

58. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

4.8 TRATAMENTO ADICIONAL DOS EXTREMOS ABSOLUTOS E APLICAÇÕES

O teorema do valor extremo (4.1.9) garante um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto para uma função que seja contínua num intervalo fechado. Vamos considerar agora algumas funções definidas em intervalos onde não é válido o teorema do valor extremo e que podem ter ou não extremos absolutos.

EXEMPLO 1 Dada

$$f(x) = \frac{x^2 - 27}{x - 6}$$

ache os extremos absolutos de f no intervalo $[0, 6)$, se existirem.

Solução A função f é contínua no intervalo $[0, 6)$, pois a única descontinuidade de f é em 6, que não pertence ao intervalo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x - 6) - (x^2 - 27)}{(x - 6)^2} \\ &= \frac{x^2 - 12x + 27}{(x - 6)^2} \\ &= \frac{(x - 3)(x - 9)}{(x - 6)^2} \end{aligned}$$

Observe que $f'(x)$ existe para todos os valores de x em $[0, 6)$ e $f'(x) = 0$ quando x é 3 ou 9; assim sendo, o único número crítico de f no intervalo $[0, 6)$ é 3. O teste da derivada primeira, quando aplicado, a fim de determinar se f tem um extremo relativo em 3, e os resultados são resumidos na Tabela 1.

Tabela 1

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusão*
$0 \leqslant x < 3$		$+$	f é crescente
$x = 3$	6	0	f tem um valor máximo relativo
$3 < x < 6$		$-$	f é decrescente

Como f tem um valor máximo relativo em 3 e f é crescente no intervalo $[0, 3)$ e decrescente no intervalo $(3, 6)$, então em $[0, 6)$ f tem um valor máximo absoluto em 3, sendo $f(3)$, que é igual a 6. Note que $\lim_{x \to 6^-} f(x) = -\infty$, donde concluímos que f não tem um valor mínimo absoluto em $[0, 6)$.

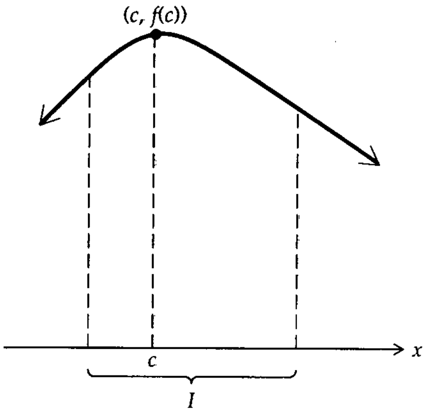


FIGURA 1

As funções cujos gráficos aparecem nas Figuras 1 e 2 são contínuas em um intervalo I e têm apenas um extremo relativo, $f(c)$, em I. Observe que $f(c)$ também tem um extremo absoluto em I. Essas funções ilustram o teorema a seguir, que às vezes é útil para determinar se um extremo relativo é um extremo absoluto.

4.8.1 TEOREMA

Seja f uma função contínua num intervalo I contendo o número c. Se $f(c)$ for um extremo relativo de f em I e se c for o único número em I, no qual f tem um extremo relativo, então $f(c)$ será um extremo absoluto de f em I. Além disso,

(i) se $f(c)$ for um valor máximo relativo de f em I, então $f(c)$ será um valor máximo absoluto de f em I;
(ii) se $f(c)$ for um valor mínimo relativo de f em I, então $f(c)$ será um valor mínimo absoluto de f em I.

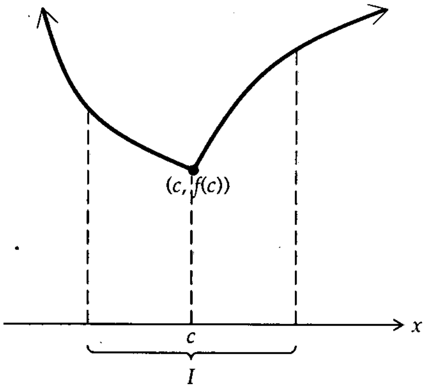


FIGURA 2

Prova Vamos provar a parte (i). A demonstração da parte (ii) é similar.

Como $f(c)$ é um valor máximo relativo de f em I, então, pela definição 4.1.1 existe um intervalo aberto J, onde $J \subset I$, e J contém c, tal que

$$f(c) \geqslant f(x) \qquad \text{para todo } x \in J$$

Como c é o único número de I no qual f tem um valor máximo relativo, segue que

$$f(c) > f(k) \qquad \text{se } k \in J \text{ e } k \neq c \tag{1}$$

Para mostrar que $f(c)$ é um valor máximo absoluto de f em I, vamos mostrar que se d for qualquer número em I, distinto de c, então $f(c) > f(d)$. Vamos supor que

$$f(c) \leqslant f(d) \tag{2}$$

e mostrar que isto leva a uma contradição. Como $d \neq c$, então $c < d$ ou $d < c$. Vamos considerar o caso em que $c < d$ (a demonstração é similar se $d < c$).

Como f é contínua em I, então f é contínua no intervalo fechado $[c, d]$. Logo, pelo teorema do valor extremo, f tem um valor mínimo absoluto em $[c, d]$. Suponha que esse valor mínimo absoluto ocorra em e, onde $c \leqslant e \leqslant d$. Da desigualdade (1) segue que $e \neq c$ e das desigualdades (1) e (2) segue que $e \neq d$. Conseqüentemente, $c < e < d$ e, portanto, f tem um valor mínimo relativo em e. Mas isso contraria a hipótese de que c é o único número em I no qual f tem um extremo relativo. Segue que a hipótese $f(c) \leqslant f(d)$ é falsa. Logo,

$f(c) > f(d)$ se $d \in I$ e $d \neq c$ e, conseqüentemente, $f(c)$ é um valor máximo absoluto de f em I. ■

EXEMPLO 2 Dada

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 12x + 3$$

ache os extremos absolutos de f em $(-\infty, +\infty)$, se existirem.

Solução

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 24x - 12 \qquad f''(x) = 36x^2 - 48x + 24$$

$f'(x)$ existe para todos os valores de x. Equacionando $f'(x) = 0$, obtemos

$$12(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) = 0$$

Fazemos a divisão polinomial para determinar que $x - 1$ é um fator do primeiro membro da equação, obtendo

$$12(x - 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

Como a equação $x^2 - x + 1 = 0$ tem somente raízes imaginárias, a única solução real é 1. Portanto, $f'(1) = 0$. Para determinar se $f(1)$ é um extremo relativo, aplicamos o teste da derivada segunda e obtemos os resultados que estão resumidos na Tabela 2.

Tabela 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusão*
$x = 1$	-2	0	+	f tem um valor mínimo relativo

A função f é contínua em $(-\infty, +\infty)$ e o único extremo relativo de f em $(-\infty, +\infty)$ está em $x = 1$. Logo, segue do Teorema 4.8.1 (ii) que -2, o valor mínimo relativo de f, é o valor mínimo absoluto de f.

Na Secção 4.2, as aplicações envolviam o cálculo dos extremos absolutos de funções contínuas num intervalo fechado e o teorema do valor extremo foi usado na solução dos problemas. Vamos tratar agora das aplicações envolvendo extremos absolutos para os quais o teorema do valor extremo não pode ser aplicado.

EXEMPLO 3 Uma caixa fechada com base quadrada deve ter um volume de 2.000 cm³. O material da tampa e da base deve custar $ 3 por centímetro quadrado e o material para os lados custa $ 1,50 por centímetro quadrado. Queremos encontrar as dimensões da caixa cujo custo total do material seja mínimo.

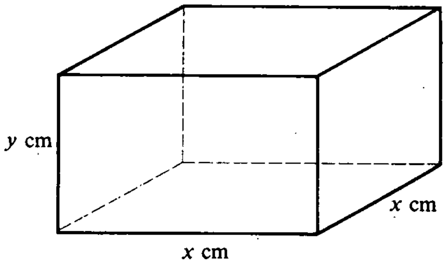


FIGURA 3

Solução Seja x cm o comprimento de um lado da base quadrada e $C(x)$ o custo total do material. A área da base é x^2 cm². Seja y cm a profundidade da caixa. Veja a Figura 3. Como o volume da caixa é o produto da área da base pela profundidade

$$x^2y = 2000$$

$$y = \frac{2000}{x^2} \tag{3}$$

O número total de centímetros quadrados na área combinada da tampa e da base é $2x^2$, e para os lados, é $4xy$. Portanto, o número de centavos no custo total do material é

$$3(2x^2) + \tfrac{3}{2}(4xy)$$

Substituindo y por seu equivalente de (3), temos

$$C(x) = 6x^2 + 6x\left(\frac{2000}{x^2}\right)$$

$$C(x) = 6x^2 + \frac{12.000}{x}$$

O domínio de C é $(0, +\infty)$. Além disso, C é contínua em seu domínio.

$$C'(x) = 12x - \frac{12.000}{x^2} \qquad C''(x) = 12 + \frac{24.000}{x^3}$$

Observe que $C'(x)$ não existe quando $x = 0$, mas 0 não está no domínio de C. Logo, os únicos números críticos serão aqueles obtidos como solução da equação $C'(x) = 0$, o que dá

$$12x - \frac{12.000}{x^2} = 0$$

$$x^3 = 1.000$$

A única solução real é 10. Assim, 10 é o único número crítico. Para determinar se $x = 10$ torna C um mínimo relativo, aplicamos o teste da derivada segunda. Os resultados do teste da derivada segunda estão resumidos na Tabela 3.

Tabela 3

	$C'(x)$	$C''(x)$	*Conclusão*
$x = 10$	0	+	C tem um valor mínimo relativo

Como C é contínua em seu domínio $(0, +\infty)$ e o único extremo relativo de C em $(0, +\infty)$ é em $x = 10$, segue do Teorema 4.8.1 (ii) que esse valor mínimo relativo de C é o valor mínimo absoluto. Assim, o custo total do material será mínimo quando o lado da base quadrada for 10 cm. A profundidade será, então, de 20 cm, pois a área da base será 100 cm^2 e o volume, 2.000 cm^3.

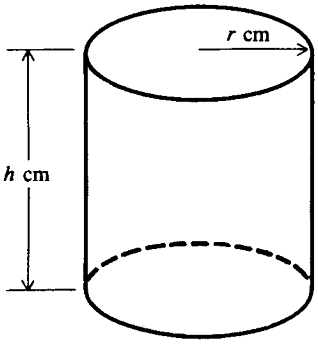


FIGURA 4

EXEMPLO 4 Se uma lata fechada com volume 16π cm^3 deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a altura e o raio, se um mínimo de material deve ser usado em sua fabricação.

Solução Seja r cm o raio da base do cilindro, h cm a altura do cilindro e S cm^2 a área da superfície total do cilindro. Veja a Figura 4. A área da superfície lateral é $2\pi rh$ cm^2, a área da tampa é πr^2 cm^2 e a área da base é πr^2 cm^2. Logo,

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \tag{4}$$

Se V cm³ for o volume de um cilindro circular reto, então $V = \pi r^2 h$. Assim,

$$16\pi = \pi r^2 h \tag{5}$$

Resolvendo (5) em h e substituindo em (4), obtemos S como uma função de r:

$$S(r) = 2\pi r\left(\frac{16}{r^2}\right) + 2\pi r^2$$

$$S(r) = \frac{32\pi}{r} + 2\pi r^2$$

O domínio de S é $(0, +\infty)$, e S é contínua em seu domínio.

$$S'(r) = -\frac{32\pi}{r^2} + 4\pi r \qquad S''(r) = \frac{64\pi}{r^3} + 4\pi$$

$S'(r)$ não existe quando $r = 0$, mas 0 não está no domínio de S. Os únicos números críticos serão aqueles obtidos ao resolvermos a equação $S'(r) = 0$, da qual temos

$$4\pi r^3 = 32\pi$$

$$r^3 = 8$$

$$r = 2$$

O único número crítico de S é 2. Os resultados da aplicação do teste da derivada segunda estão resumidos na Tabela 4.

Tabela 4

	$S'(r)$	$S''(r)$	*Conclusão*
$r = 2$	0	+	S tem um valor mínimo relativo

Como S é contínua em seu domínio $(0, +\infty)$ e o único extremo relativo de S em $(0, +\infty)$ ocorre em $r = 2$, segue do Teorema 4.8.1 (ii) que esse valor mínimo relativo é o valor mínimo absoluto de S. Quando $r = 2$, temos, de (5), $h = 4$. Logo, a menor quantidade de material será usada na fabricação da lata quando o raio for de 2 cm e a altura for de 4 cm.

Nos exemplos precedentes e nos exercícios da Secção 4.2, a variável para a qual desejávamos encontrar um extremo absoluto era expressa como uma função de uma única variável. Algumas vezes, esse procedimento é muito difícil ou muito trabalhoso, ou ocasionalmente impossível. Freqüentemente, as informações dadas possibilitam-nos obter duas equações envolvendo três variáveis. Em vez de eliminar uma das variáveis, pode ser mais vantajoso derivar implicitamente. O exemplo a seguir ilustra este método. O problema é similar ao do Exemplo 4, mas neste exemplo o volume pedido não é especificado.

EXEMPLO 5 Se uma lata fechada com um volume fixo deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a razão entre a altura e o raio da base se a quantidade de material usado na fabricação for mínima.

Solução Queremos encontrar uma relação entre a altura e o raio da base de um cilindro circular reto, a fim de que a área total da superfície seja um mínimo absoluto para um volume fixo. Logo, iremos considerar o volume do cilindro como uma constante.

Seja V unidades cúbicas o volume de um cilindro (constante).

Vamos definir agora as variáveis.

Seja r unidades o raio da base do cilindro, $r > 0$; e h unidades a altura do cilindro, $h > 0$. Seja S unidades de área a superfície total do cilindro.

Temos as seguintes equações:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \tag{6}$$

$$V = \pi r^2 h \tag{7}$$

Como V é uma constante, poderíamos resolver (7) para r ou h, em termos da outra e substituir em (6) o que nos daria S como função de uma única variável. O método alternativo consiste em considerar S com uma função de duas variáveis r e h; contudo, r e h não são independentes uma da outra. Isto é, se escolhermos r como variável independente, então S depende de r e h também depende de r.

Derivando S e V em relação a r e levando em conta que h é uma função de r, temos

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi r\frac{dh}{dr} \tag{8}$$

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi rh + \pi r^2\frac{dh}{dr}$$

Como V é uma constante, $\dfrac{dV}{dr} = 0$; logo, da fórmula acima,

$$2\pi rh + \pi r^2\frac{dh}{dr} = 0$$

com $r \neq 0$. Dividindo por r e resolvendo em $\dfrac{dh}{dr}$, teremos

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{r} \tag{9}$$

Substituindo (9) em (8), iremos obter

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi\left[2r + h + r\left(-\frac{2h}{r}\right)\right]$$

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi(2r - h) \tag{10}$$

Para encontrar a situação em que S tem um valor mínimo relativo, resolvemos a equação $\dfrac{dS}{dr} = 0$, obtendo $2r - h = 0$, o que resulta

$$r = \tfrac{1}{2}h$$

Para determinar se essa relação entre r e h torna S um mínimo relativo, aplicamos o teste da derivada segunda. Então, de (10),

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 2\pi\left(2 - \frac{dh}{dr}\right)$$

Substituindo (9) nessa relação, iremos obter

$$\begin{aligned}\frac{d^2S}{dr^2} &= 2\pi\left[2-\left(\frac{-2h}{r}\right)\right]\\ &= 2\pi\left(2+\frac{2h}{r}\right)\end{aligned}$$

Os resultados da aplicação do teste da derivada segunda estão resumidos na Tabela 5.

Tabela 5

	$\frac{dS}{dr}$	$\frac{d^2S}{dr^2}$	*Conclusão*
$r = \frac{1}{2}h$	0	+	S tem um valor mínimo relativo

De (6) e (7), S é uma função contínua de r em $(0, +\infty)$. Como o único extremo relativo de S em $(0, +\infty)$ está em $r = \frac{1}{2}h$, concluímos do Teorema 4.8.1 (ii) que S tem um valor mínimo absoluto em $r = \frac{1}{2}h$. Logo, a área total da superfície da lata será mínima para um volume específico quando a razão entre a altura e o raio da base for 2.

Problemas geométricos envolvendo extremos absolutos, ocasionalmente, ficam mais fáceis de ser resolvidos quando utilizamos funções trigonométricas. O exemplo a seguir ilustra esse fato.

EXEMPLO 6 Um cilindro circular reto deve ser inscrito numa esfera com raio dado. Ache a razão entre a altura e o raio da base do cilindro cuja área da superfície lateral seja máxima.

Solução Consulte a Figura 5. Vamos tomar a medida do raio constante da esfera como sendo a.

Seja θ rad o ângulo no centro da esfera subentendido pelo raio do cilindro, r unidades o raio do cilindro, h unidades a altura do cilindro e S unidades quadradas a área da superfície lateral do cilindro. Da Figura 5,

$$r = a \operatorname{sen} \theta \quad \text{e} \quad h = 2a \cos \theta$$

Como $S = 2\pi rh$,

$$\begin{aligned}S &= 2\pi(a \operatorname{sen} \theta)(2a \cos \theta)\\ &= 2\pi a^2(2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta)\\ &= 2\pi a^2 \operatorname{sen} 2\theta\end{aligned}$$

Assim, S é uma função de θ e seu domínio é $(0, \frac{\pi}{2})$.

$$\frac{dS}{d\theta} = 4\pi a^2 \cos 2\theta \quad \text{e} \quad \frac{d^2S}{d\theta^2} = -8\pi a^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

Equacionando $\frac{dS}{d\theta} = 0$,

$$\cos 2\theta = 0$$

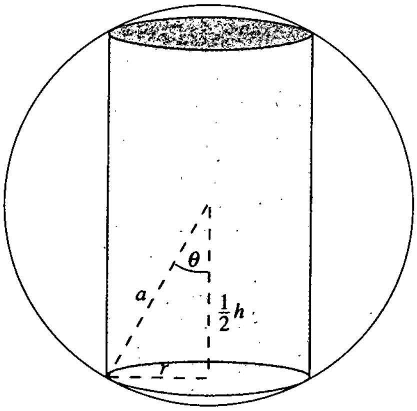


FIGURA 5

Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,

$$\theta = \tfrac{1}{4}\pi$$

Aplicamos então o teste da derivada segunda para extremos relativos, cujos resultados estão resumidos na Tabela 6.

Tabela 6

	$\frac{dS}{d\theta}$	$\frac{d^2S}{d\theta^2}$	*Conclusão*
$\theta = \frac{1}{4}\pi$	0	$-$	S tem um valor máximo relativo

S é contínua em seu domínio e como há somente um extremo relativo segue do Teorema 4.8.1 (i) que o valor máximo relativo de S é também o seu valor máximo absoluto.

Quando $\theta = \frac{1}{4}\pi$,

$$r = a \operatorname{sen} \tfrac{1}{4}\pi \qquad h = 2a \cos \tfrac{1}{4}\pi$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}a \qquad\qquad = \sqrt{2}a$$

Assim, para que a área da superfície lateral seja máxima, $h/r = 2$.

EXERCÍCIOS 4.8

Nos exercícios de 1 a 16, ache os extremos absolutos da função dada no intervalo indicado, se existir algum.

1. $f(x) = x^2; (-3, 2]$
2. $g(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1; (-3, 2)$
3. $F(x) = \dfrac{x+2}{x-2}; [-4, 4]$
4. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+3}; [-4, -1]$
5. $g(x) = 4x^2 - 2x + 1; (-\infty, +\infty)$
6. $f(x) = x^3 - 3x + 5; (-\infty, 0)$
7. $f(x) = (x-1)^{1/3}; (-\infty, +\infty)$
8. $G(x) = (x-5)^{2/3}; (-\infty, +\infty)$
9. $f(x) = x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 2x + 1; (-\infty, +\infty)$
10. $h(x) = 3x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 6x - 1; (-\infty, +\infty)$
11. $g(x) = \dfrac{x^2+7}{x-3}; [-3, 3)$
12. $f(x) = \dfrac{x^2-30}{x-4}; (-\infty, 4)$
13. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+4)^{3/2}}; [0, +\infty)$
14. $g(x) = \sqrt{x^4 - 4x + 7}; (-\infty, +\infty)$
15. $f(x) = \operatorname{tg} x + 2 \sec x; (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$
16. $h(x) = x + \operatorname{cotg} x; [\frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi]$
17. Um campo retangular com uma área de 2.700 m^2 deve ser fechado e uma cerca adicional deve ser usada para dividi-lo ao meio. O custo da cerca do meio é de $ 12 por metro linear e ao longo dos lados a cerca custa $ 18 por metro linear. Ache as dimensões do campo, de modo que o custo da cerca seja mínimo.
18. Um tanque retangular aberto deve ter uma base quadrada e seu volume deve ser de 125 m^3. O custo por metro quadrado é de $ 24 para a base e de $ 12 para os lados. Ache as dimensões do tanque cujo custo total do material seja mínimo.
19. Uma página deve conter 24 cm^2 de impressão, com margens de $1\frac{1}{2}$ cm em cima e embaixo, enquanto devemos ter 1 cm de cada lado. Quais as dimensões da menor página que satisfaz todos esses requisitos?
20. Um edifício de um andar tendo 1.188 m^2 de piso deve ser construído, sendo exigidos recuos de 6,6 m na frente e no fundo e de 4,5 m nas laterais. Ache as dimensões do lote com menor área onde esse edifício possa ser construído.
21. Um fabricante de caixas deve produzir uma caixa fechada com um volume de 288 cm^3, onde a base é um retângulo com um comprimento três vezes maior que a largura. Ache as dimensões da caixa fabricada com o mínimo de material.
22. Resolva o Exercício 21 para o caso em que a caixa não tenha tampa.
23. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 3x^2 + 5x$ com inclinação mínima.
24. Um poster de papelão cuja figura ocupa 32 cm^2 do espaço deve ter embaixo e em cima uma margem de 2 cm e uma margem de $\frac{4}{3}$ cm nos lados. Determine as dimensões do menor pedaço de papelão que possa ser usado para fazer o poster.
25. Numa dada comunidade, uma certa epidemia alastra-se de tal forma que x meses após o seu início, P % da população estará infectada, onde

$$P = \frac{30x^2}{(1+x^2)^2}$$

Em quantos meses o número de pessoas infectadas atingirá o máximo e que porcentagem da população esse número representa?

26. Um gerador de corrente contínua tem uma força eletromotriz de E volts e uma resistência interna de r ohms, onde E e r são constantes. Se R ohms for a resistência externa, a resistência total será de $(r + R)$ ohms e se P watts for a potência, então

$$P = \frac{E^2R}{(r + R)^2}$$

Mostre que a maior potência será consumida quando as resistências interna e externa forem iguais.

27. Para a lata do Exemplo 4, suponha que o custo do material da tampa e da base seja o dobro do custo dos lados. Ache a altura e o raio da base para que o custo do material seja mínimo.
28. Resolva o Exemplo 4, se a lata for aberta ao invés de fechada.

Nos Exercícios 29 e 30, use a expressão competição perfeita. Quando uma empresa funciona em ***competição perfeita,*** *há muitas firmas pequenas assim, nenhuma empresa afeta o preço ao elevar a sua produção. Portanto, sob competição perfeita o preço de uma mercadoria é constante, e a empresa pode vender quanto desejar, a um preço constante.*

29. Sob competição perfeita, uma fábrica pode vender a um preço de $ 200 por unidade todo o estoque de uma determinada mercadoria produzida. Se $C(x)$ for o custo total da produção diária quando x unidades são fabricadas, e $C(x) = 2x^2 + 40x + 1.400$, ache o número de unidades produzidas diariamente, para que a fábrica tenha um lucro diário total máximo. (*Sugestão*: o lucro total é igual ao rendimento total menos o custo total.)
30. Uma empresa que fabrica e vende carteiras sob competição perfeita pode vendê-las a um preço unitário de $ 400. Se x carteiras forem produzidas e vendidas a cada semana e $C(x)$ for o custo total da produção semanal, então $C(x) = 2x^2 + 80x + 6.000$. Determine quantas carteiras devem ser fabricadas a cada semana para que a companhia obtenha um lucro semanal máximo. Qual será este lucro semanal máximo? Veja a sugestão para o Exercício 29.
31. Sob um **monopólio**, que significa que há apenas um produtor de certa mercadoria, o preço e então a demanda podem ser controlados, regulando-se a quantidade da mercadoria produzida. Suponha que, sob um monopólio, x unidades sejam demandadas diariamente, quando p é o preço por unidade e $x = 140 - p$. Se a quantia em dinheiro no custo total da produção de x unidades for dada por $C(x) = x^2 + 20x + 300$, ache o lucro total diário máximo.
32. Ache a menor distância do ponto $P(2, 0)$ a um ponto sobre a curva $y^2 - x^2 = 1$, e ache o ponto sobre a curva que seja mais próximo de P.
33. Ache a menor distância da origem à reta $3x + y = 6$, e encontre o ponto P sobre a reta que esteja mais próximo da origem. Então, mostre que a origem está na reta perpendicular à reta dada em P.
34. Ache a menor distância do ponto $A(2, \frac{1}{2})$ a um ponto sobre a parábola $y = x^2$, e ache o ponto B sobre a parábola que seja o mais próximo de A. Então, mostre que A está sobre a reta normal da parábola em B.
35. Uma janela em estilo normando consiste em um retângulo com um semicírculo sobre ele. Se o perímetro de uma janela normanda for de 10 m, determine qual deve ser o raio do semicírculo e a altura do retângulo, tal que a janela deixe passar o máximo de luz.
36. Resolva o Exercício 35, no caso em que o semicírculo transmita somente a metade da luz por metro quadrado da área do retângulo.
37. Ficou determinado que, excluindo-se os salários, o custo por quilômetro para operar um caminhão é de $8 + \frac{1}{300}x$, onde x km/h é a velocidade do caminhão. Se os salários do motorista e do ajudante forem, no total, de $ 27 por hora, qual deverá ser a velocidade média do caminhão para que o custo por quilômetro seja mínimo?
38. O custo por hora do combustível para um navio de carga é $\frac{1}{50}v^3$, onde v nós (milha náutica por hora) é a velocidade do navio. Se houver um custo adicional de $ 400 por hora, qual deverá ser a velocidade média do navio, para que o custo por milha náutica seja mínimo? (1 milha náutica = 1,85325 km)
39. Um automóvel viajando a uma velocidade de 9 m/s aproxima-se de um cruzamento. Quando o automóvel está a 36 m do cruzamento, um caminhão viajando a uma velocidade de 12 m/s, o atravessa. O automóvel e o caminhão estão em estradas perpendiculares entre si. Quanto tempo após o caminhão deixar o cruzamento, os veículos estarão mais próximos um do outro?
40. Dois aviões A e B voam horizontalmente à mesma altitude. O avião B está a sudoeste do avião A e 20 km a oeste e 20 km ao sul de A. Se o avião A está viajando para o oeste a 16 km/min e o avião B está viajando para o norte a $\frac{64}{3}$ km/min, (a) em quantos segundos eles estarão mais perto um do outro e (b) qual será a menor distância entre eles?
41. Uma viga de 27 m é transportada horizontalmente por uma passagem com 8 m de largura, e então, por um corredor em ângulo reto com a passagem. Qual deve ser a largura do corredor para que a viga possa passar por essa quina? Despreze a dimensão transversal da viga, ou seja, considere-a como um segmento de reta.
42. Se dois corredores em ângulo reto um com o outro têm larguras de 3 e 4,5 m, qual o comprimento da maior viga que pode ser movida horizontalmente, passando por essa quina? Despreze a dimensão transversal da viga.
43. Um funil com um dado volume deve ter a forma de um cone circular reto. Ache a razão entre a altura e o raio da base se a quantidade de material usado em sua fabricação for mínima.
44. Um cone circular reto deve ser inscrito em uma esfera com um raio dado. Ache a razão entre a altura e o raio da base do cone de maior volume possível.
45. Um cone circular reto deve ser circunscrito numa esfera de raio dado. Ache a razão entre a altura e o raio da base do cone com o menor volume possível.

46. Prove, usando o método desta Secção, que a menor distância de um ponto $P_1(x_1, y_1)$ a uma reta l com equação $Ax + By + C = 0$ é $|Ax_1 + By_1 + C|/\sqrt{A^2 + B^2}$. (*Sugestão*: se s for o número de unidades na distância de P_1 ao ponto $P(x, y)$ sobre l, então s será um mínimo absoluto quando s^2 for um mínimo absoluto.)

47. Ache a altura do cone circular reto com maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio a unidades. Seja 2θ a medida em radianos do ângulo vertical do cone.

48. A Secção transversal de uma tina tem a forma de um triângulo isósceles invertido. Se o comprimento dos lados iguais for de 15 cm, ache a medida do ângulo do vértice que dará capacidade máxima à tina.

4.9 A DIFERENCIAL

Suponha que a função f seja definida pela equação

$$y = f(x)$$

Agora mostraremos como os incrementos Δy podem ser aproximados, por essa função, a pontos onde f seja derivável. Em tais pontos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

onde

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Segue de (1) que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |\Delta x| < \delta, \text{ então } \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{se } 0 < |\Delta x| < \delta, \text{ então } \frac{|\Delta y - f'(x)\Delta x|}{|\Delta x|} < \epsilon$$

Isso significa que $|\Delta y - f'(x)\,\Delta x|$ é pequeno, comparado com $|\Delta x|$. Ou seja, para $|\Delta x|$ suficientemente pequeno, $f'(x)\Delta x$ é uma boa aproximação do valor de Δy, e podemos escrever

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x \tag{2}$$

se $|\Delta x|$ for suficientemente pequeno.

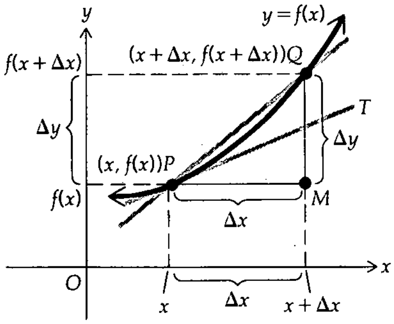


FIGURA 1

Para uma interpretação gráfica de (2), consulte a Figura 1. Na figura, uma equação da curva é $y = f(x)$. A reta PT é tangente à curva em $P(x, f(x))$, Q é o ponto $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, e a distância orientada MQ é $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Na figura, Δx e Δy são ambas positivas; contudo, elas poderiam ser negativas. Para um pequeno valor de Δx, a inclinação da reta secante PQ e a inclinação da reta tangente em P são aproximadamente iguais, isto é,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$$

que é (2).

O segundo membro de (2) é definido como sendo a *diferencial* de y.

4.9.1 DEFINIÇÃO

Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a **diferencial de** y, denotada por dy, será dada por

$$dy = f'(x)\Delta x \tag{3}$$

onde x está no domínio de f' e Δx é um incremento arbitrário de x.

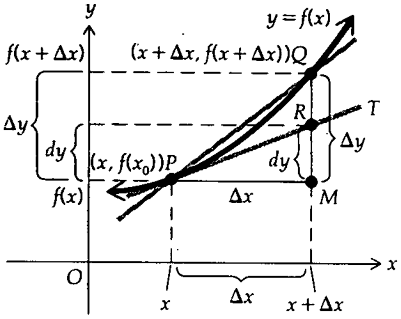


FIGURA 2

Consulte agora a Figura 2 que é igual à Figura 1, exceto que a reta vertical MR é mostrada, onde a distância orientada $\overline{MR} = dy$. Observe que dy representa a variação em y ao longo da reta tangente ao gráfico da equação $y = f(x)$ no ponto $P(x, f(x))$, quando x recebe um acréscimo de Δx.

O conceito de diferencial envolve um tipo especial de função de duas variáveis e um estudo detalhado de tais funções é feito no Capítulo 16. O símbolo df pode ser usado para representar essa função. A variável x pode ser qualquer número no domínio de f' e Δx pode ser qualquer número que desejarmos. Afirmar que df é uma função de duas variáveis independentes x e Δx significa que a cada par ordenado $(x, \Delta x)$ no domínio de df corresponde um único número na imagem de df e esse número pode ser representado por $df(x, \Delta x)$; assim,

$$df(x, \Delta x) = f'(x)\,\Delta x$$

Comparando essa igualdade com (3) vemos que quando $y = f(x)$, dy e $df(x, \Delta x)$ são notações diferentes para $f'(x)\Delta x$. O símbolo dy será usado nas discussões subseqüentes.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $y = 3x^2 - x$, então $f(x) = 3x^2 - x$; assim, $f'(x) = 6x - 1$. Logo, da Definição 4.9.1

$$dy = (6x - 1)\,\Delta x$$

Em particular, se $x = 2$, então $dy = 11\Delta x$. ◀

Quando $y = f(x)$, a Definição 4.9.1 fornece-nos o significado de dy, a diferencial da variável dependente. Queremos também definir a diferencial da variável independente, ou dx. Para chegar a uma definição conveniente de dx que seja consistente com a definição de dy, consideramos a função identidade definida por $f(x) = x$. Então, $f'(x) = 1$ e $y = x$; assim, de (3), $dy = 1 \cdot \Delta x$, isto é,

$$\text{se } y = x, \text{ então } dy = \Delta x \tag{4}$$

Para a função identidade, gostaríamos que dx fosse igual a dy; isto é, devido à afirmativa (4) gostaríamos que dx fosse igual a Δx. Esse raciocínio nos leva à definição a seguir.

4.9.2 DEFINIÇÃO

Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a **diferencial de x**, denotada por dx, será dada por

$$dx = \Delta x$$

onde Δx é um incremento arbitrário de x e x é qualquer número no domínio de f'.

Das definições 4.9.1 e 4.9.2,

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx} \tag{5}$$

Dividindo ambos os membros de (5) por dx, temos

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \text{se } dx \neq 0$$

Essa relação expressa a derivada como o quociente de duas diferenciais. Lembre-se de que, quando introduzimos a notação $\dfrac{dy}{dx}$ para a derivada na Secção 3.1, dy e dx não tinham significado independente.

EXEMPLO 1 Dada $y = 4x^2 - 3x + 1$, ache Δy, dy e $\Delta y - dy$ para (a) quaisquer x e Δx; (b) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$; (c) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$; (d) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}001$.

Solução

(a) Como $y = 4x^2 - 3x + 1$, seja

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 1$$

Então,

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1 - (4x^2 - 3x + 1) \\ &= 4x^2 + 8x\,\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3x - 3\,\Delta x + 1 - 4x^2 + 3x - 1 \\ &= (8x - 3)\,\Delta x + 4(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

De (5),

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)\,dx \\ &= (8x - 3)\,dx \\ &= (8x - 3)\,\Delta x \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta y - dy &= (8x - 3)\,\Delta x + 4(\Delta x)^2 - (8x - 3)\,\Delta x \\ &= 4(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Os resultados das partes (b), (c) e (d) estão dados na Tabela 1, onde

$$\Delta y = (8x - 3)\,\Delta x + 4(\Delta x)^2 \qquad \text{e} \qquad dy = (8x - 3)\,\Delta x$$

Tabela 1

	x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
(b)	2	0,1	1,34	1,3	0,04
(c)	2	0,01	0,1304	0,13	0,0004
(d)	2	0,001	0,013004	0,013	0,000004

Observe na Tabela 1 que a afirmação de que a diferença $\Delta y - dy$ tem um limite zero quando $\Delta x \to 0$ não traz nenhuma informação adicional, uma vez que já sabemos que ambos, Δy e dy, têm o limite zero! O que é realmente notável é o fato de que **também** para **o erro relativo** $\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x}$ temos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x} = 0$; uma afirmação obviamente mais forte do que a anterior. A primeira afirmação decorre apenas da continuidade de $f(x)$ e a segunda é equivalente à existência da derivada $f'(x)$. Observe ainda que, em geral, **não** podemos afirmar que $\Delta y - dy$ decresça monotonicamente com Δx, mas sim que, para qualquer tolerância de erro $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|\Delta y - dy| \leqslant \epsilon\, |\Delta x|$ se $|\Delta x| < \delta$.

Para um valor fixo de x, digamos x_0,

$$dy = f'(x_0)\,dx$$

Isto é, dy uma função linear de dx; conseqüentemente, em geral é mais fácil calcular dy do que Δy, como foi visto no Exemplo 1. Como

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$$

então,

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$$

Assim,

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy \tag{6}$$

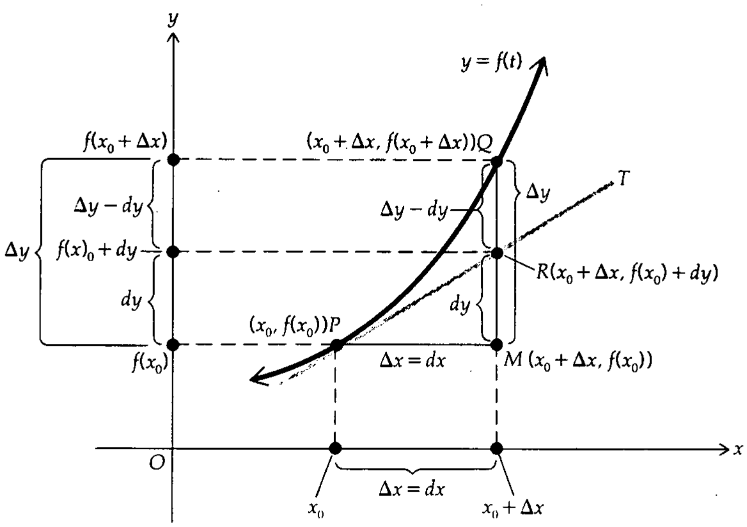


FIGURA 3

Nossos resultados estão ilustrados na Figura 3. A equação da curva é $y = f(x)$ e o gráfico é côncavo para cima. A reta PT é tangente à curva em $P(x_0, f(x_0))$; Δx e dx são iguais e estão representados pela distância orientada $\overline{PM}$, onde M é o ponto $(x_0 + \Delta x, f(x_0))$. Seja Q o ponto $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, e a distância orientada $\overline{MQ}$ é Δy ou, equivalentemente, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. A inclinação de PT é $f'(x) = dy/dx$. Também a inclinação de PT é $\overline{MR}/\overline{PM}$ e como $\overline{PM} = dx$, temos $dy = \overline{MR}$ e $\overline{RQ} = \Delta y - dy$. Note que quanto menor o valor de dx (isto é, quanto mais próximo o ponto Q estiver do ponto P), menor será o valor de $\Delta y - dy$ (isto é, menor será o comprimento do segmento de reta RQ). Uma equação da reta tangente PT é

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Assim, se $\bar{y}$ for a ordenada de R, então

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)[(x_0 + \Delta x) - x_0]$$

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$$

$$\bar{y} = f(x_0) + dy$$

Comparando essa equação com (6), observe que se usarmos $f(x_0) + dy$ para aproximar o valor de $f(x_0 + \Delta x)$, estaremos aproximando a ordenada do ponto $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ na curva pela ordenada do ponto $R(x_0 + \Delta x, f(x_0) + dy)$ sobre a reta tangente à curva em $P(x_0, f(x_0))$.

Na Figura 3, $\Delta y > dy$; assim, $\Delta y - dy > 0$. Consulte agora a Figura 4, onde $\Delta y < dy$, e assim, $\Delta y - dy < 0$. Novamente, observe que quanto menor o valor de dx, menores serão os valores de $|\Delta y - dy|$; isto é, quanto mais próximo o ponto Q estiver do ponto P, menor será o comprimento do segmento de reta QR.

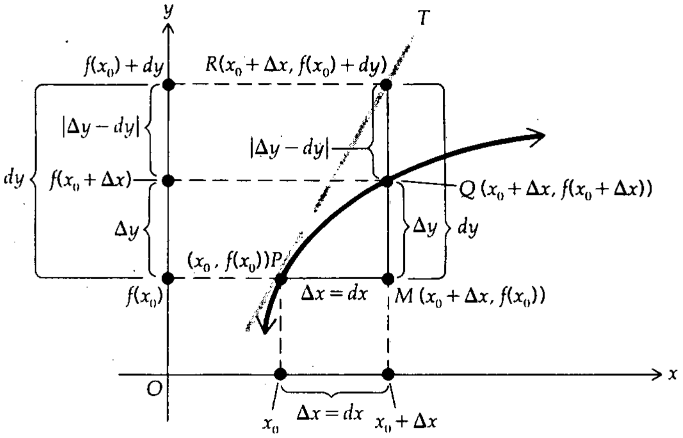


FIGURA 4

EXEMPLO 2 Ache o volume aproximado de um invólucro esférico cujo raio interno é 4 cm e cuja espessura é $\frac{1}{16}$ cm.

Solução Consideramos o volume do invólucro esférico como um incremento do volume de uma esfera. Seja r o número de centímetros do raio de uma esfera, V cm³ o volume de uma esfera e ΔV o número de centímetros cúbicos no volume de um invólucro esférico.

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \qquad dV = 4\pi r^2\, dr$$

Substituindo $r = 4$ e $dr = \frac{1}{16}$ nas relações acima, obtemos

$$\begin{aligned} dV &= 4\pi(4)^2\tfrac{1}{16} \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Logo, $\Delta V \approx 4\pi$ e concluímos que o volume do invólucro esférico é aproximadamente 4π cm³.

Suponha que y seja uma função de x e que x, por sua vez, seja função de uma terceira variável t; isto é,

$$y = f(x) \qquad \text{e} \qquad x = g(t)$$

As duas relações juntas definem y como uma função de t. Por exemplo, suponha que $y = x^3$ e $x = 2t^2 - 1$. Combinando essas duas equações, obtemos $y = (2t^2 - 1)^3$. Em geral, combinando as duas equações $y = f(x)$ e $x = g(t)$, obtemos

$$y = f(g(t))$$

A derivada de y em relação a t pode ser encontrada pela regra da cadeia, resultando

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) \tag{7}$$

A fórmula (7) acima expressa $\dfrac{dy}{dt}$ como uma função de x e t, pois $\dfrac{dy}{dx}$ é uma função de x e $\dfrac{dx}{dt}$ é uma função de t.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se $y = x^3$ e $x = 2t^2 - 1$, então

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)\\ &= 3x^2(4t)\\ &= 12x^2t\end{aligned}$$

◀

Já que $y = f(g(t))$ define y como uma função da variável independente t, a diferencial de y é obtida de (5):

$$dy = \left(\frac{dy}{dt}\right)dt$$

Essa relação expressa dy como uma função de t e dt. Substituindo (7) na relação, obtemos

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)dt \tag{8}$$

Agora, como x é uma função da variável independente t, (5) pode ser aplicada para obter a diferencial de x, e temos

$$dx = \left(\frac{dx}{dt}\right)dt$$

Essa relação expressa dx como uma função de t e dt. Usando-a para substituir $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ dt em (8) por dx, obtemos

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)dx \tag{9}$$

Você deve ter em mente que em (9), dy é uma função de t e dt, e que dx é uma função de t e de dt. Se $\frac{dy}{dx}$ em (9) for substituída por $f'(x)$, temos

$$dy = f'(x)\,dx \tag{10}$$

A relação (10) assemelha-se a (5). Mas em (5), x é a variável independente e dy é expressa em termos de x e dx, enquanto que em (10), t é a variável independente e ambas dy e dx são expressas em termos de t e dt. Assim, temos o teorema a seguir.

4.9.3 TEOREMA Se $y = f(x)$, então quando $f'(x)$ existe,

$$dy = f'(x)\,dx$$

sendo x uma variável independente ou não.

Se dividirmos ambos os membros de (10) por dx (desde que $dx \neq 0$), obteremos

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad dx \neq 0$$

Essa relação estabelece que se $y = f(x)$, então $f'(x)$ será o quociente de duas diferenciais dy e dx, mesmo que x não seja a variável independente.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Suponha $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $0 < t < \pi$. Então,

$dx = -\operatorname{sen} t\, dt$ e $dy = \cos t\, dt$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t\, dt}{-\operatorname{sen} t\, dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{11}$$

Como $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t$, então $x^2 + y^2 = 1$. Assim,

$$y^2 = 1 - x^2$$

Além disso, $y > 0$, pois $y = \operatorname{sen} t$ e $0 < t < \pi$. Assim, da relação acima

$$y = \sqrt{1 - x^2} \tag{12}$$

Substituindo o valor de y de (12) em (11), temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Esse resultado também pode ser obtido, calculando $\dfrac{dy}{dx}$ a partir de (12). ◀

Na Secção 3.3, demonstramos os teoremas usados para calcular as derivadas das funções algébricas. As fórmulas desses teoremas serão reescritas agora, usando a notação de Leibniz. Junto com a fórmula para a derivada há uma fórmula para a diferencial. Nessas fórmulas, u e v são funções de x e elas são válidas, desde que $\dfrac{du}{dx}$ e $\dfrac{dv}{dx}$ existam. A letra c representa uma constante.

I	$\dfrac{d(c)}{dx} = 0$	I′	$d(c) = 0$
II	$\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$	II′	$d(x^n) = nx^{n-1}\, dx$
III	$\dfrac{d(cu)}{dx} = c\dfrac{du}{dx}$	III′	$d(cu) = c\, du$
IV	$\dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$	IV′	$d(u+v) = du + dv$
V	$\dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$	V′	$d(uv) = u\, dv + v\, du$
VI	$\dfrac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \dfrac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$	VI′	$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\, du - u\, dv}{v^2}$
VII	$\dfrac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$	VII′	$d(u^n) = nu^{n-1}\, du$

Ampliaremos a operação de derivação para incluir o processo que envolve o cálculo da diferencial, bem como da derivada. Se $y = f(x)$, dy pode ser encontrada se aplicarmos as fórmulas I′—VII′, ou se determinarmos $f'(x)$ e a multiplicarmos por dx.

EXEMPLO 3 Dada

$$2x^2y^2 - 3x^3 + 5y^3 + 6xy^2 = 5$$

onde x e y são funções de uma terceira variável, ache $\dfrac{dy}{dx}$ calculando a diferencial termo a termo.

Solução Esse é um problema de derivação implícita. Tomando a diferencial termo a termo, obtemos

$$4xy^2\,dx + 4x^2y\,dy - 9x^2\,dx + 15y^2\,dy + 6y^2\,dx + 12xy\,dy = 0$$

Dividindo por dx, se $dx \neq 0$, temos

$$(4x^2y + 15y^2 + 12xy)\frac{dy}{dx} = -4xy^2 + 9x^2 - 6y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9x^2 - 6y^2 - 4xy^2}{4x^2y + 15y^2 + 12xy}$$

EXERCÍCIOS 4.9

Nos Exercícios de 1 a 4, (a) encontre dy e Δy *para os valores indicados de x e* Δx*. (b) Faça um esboço do gráfico e indique os segmentos de reta cujos comprimentos são dy e* Δy*.*

1. $y = x^2$; $x = 2$ e $\Delta x = 1$
2. $y = x^3$; $x = 2$ e $\Delta x = 1$
3. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 8$ e $\Delta x = 2$
4. $y = \sqrt{x}$; $x = 4$ e $\Delta x = 3$

Nos Exercícios de 5 a 10, ache (a) Δy*; (b) dy; (c)* $\Delta y - dy$*.*

5. $y = 6 - 3x - 2x^2$
6. $y = 3x^2 - x$
7. $y = x^3 - x^2$
8. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
9. $y = \dfrac{2}{x - 1}$
10. $y = \dfrac{1}{x} - x^3$

Nos Exercícios de 11 a 16, ache para os valores dados (a) Δy*; (b) dy; (c)* $\Delta y - dy$*.*

11. $y = x^2 - 3x$; $x = 2$; $\Delta x = 0{,}03$
12. $y = x^2 - 3x$; $x = -1$; $\Delta x = 0{,}02$
13. $y = \dfrac{1}{x}$; $x = -2$; $\Delta x = -0{,}1$
14. $y = \dfrac{1}{x}$; $x = 3$; $\Delta x = -0{,}2$
15. $y = x^3 + 1$; $x = 1$; $\Delta x = -0{,}5$
16. $y = x^3 + 1$; $x = -1$; $\Delta x = 0{,}1$

Nos Exercícios de 17 a 24, ache dy.

17. $y = (3x^2 - 2x + 1)^3$
18. $y = \sqrt{4 - x^2}$
19. $y = x^2\sqrt[3]{2x + 3}$
20. $y = \dfrac{3x}{x^2 + 2}$
21. $y = \dfrac{2 + \cos x}{2 - \operatorname{sen} x}$
22. $y = \operatorname{cotg} 2x \operatorname{cosec} 2x$
23. $y = \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x$
24. $y = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} - x\cos\dfrac{1}{x}$

Nos Exercícios de 25 a 30, x e y são funções de uma terceira variável. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$*, encontrando a diferencial termo a termo (veja o Exemplo 3).*

25. $3x^2 + 4y^2 = 48$
26. $8x^2 - y^2 = 32$
27. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$
28. $2x^2y - 3xy^3 + 6y^2 = 1$
29. $\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$
30. $3\operatorname{tg}^2 x + 4\sec^2 y = 1$

Nos Exercícios de 31 a 34, faça o seguinte: (a) encontre dx e dy em termos de t e dt; (b) use os resultados da parte (a) para encontrar $\dfrac{dy}{dx}$*; (c) expresse y em termos de x, eliminando t, e então calcule* $\dfrac{dy}{dx}$ *usando os teoremas de derivação.*

31. $x = 2t^2$, $y = 3t$
32. $x = 1 + t$, $y = 1 - t^2$
33. $x = 2\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$, $0 < t < \pi$
34. $x = 1 - \cos t$, $y = 2 + \operatorname{sen} t$, $0 < t < \pi$

(Sugestão para os Exercícios 33 e 34: elimine t usando a identidade $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$*.)*

35. A medida da aresta de um cubo é 15 cm, com um erro possível de 0,01 cm. Use diferenciais para encontrar o erro aproximado do cálculo (a) do volume; (b) da área de uma das faces.

36. Uma caixa de metal na forma de um cubo deve ter um volume interior de 1.000 cm³. Os seis lados são feitos de metal, com $\frac{1}{2}$ cm de espessura. Se o custo do material for de $0,20 por centímetro cúbico, use diferenciais para encontrar o custo aproximado do metal a ser usado na confecção da caixa.

37. Um tanque cilíndrico aberto, deve ter um revestimento externo com 2 cm de espessura. Se o raio interno for 6 m e a altura for 10 m, encontre, por diferenciais, a quantidade de material necessária para o revestimento.

38. O talo de determinado cogumelo tem uma forma cilíndrica e um talo com 2 cm de altura e r cm de raio tem um volume de V cm³, onde $V = 2\pi r^2$. Use a diferencial para encontrar o aumento aproximado no volume do talo, quando o raio passa de 0,4 para 0,5 cm.

39. Uma queimadura na pele de uma pessoa tem a forma de um círculo, tal que se r cm for o raio e A cm² for a área da queimadura, então $A = \pi r^2$. Use a diferencial para encontrar o decréscimo aproximado da área da queimadura quando o raio passa de 1 para 0,8 cm.

40. Uma dada bactéria unicelular tem a forma de uma esfera, tal que se r micromilímetros (µm) for seu raio e Vµ³ for seu volume, então $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Use a diferencial para encontrar o aumento aproximado no volume da célula quando o raio passa de 2,2 para 2,3 µm.

41. Um tumor no corpo de uma pessoa tem a forma esférica, tal que se r cm for o raio e V cm³ for o volume do tumor, então $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Use a diferencial para encontrar o aumento aproximado no volume do tumor quando o raio passa de 1,5 para 1,6 cm.

42. Se t s for o tempo necessário a uma oscilação completa de um pêndulo simples com l m, então $4\pi^2 l = gt^2$, onde $g = 9{,}8$ m/s². Um relógio tendo um pêndulo com 1 m de comprimento adianta 5 min por dia. Ache aproximadamente o quanto deve aumentar o comprimento do pêndulo para que o relógio seja acertado.

43. A medida da resistência elétrica de um fio é proporcional à medida de seu comprimento e inversamente proporcional ao quadrado da medida de seu diâmetro. Suponha que a resistência de um fio de um determinado comprimento seja calculada a partir da medida de seu diâmetro, com um erro possível de 2%. Ache o erro percentual possível no cálculo do valor da resistência.

44. Um empreiteiro concorda em pintar ambos os lados de 1.000 sinais circulares, com 3 m de raio cada um. Depois de receber os sinais, descobre que na realidade o raio de cada sinal tem 1 centímetro a mais. Use diferenciais para encontrar uma porcentagem aproximada da quantidade adicional de tinta que será necessária.

45. Se o erro possível na medida do volume de um gás for 0,1 cm³ e o erro permitido na pressão for 0,001 C kg/m², ache o tamanho do menor recipiente para o qual é válida a lei de Boyle (Exercício 23 nos Exercícios 3.9).

46. Para a lei adiabática da expansão de ar (Exercício 24 nos Exercícios 3.9), prove que $\dfrac{dP}{P} = 1{,}4\,\dfrac{dV}{V}$.

4.10 SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES PELO MÉTODO DE NEWTON (*Suplementar*)

As soluções de uma equação da forma

$$f(x) = 0$$

são chamadas de **raízes** da equação ou **zeros** da função f. Se f for uma função polinomial com grau menor do que cinco, existem fórmulas para o cálculo dos zeros. Você está familiarizado com as fórmulas caso f tenha grau um (uma função linear) ou dois (uma função quadrática). Para uma função polinomial com grau três ou quatro, o método geral de cálculo dos zeros é complicado. Além disso, para os zeros de uma função polinomial com grau cinco ou mais, existe um teorema, creditado a Niels Abel (1802-1829), o qual afirma não existir uma fórmula geral em termos de um número finito de operações com os coeficientes. Existem, todavia, processos numéricos para aproximar soluções de equações e agora eles são mais importantes do que nunca, com o uso dos computadores e calculadoras programáveis. Um desses processos envolve uma aplicação da derivada e foi inventado por Isaac Newton no século dezessete. É conhecido como método de Newton e será o objeto desta secção.

Consideremos a equação $f(x) = 0$, onde f é uma função derivável. O método de Newton fornece um processo para aproximar uma raiz dessa equação ou, equivalentemente, um zero de f, isto é, um número r tal que $f(r) = 0$. Vamos apresentar primeiro uma interpretação geométrica dos conceitos envolvidos. Consulte a Figura 1, que mostra um esboço do gráfico de $y = f(x)$. O número r

é um intercepto x do gráfico. Para obter uma aproximação de r, escolhemos um número x_1. A escolha de x_1 pode ser feita examinando um esboço do gráfico e ele deve estar razoavelmente próximo do número r. Consideramos então a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$. A reta tangente, denotada por T_1, está na Figura 1, e T_1 intercepta o eixo x no ponto x_2. O número x_2 serve agora como uma segunda aproximação de r. Repetimos então o processo com a reta tangente T_2 no ponto $(x_2, f(x_2))$. O intercepto x de T_2 é x_3. Continuamos o processo até obter a precisão desejada. Pelo gráfico, vemos que os números x_1, x_2, x_3, e assim por diante, estão cada vez mais próximos do número r. Essa situação ocorre para muitas funções.

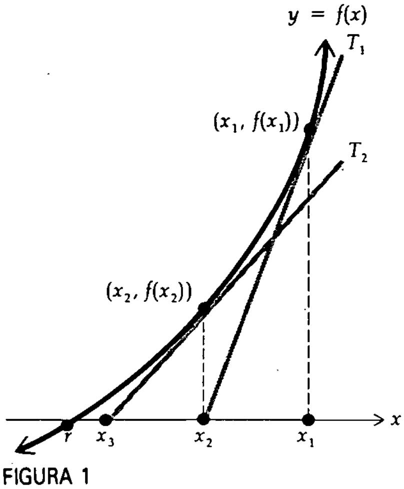


FIGURA 1

Para obter as aproximações sucessivas x_2, x_3, ... a partir da primeira aproximação x_1, usamos as equações das retas tangentes. A reta tangente T_1 no ponto $(x_1, f(x_1))$ tem uma inclinação de $f'(x_1)$. Assim, uma equação de T_1 é

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

O intercepto x de T_1 é x_2 e determinamos x_2 tomando $x = x_2$ e $y = 0$ na equação acima. Resulta, então, que

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{se } f'(x_1) \neq 0$$

Com esse valor de x_2, uma equação de T_2 é

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$

Então, na equação acima, expressando $x = x_3$ e $y = 0$, teremos

$$0 - f(x_2) = f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \qquad \text{se } f'(x_2) \neq 0$$

Prosseguindo dessa forma, obtemos a fórmula geral para a aproximação x_{n+1} em termos da aproximação precedente x_n:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{se } f'(x_n) \neq 0} \tag{1}$$

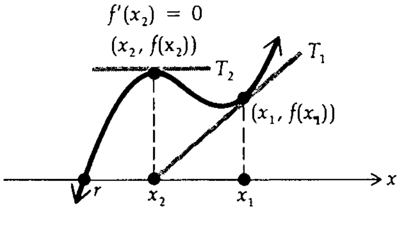


FIGURA 2

Adaptamos (1) facilmente, para usá-la num computador ou numa calculadora programável.

De (1) podemos obter a $(n + 1)$-ésima aproximação a partir da n-ésima aproximação, desde que $f'(x_n) \neq 0$. Se $f'(x_n) = 0$, a reta tangente será horizontal e, em tal caso, a menos que a reta tangente seja o próprio eixo x, ela não terá um intercepto x. A Figura 2 mostra isso quando $f'(x_2) = 0$. Dessa forma, o método de Newton não é aplicável, se $f'(x_n) = 0$ para algum x_n. Você deve ter em mente que o valor de x_{n+1} dado por (1) não é necessariamente uma aproximação de r melhor do que x_n. Se, por exemplo, x_1 não estiver suficientemente próximo de r, então $|f'(x_1)|$ pode ser pequeno e, assim sendo, a reta tangente T_1 será aproximadamente horizontal. Então x_2, o intercepto x de T_1, pode estar mais distante de r do que x_1. Veja a Figura 3, onde ocorre essa situação.

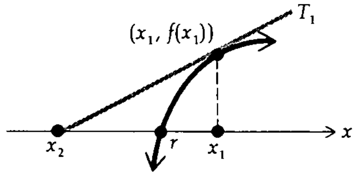


FIGURA 3

Na ilustração a seguir mostramos como aplicar o método de Newton a uma equação cuja solução nós conhecemos.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos usar o método de Newton para obter a raiz positiva da equação $x^2 = 9$, começando com a primeira aproximação de 4. Escrevemos a equação como $x^2 - 9 = 0$ e expressamos

$$f(x) = x^2 - 9$$

$$f'(x) = 2x$$

De (1), obtemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 9}{2x_n} \qquad (2)$$

Agora, aplicamos (2) com valores de n e valores correspondentes de x_n para calcular, com uma calculadora, x_{n+1}. Começamos com $x_1 = 4$.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{x_1^2 - 9}{2x_1} \\ &= 4 - \frac{16 - 9}{8} \\ &= 3{,}125 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{x_2^2 - 9}{2x_2} \\ &= 3{,}125 - \frac{(3{,}125)^2 - 9}{2(3{,}125)} \\ &= 3{,}0025 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{x_3^2 - 9}{2x_3} \\ &= 3{,}0025 - \frac{(3{,}0025)^2 - 9}{2(3{,}0025)} \\ &= 3{,}0000 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_5 &= x_4 - \frac{x_4^2 - 9}{2x_4} \\ &= 3{,}0000 - \frac{(3{,}0000)^2 - 9}{2(3{,}0000)} \\ &= 3{,}0000 \end{aligned}$$

Certamente, todas as aproximações sucessivas serão 3,0000. Assim, a raiz positiva da equação $x^2 - 9 = 0$ será 3,0000, até a quarta casa decimal. ◀

Observe que se x_n for uma solução de $f(x) = 0$, $f(x_n) = 0$. Assim, de (1),

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - 0 \\ &= x_n \end{aligned}$$

Conseqüentemente, todas as aproximações são iguais a x_n. Note que essa situação ocorre na Ilustração 1, onde todas as aproximações após e incluindo x_4 têm o mesmo valor com quatro casas decimais.

Observe também de (1) que $x_{n+1} = x_n$ implica $f(x_n) = 0$. Assim sendo, podemos concluir que se duas aproximações sucessivas forem iguais, temos então uma aproximação para um zero de f.

Se, contudo, sua escolha inicial de x_1 não for suficientemente próxima do zero desejado, é possível que você obtenha aproximações para um outro zero. Veja a Figura 4 para um esboço do gráfico de uma função onde isso pode acontecer. Note que a escolha indicada de x_1 próximo do zero r desejado resulta sucessivas aproximações x_2, x_3, x_4, ... perto de um outro zero s. Assim, quando for aplicar o método de Newton, você deverá primeiro fazer um rápido esboço do gráfico da função para obter sua aproximação inicial. Consulte o gráfico,

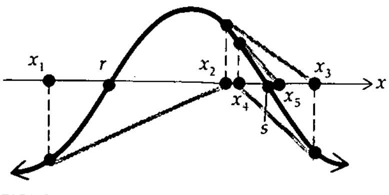


FIGURA 4

enquanto prossegue, para se assegurar de que você está obtendo as aproximações sucessivas do zero que desejava.

Em suma, quando você for aplicar o método de Newton para resolver uma equação da forma $f(x) = 0$, faça o seguinte:

1. Escolha *adequadamente* a primeira aproximação x_1. Um esboço rápido do gráfico de f irá ajudá-lo a obter uma escolha razoável.
2. Com o valor de x_1 na fórmula (1), obtenha uma segunda aproximação x_2. Então, use x_2 em (1) a fim de obter uma terceira aproximação x_3, e assim por diante, até que $x_{n+1} = x_n$ com a precisão desejada.

EXEMPLO 1 Use o método de Newton para encontrar a raiz real da equação

$$x^3 - 2x - 2 = 0$$

com quatro casas decimais.

Solução Seja $f(x) = x^3 - 2x - 2$; assim $f'(x) = 3x^2 - 2$. Então, de (1), temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 2}{3x_n^2 - 2} \tag{3}$$

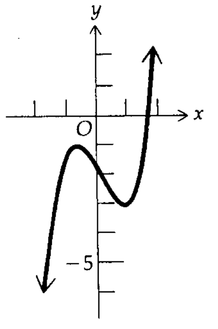


FIGURA 5

Para obter um esboço do gráfico de f, colocamos os pontos $(-2, -6)$, $(-1, -1)$, $(0, -2)$, $(1, -3)$, e $(2, 2)$. Há extremos relativos de f quando $f'(x) = 0$, isto é, quando $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$. O gráfico aparece como na Figura 5. Como o gráfico intercepta o eixo x num único ponto, existe somente uma raiz real da equação dada. Como $f(1) = -3$ e $f(2) = 2$, essa raiz está entre 1 e 2. Uma escolha adequada para nossa primeira aproximação é $x_1 = 1{,}5$. A Tabela 1 mostra as aproximações sucessivas calculadas de (3) com esse x_1. Queremos que a raiz seja precisa até a quarta casa decimal; assim sendo, usamos cinco casas decimais nos nossos cálculos. Como x_5 e x_6 são iguais (até cinco casas decimais), arredondamos esse número para quatro casas decimais, obtendo 1,7693 como sendo a raiz procurada.

Tabela 1

n	x_n	$x_n^3 - 2x_n - 2$	$3x_n^2 - 2$	$\dfrac{x_n^3 - 2x_n - 2}{3x_n^2 - 2}$	x_{n+1}
1	1,50000	−1,62500	4,75000	−0,34211	1,84211
2	1,84211	0,56674	8,18011	0,06928	1,77283
3	1,77283	0,02621	7,42878	0,00353	1,76930
4	1,76930	0,00006	7,39127	0,00001	1,76929
5	1,76929	−0,00002	7,39116	0,00000	1,76929

EXEMPLO 2 Use o método de Newton para encontrar, com três casas decimais, a coordenada x do ponto de intersecção no primeiro quadrante da reta $y = \frac{1}{3}x$ e a curva $y = \operatorname{sen} x$.

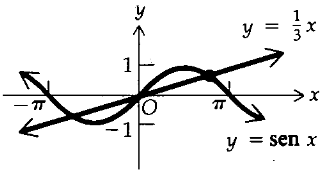


FIGURA 6

Solução A Figura 6 mostra a reta e a curva. Queremos encontrar o valor positivo de x para o qual

$$\operatorname{sen} x = \tfrac{1}{3}x$$

$$3 \operatorname{sen} x - x = 0$$

Seja

$$f(x) = 3\,\text{sen}\,x - x$$

$$f'(x) = 3\cos x - 1$$

Da fórmula (1),

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3\,\text{sen}\,x_n - x_n}{3\cos x_n - 1} \tag{4}$$

Pela Figura 6, parece que uma escolha razoável para x_1 é 2. Calculamos as aproximações sucessivas pela fórmula (4); elas estão na Tabela 2. Os cálculos foram feitos com quatro casas decimais. Observe que x_4 e x_5 são iguais a 2,2789. Dessa forma, o valor positivo de x para o qual sen $x = \frac{1}{3}x$, com três casas decimais, é 2,279.

Tabela 2

n	x_n	$3\,\text{sen}\,x_n - x_n$	$3\cos x_n - 1$	$\dfrac{3\,\text{sen}\,x_n - x_n}{3\cos x_n - 1}$	x_{n+1}
1	2,0000	0,7279	−2,2484	−0,3237	2,3237
2	2,3237	−0,1346	−3,0513	0,0441	2,2796
3	2,2796	−0,0022	−2,9528	0,0007	2,2789
4	2,2789	−0,0001	−2,9512	0,0000	2,2789

Existem teoremas que estabelecem condições para a aplicação do método de Newton, bem como teoremas relativos à sua precisão. Tais teoremas podem ser encontrados em textos de análise numérica.

EXERCÍCIOS 4.10

Nos Exercícios de 1 a 4, use o método de Newton para encontrar a raiz real da equação dada com quatro casas decimais.

1. $x^3 - 4x^2 \quad 2 = 0$ **2.** $6x^3 + 9x + 1 = 0$
3. $x^5 - x + 1 = 0$ **4.** $x^5 + x - 1 = 0$

Nos Exercícios de 5 até 10, use o método de Newton para encontrar o valor aproximado da raiz indicada com erro menor do que um milésimo.

5. $x^3 - 4x - 8 = 0$; a raiz positiva
6. $x^3 - 2x + 7 = 0$; a raiz negativa
7. $x^4 - 10x + 5 = 0$; a menor raiz positiva
8. $x^4 - 10x + 5 = 0$; a maior raiz positiva
9. $2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0$; a raiz negativa
10. $x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 4 = 0$; a raiz positiva

Nos Exercícios de 11 a 14, use o método de Newton para encontrar o radical dado com cinco casas decimais corretas.

11. $\sqrt{3}$, resolvendo a equação $x^2 - 3 = 0$
12. $\sqrt{10}$, resolvendo a equação $x^2 - 10 = 0$
13. $\sqrt[3]{6}$, resolvendo a equação $x^3 - 6 = 0$
14. $\sqrt[3]{7}$, resolvendo a equação $x^3 - 7 = 0$

Nos Exercícios de 15 a 18, use o método de Newton para encontrar, com quatro casas decimais, a coordenada x do ponto de intersecção no primeiro quadrante dos gráficos das duas equações.

15. $y = x$; $y = \cos x$ **16.** $y = \frac{1}{2}x$; $y = \text{sen}\,x$
17. $y = x^2$; $y = \text{sen}\,x$ **18.** $y = x^2$; $y = \cos x$

19. Equações da forma $tg\,x + ax = 0$, onde a é um inteiro, surgem em problemas de condução de calor. As raízes positivas da equação em ordem crescente são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Se $a = 1$, ache α_1 e α_2 com quatro casas decimais.
20. Siga as instruções do Exercício 19, se $a = -2$.

Nos Exercícios 21 e 22, obtenha uma aproximação de π com cinco casas decimais, usando o método de Newton para resolver a equação dada.

21. tg $x = 0$ **22.** $\cos x + 1 = 0$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 4

Nos Exercícios de 1 a 12, ache os extremos absolutos da função dada no intervalo indicado, se houver algum, e ache os valores de x nos quais os extremos absolutos ocorrem. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo.

1. $f(x) = \sqrt{5 + x}; [-5, +\infty)$
2. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}; (-3, 3)$
3. $f(x) = \frac{5}{2}x^6 - 3x^5; [-1, 2]$
4. $f(x) = x^4 - 12x^2 + 36; [-2, 6]$
5. $f(x) = |9 - x^2|; [-2, 3]$
6. $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}; [0, 4]$
7. $f(x) = x^4 - 12x^2 + 36; [0, 5]$
8. $f(x) = \left\{\begin{matrix} 2x + 3 & \text{se } -2 \leqslant x < 1 \\ x^2 + 4 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{matrix}\right\}; [-2, 2]$
9. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x; [-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi]$
10. $f(x) = 4 \cos^2 2x; [0, \frac{3}{4}\pi]$
11. $f(x) = \operatorname{tg} 4x; [-\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{12}\pi]$
12. $f(x) = \operatorname{cosec} 3x; [0, \frac{1}{3}\pi]$

Nos Exercícios de 13 a 32, faça um esboço do gráfico da função f dada, determinando primeiro o seguinte: os extremos relativos de f; os pontos de inflexão do gráfico de f; os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente; onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo; a inclinação das tangentes inflexionais, as assíntotas horizontal, vertical e oblíqua, se existirem.

13. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
14. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 5$
15. $f(x) = (x - 4)^2(x + 2)^3$
16. $f(x) = (x - 1)^3(x - 3)$
17. $f(x) = (x - 4)^{1/3} - 3$
18. $f(x) = (x + 2)^3 + 2$
19. $f(x) = \dfrac{4x^2}{3x^2 + 1}$
20. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$
21. $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2 - 4}$
22. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
23. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 3}$
24. $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x}$
25. $f(x) = \begin{cases} (1 - x)^3 & \text{se } x \leqslant 1 \\ (x - 1)^3 & \text{se } 1 < x \end{cases}$
26. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & \text{se } x < 2 \\ 6 - x^2 & \text{se } 2 \leqslant x \end{cases}$
27. $f(x) = (x - 3)^{5/3} + 1$
28. $f(x) = (x + 2)^{4/3}$
29. $f(x) = (x + 1)^{2/3}(x - 3)^2$
30. $f(x) = x\sqrt{25 - x^2}$
31. $f(x) = \operatorname{sen} 2x - \cos 2x;\ x \in [-\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi]$
32. $f(x) = x - \operatorname{tg} x;\ x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

Nos Exercícios 33 e 34, verifique se as três condições da hipótese do teorema de Rolle estão satisfeitas pela função dada no intervalo indicado. Então, ache um valor adequado de c que satisfaça a conclusão do teorema de Rolle. Faça um esboço do gráfico de f no intervalo e use-o para dar a interpretação geométrica desse teorema.

33. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4; [-2, 1]$
34. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x; [0, \frac{1}{3}\pi]$

Nos Exercícios 35 e 36, verifique se as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas para a função dada no intervalo indicado. Então, ache um valor adequado de c que satisfaça as conclusões do teorema do valor médio. Faça um esboço do gráfico de f no intervalo e utilize-o para dar a interpretação geométrica desse teorema.

35. $f(x) = \sqrt{3 - x}; [-6, -1]$
36. $f(x) = x^3; [-2, 2]$

37. (a) Se f for uma função polinomial e $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$ e $f'(b)$ forem nulos, prove que existem pelo menos dois números no intervalo aberto (a, b) que sejam raízes da equação $f''(x) = 0$. (b) Mostre que a função definida pela equação $f(x) = (x^2 - 4)^2$ satisfaz a parte (a) para o intervalo aberto $(-2, 2)$.
38. Se f for uma função definida por $f(x) = |2x - 4| - 6$, então $f(-1) = 0$ e $f(5) = 0$. Mas f' não se anula nunca. Mostre por que o teorema de Rolle não é válido.
39. Suponha que f e g sejam funções que satisfaçam as hipóteses do teorema do valor médio em $[a, b]$. Além disso, suponha que $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo aberto (a, b). Prove que $f(x) - g(x) = f(a) - g(a)$ para todo x no intervalo fechado $[a, b]$.
40. Se f for uma função polinomial, mostre que entre duas raízes consecutivas da equação $f'(x) = 0$ haverá no máximo uma raiz da equação $f(x) = 0$.
41. Ache o valor máximo absoluto atingido pela função f se $f(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$, onde A, B e k são constantes positivas.
42. Ache o ponto (ou pontos) de inflexão do gráfico da função definida por $f(x) = x^{1/5}$ e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.
43. Ache o ponto (ou pontos) de inflexão do gráfico da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$$

e determine onde o gráfico é côncavo para cima e côncavo para baixo.
44. Se $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine a e b de tal forma que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(2, 16)$.
45. Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determine a, b e c de tal forma que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1, -1)$ e que a inclinação da tangente inflexional seja -3.
46. Se $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$, prove que o gráfico de f tem três pontos de inflexão que são colineares. Faça um esboço do gráfico.
47. Se $f(x) = x|x|$, mostre que o gráfico de f tem um ponto de inflexão na origem.
48. Seja $f(x) = x^n$, onde n é um inteiro positivo. Prove que o gráfico de f terá um ponto de inflexão na origem se e somente se n for um inteiro ímpar e $n > 1$. Além disso, mostre que se n for par, f terá um valor mínimo relativo em 0.

49. Se $f(x) = (x^2 + a^2)^p$, onde p é um número racional e $p \neq 0$, prove que se $p < \frac{1}{2}$, o gráfico de f terá dois pontos de inflexão e se $p \geqslant \frac{1}{2}$, o gráfico de f não terá pontos de inflexão.

50. Suponha que o gráfico de uma função tenha um ponto de inflexão em $x = c$. O que você pode concluir, se possível, sobre (a) a continuidade de f em c; (b) a continuidade de f' em c; (c) a continuidade de f'' em c?

51. Ache dois números não-negativos cuja soma seja 12 e tais que a soma de seus quadrados seja um mínimo absoluto.

52. Ache dois números não-negativos cuja soma seja 12 e tais que seu produto seja um máximo absoluto.

53. Mostre que entre todos os retângulos tendo um perímetro de 36 cm, o quadrado com 9 cm de lado tem a maior área.

54. Mostre que entre todos os retângulos tendo uma área de 81 cm^2, o quadrado com 9 cm de lado tem o menor perímetro.

55. Uma caixa aberta com uma base quadrada deve ter um volume de 4.000 cm^3. Ache as dimensões da caixa que possa ser fabricada com um mínimo de material.

56. Resolva o Exercício 55, se a caixa for fechada.

57. Resolva o Exercício 55, se a caixa aberta tiver um volume de k cm^3.

58. Numa cidade com 11.000 habitantes, a taxa de crescimento de uma epidemia é diretamente proporcional ao produto dos números de pessoas infectadas e não-infectadas. Determine o número de pessoas infectadas quando a taxa de crescimento da epidemia for máxima.

59. Devido a várias restrições, o tamanho de determinada comunidade está limitado a 3.000 habitantes e a taxa de crescimento da população é diretamente proporcional ao produto do seu tamanho com diferença entre 3.000 e o seu tamanho. Determine o tamanho da população para o qual a sua taxa de crescimento é máxima.

60. Um fabricante propõe entregar a um vendedor 300 cadeiras a \$90 cada e reduzir, no total do pedido, o preço por unidade em \$0,25 para cada cadeira acima de 300. Ache o montante envolvido na maior transação possível entre o fabricante e o vendedor nessas circunstâncias.

61. Duas cidades A e B devem receber seu suprimento de água de uma estação de tratamento situada à margem de um rio, com um curso em linha reta que está a 15 km de A e a 10 km de B. Se os pontos no rio mais próximos de A e B estão separados por 20 km e A e B estão do mesmo lado do rio, onde a estação deveria estar situada, de modo que o mínimo de canos fossem empregados?

62. Um dos ângulos agudos de um triângulo deve ter $\frac{\pi}{6}$ rad e o lado oposto a esse ângulo deve ter 10 cm. Prove que de todos os triângulos que satisfazem esses requisitos, o que tem maior área é isósceles. (*Sugestão:* expresse a medida da área do triângulo em termos das funções trigonométricas de um dos outros ângulos agudos.)

63. Em um armazém, mercadorias pesando 1.000 quilos são transportadas ao nível do chão, amarrando-se uma pesada corda em uma plataforma móvel, baixa, e puxando-a com um veículo motorizado. Se a corda forma um ângulo de θ rad com o plano do chão, então a força de magnitude F kg ao longo da corda é dada por:

$$F = \frac{1.000\, k}{k \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

onde k é o coeficiente de atrito constante e $0 < k < 1$. Se $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Mostre que F é mínima, quando $\operatorname{tg} \theta = k$.

64. Uma lata fechada com um volume de 27 cm^3 deve ter a forma de um cilindro circular reto. Se a tampa e a base, ambas circulares, forem cortadas de pedaços quadrados de lata, ache o raio e a altura da lata, de forma que seja usado o mínimo de material em sua fabricação. Inclua o material desperdiçado na tampa e na base.

65. Se $100x$ unidades de uma determinada mercadoria forem demandadas sendo p o preço por unidade, $x^2 + p^2 = 36$. Ache o rendimento total máximo absoluto.

66. Sob um monopólio (veja Exercício 31 nos Exercícios 4.8), x unidades são demandadas diariamente sendo p o preço por unidade e $x^2 + p = 320$. Se o custo total da produção de x unidades for dado por $C(x) = 20x$, ache o lucro total diário máximo.

67. Uma fábrica sob competição perfeita (veja as instruções dos Exercícios 29 e 30 nos Exercícios 4.8) fabrica e vende rádios portáteis. A fábrica pode vender a um preço de \$75 por rádio. Se x rádios forem fabricados a cada dia e $C(x)$ for o custo total da produção diária, então $C(x) = x^2 + 25x + 100$. Quantos rádios devem ser fabricados a cada dia para que a fábrica obtenha um lucro total diário máximo? Qual será este lucro total diário máximo?

68. Ache a distância mais curta entre o ponto $P\,(0, 4)$ e o ponto na curva $x^2 - y^2 = 16$, e ache o ponto na curva mais próximo de P.

69. Duas partículas entram em movimento ao mesmo tempo. Uma move-se segundo uma reta horizontal e sua equação de movimento é $x = t^2 - 2t$, onde x cm é a distância orientada da partícula desde a origem em t s. A outra move-se ao longo de uma reta vertical que intercepta a reta horizontal na origem e sua equação de movimento é $y = t^2 - 2$, onde y cm é a distância orientada da partícula desde a origem em t s. Determine quando a distância orientada entre as partículas é mínima e suas velocidades naquele instante.

70. Uma escada deverá passar por cima de um muro de $\frac{27}{8}$ m de altura e alcançar uma parede que está a 8 m depois do muro. Ache o menor comprimento que a escada a ser usada pode ter.

71. Resolva o Exercício 70 se o muro tiver h m de altura e a parede estiver a w m do muro.

72. Uma tenda deve ter a forma de um cone. Ache a razão entre as medidas do raio e da altura da tenda com um dado volume que requer o mínimo de material.

73. Uma grande placa de sinalização deve conter 50 m^2 de letreiro. Se for deixada uma margem de 4 m na base e no topo e uma margem de 2 m nas laterais, ache as dimensões da menor placa que satisfaça essas especificações.

74. Ache o volume do maior cilindro circular reto que possa ser inscrito num cone circular reto com um raio de 4 cm e uma altura de 8 cm.

75. Ache as dimensões do cone circular reto com menor volume que possa circunscrever um cilindro circular reto com r cm de raio e h cm de altura.

76. Um pedaço de fio com 80 cm de comprimento deve ser dobrado para formar um retângulo. Ache as dimensões do retângulo com maior área possível.

77. Um pedaço de fio com 20 cm deve ser cortado em dois e cada parte é dobrada, tomando a forma de um quadrado. Como deve ser cortado o fio de modo que a área total dos quadrados seja a menor possível?

78. Se $f(x) = x + \operatorname{sen} x$, prove que f não tem extremos relativos, mas que o gráfico de f possui retas tangentes horizontais. Faça um esboço do gráfico para $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

79. Para certa mercadoria de que x unidades são demandadas semanalmente quando p é o preço de cada unidade, $10^6px = 10^9 - 2 \cdot 10^6x + 18 \cdot 10^3x^2 - 6x^3$. O custo médio de produção de cada unidade é dado por $Q(x) = \frac{1}{50}x - 24 + 11 \cdot 10^3x^{-1}$ e $x \geqslant 100$. Ache o número de unidades produzidas a cada semana e o preço de cada unidade para maximizar o lucro semanal.

80. Se $y = 2x^2 - 3$, (a) ache dy e Δy para $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}5$. (b) Trace um esboço do gráfico e indique os segmentos de reta cujos comprimentos são dy e Δy.

81. Se $y = 80x - 16x^2$, ache a diferença $\Delta y - dy$ se (a) $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}1$; (b) $x = 4$ e $\Delta x = -0{,}2$.

82. Se $x^3 + y^3 - 3xy^2 + 1 = 0$, ache dy no ponto $(1, 1)$ se $dx = 0{,}1$.

83. Use diferenciais para apoximar o volume de material necessário para fazer uma bola de borracha se o raio da câmara interna é 2 cm e a espessura da borracha é $\frac{1}{8}$ cm.

84. Um recipiente na forma de um cubo com um volume de 1.000 cm³ deve ser fabricado com seis quadrados iguais de um material que custa 20 centavos por centímetro quadrado. Com que precisão deve ser calculado o tamanho de cada quadrado, para que o custo total do material seja exatamente $5,00?

85. Se t s for o tempo para que um pêndulo complete sua volta, tendo ℓ cm de comprimento, então $4\pi^2\ell = gt^2$, onde $g = 32{,}2$. Qual será o efeito sobre o tempo, se for cometido um erro de 0,01 cm na medida do comprimento do pêndulo?

86. A medida do raio de um cone circular reto é $\frac{4}{3}$ vezes a medida da altura. Qual a exatidão com que a altura deverá ser medida se o erro no volume calculado não puder exceder 3 por cento?

87. (a) Se $f(x) = 3|x| + 4|x - 1|$, prove que f tem um valor mínimo absoluto de 3. (b) Se $g(x) = 4|x| + 3|x - 1|$, prove que g tem um valor mínimo absoluto de 3. (c) Se $a > 0$ e $b > 0$, e se $h(x) = a|x| + b|x - 1|$, prove que h tem um valor mínimo absoluto que é o menor dos dois números a e b.

88. Se $f(x) = |x|^a \cdot |x - 1|^b$, onde a e b são números racionais, prove que f tem um valor máximo relativo de $a^ab^b/(a + b)^{a+b}$.

89. Sejam f e g duas funções diferenciáveis em todo número no intervalo fechado $[a, b]$. Suponha, então, que $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$. Prove que existe um número c no intervalo aberto (a, b), tal que $f'(c) = g'(c)$. (*Sugestão:* considere a função $f - g$.)

90. Trace um esboço do gráfico de uma função f no intervalo I em cada caso: (a) I é o intervalo aberto $(0, 2)$ e f é contínua em I. Em 1, f tem um valor máximo relativo, mas $f'(1)$ não existe. (b) I é o intervalo fechado $[0, 2]$. A função f tem um valor mínimo relativo em 1, mas o valor mínimo absoluto de f está em 0. (c) I é o intervalo aberto $(0, 2)$, e f' tem um valor máximo relativo em 1.

Os exercícios de 91 a 94 pertencem à Secção Suplementar 4.10.

91. Use o método de Newton para determinar, com três casas decimais, a raiz positiva da equação $4x^4 - 3x^3 + 2x - 5 = 0$.

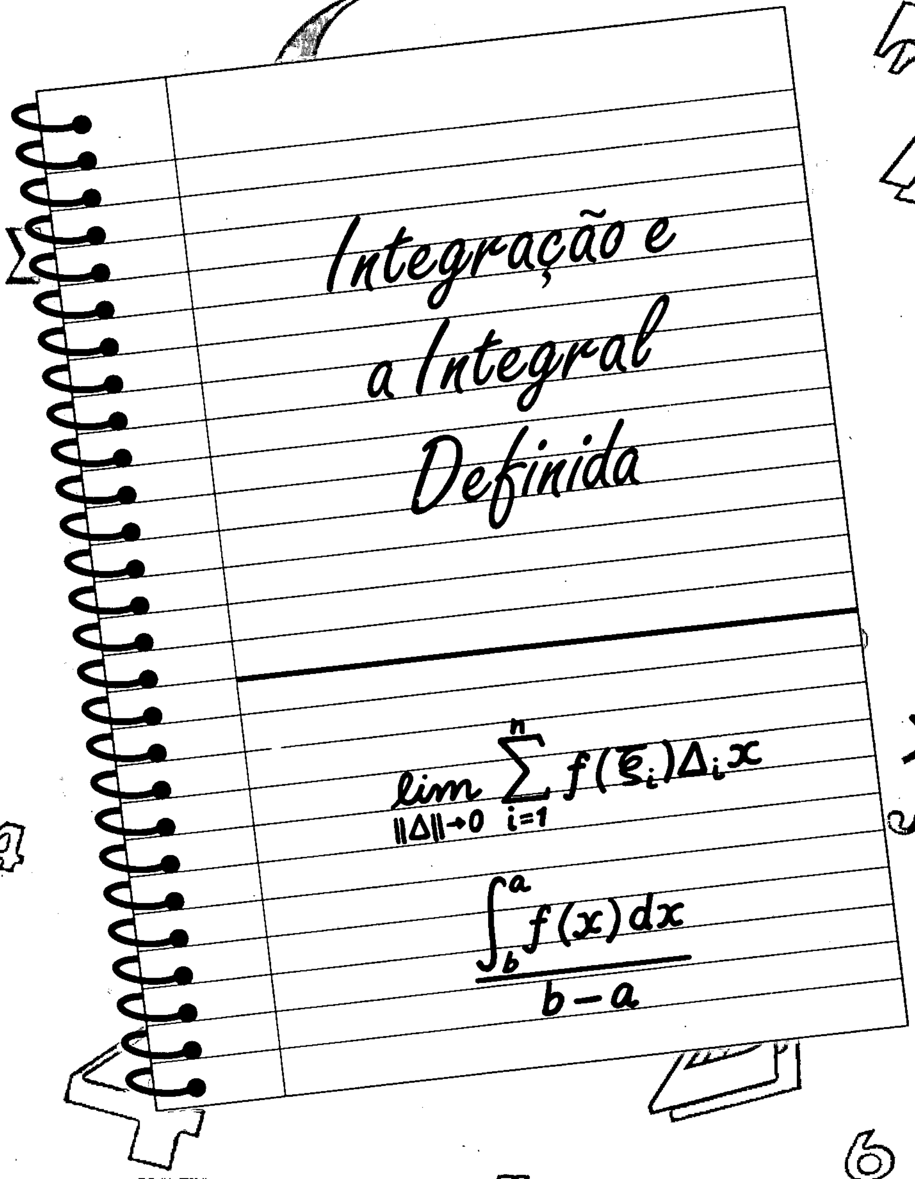
92. Use o método de Newton para determinar, em três casas decimais, a raiz negativa da equação $3x^4 - 4x^3 + 36x^2 + 2x - 8 = 0$.

93. Ache, com até quatro casas decimais, pelo método de Newton, a coordenada x do ponto de intersecção da curva $y = \operatorname{sen} x$ com a reta $y = 2x - 3$.

94. Ache, com até quatro casas decimais, o valor de x no intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ para o qual $tg\ x = x$, aplicando o método de Newton.

CINCO

Integração e a Integral Definida



$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

$$\frac{\int_b^a f(x)\,dx}{b-a}$$

Antidiferenciação, a operação inversa da diferenciação, é tratada nas duas primeiras secções deste capítulo, como preparação para seu uso na integração. Na Secção 5.3 usamos antidiferenciação para resolver *equações diferenciais com variáveis separáveis*, introduzindo aplicações ao movimento retilíneo.

Definimos a área de uma região plana na Secção 5.4, como um novo tipo de limite, e na Secção 5.5, é apresentada a definição de uma *integral definida* em termos desse limite. As Secções 5.6 e 5.7 são dedicadas a teoremas que dão as propriedades das integrais definidas. Essas propriedades são usadas na Secção 5.8 para provar os *teoremas fundamentais do Cálculo* que nos possibilitam avaliar a integral definida através do cálculo da antiderivada. Na Secção 5.9 aplicamos esse poderoso recurso para calcular áreas de regiões planas.

Na última secção do capítulo discutimos métodos numéricos para determinar um valor aproximado de uma integral definida. Os cálculos exigidos nesses processos são feitos facilmente por meio de calculadoras programáveis e computadores.

5.1 ANTIDIFERENCIAÇÃO

Você já está familiarizado com *operações inversas*. Adição e subtração, multiplicação e divisão são operações inversas, bem como potenciação e radiciação. Nesta secção, vamos desenvolver a operação inversa da diferenciação chamada de *antidiferenciação*. Vamos começar introduzindo a *antiderivada*.

5.1.1 DEFINIÇÃO

Uma função F será chamada de **antiderivada** de uma função f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Se F for definida por

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$$

então, $F'(x) = 12x^2 + 2x$. Assim, se f for a função definida por

$$f(x) = 12x^2 + 2x$$

logo, afirmamos que f é a derivada de F e que F é uma antiderivada de f. Se G for a função definida por

$$G(x) = 4x^3 + x^2 - 17$$

então, G também será uma antiderivada de f, pois $G'(x) = 12x^2 + 2x$. Na realidade, toda função cujos valores funcionais são dados por $4x^3 + x^2 + C$, onde C é uma constante qualquer, é uma antiderivada de f. ◄

Em geral, se uma função F for antiderivada de uma função f num intervalo I e se a função G for definida por

$$G(x) = F(x) + C$$

onde C é uma constante arbitrária, então

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

e G também será uma antiderivada de f no intervalo I.

Passaremos, agora, a demonstrar que se F for qualquer antiderivada particular de f num intervalo I, então toda antiderivada de f em I será dada por $F(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária. Necessitaremos primeiro de um teorema preliminar.

5.1.2 TEOREMA

Se f e g forem duas funções, tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo I, então haverá uma constante K, tal que

$$f(x) = g(x) + K \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Prova Seja h a função definida em I por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

assim sendo, para todo x em I,

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Mas, por hipótese, $f'(x) = g'(x)$ para todo x em I. Logo,

$$h'(x) = 0 \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Assim, o Teorema 4.3.3 aplica-se à função h e existe uma constante K, tal que

$$h(x) = K \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Substituindo $h(x)$ por $f(x) - g(x)$, obtemos

$$f(x) = g(x) + K \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

e o teorema está provado. ■

O próximo teorema segue, imediatamente, do Teorema 5.1.2.

5.1.3 TEOREMA Se F for uma antiderivada particular de f em um intervalo I, então toda antiderivada de f em I será dada por

$$F(x) + C \tag{1}$$

onde C é uma constante arbitrária e todas as antiderivadas de f em I poderão ser obtidas de (1), atribuindo-se certos valores a C.

Prova Suponha que G represente qualquer antiderivada de f em I; então

$$G'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ em } I \tag{2}$$

Como F é uma antiderivada particular de f em I,

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ em } I \tag{3}$$

De (2) e (3), segue que

$$G'(x) = F'(x) \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Logo, pelo Teorema 5.1.2, existe uma constante K, tal que

$$G(x) = F(x) + K \qquad \text{para todo } x \text{ em } I$$

Como G representa qualquer antiderivada de f em I, segue que toda antiderivada de f pode ser obtida de $F(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária. Assim, está provado o teorema. ■

Antidiferenciação é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma dada função. O símbolo $\int$ denota a operação de antidiferenciação e escrevemos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{4}$$

onde

$$F'(x) = f(x)$$

e

$$d(F(x)) = f(x)\,dx \tag{5}$$

Leibniz introduziu a convenção de escrever a diferencial de uma função após o símbolo de antidiferenciação. A vantagem dessa notação ficará evidente quando calcularmos antiderivadas, mudando a variável na Secção 5.2. De (4) e (5) podemos escrever

$$\boxed{\int d(F(x)) = F(x) + C}$$

Essa fórmula será usada para obter fórmulas de antidiferenciação nas secções a seguir; ela estabelece que quando antidiferenciamos a diferencial de uma função, obtemos a própria função mais uma constante arbitrária. Assim, podemos considerar que o símbolo de antidiferenciação $\int$ significa a operação inversa da operação denotada por d para o cálculo da diferencial.

Se $\{F(x) + C\}$ for o conjunto de todas as funções cuja diferencial é $f(x)\,dx$, também será o conjunto de todas as funções cujas derivadas são $f(x)$. Assim sendo, a antidiferenciação é considerada como a operação de encontrar o conjunto de todas as funções, tendo uma dada derivada.

Como a antidiferenciação é a operação inversa da diferenciação, os teoremas sobre antidiferenciação podem ser obtidos dos teoremas sobre diferenciação. Assim sendo, os teoremas a seguir podem ser provados a partir dos teoremas correspondentes da diferenciação.

5.1.4 TEOREMA

$$\int dx = x + C$$

5.1.5 TEOREMA

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

onde a é uma constante.

O Teorema 5.1.5 estabelece que para determinar uma antiderivada de uma constante vezes uma função, achamos primeiro uma antiderivada da função, multiplicando-a, em seguida, pela constante.

5.1.6 TEOREMA

Se f_1 e f_2 estão definidas no mesmo intervalo, então

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

O Teorema 5.1.6 estabelece que para determinar uma antiderivada da soma de duas funções, achamos primeiro a antiderivada de cada uma das funções separadamente e então, somamos os resultados, ficando subentendido que ambas as funções estão definidas no mesmo intervalo. O Teorema 5.1.6 pode ser estendido a um número qualquer, finito, de funções. Combinando o Teorema 5.1.6 com o Teorema 5.1.5, temos o teorema a seguir.

5.1.7 TEOREMA

Se $f_1, f_2, \ldots, f_n$ estão definidas no mesmo intervalo,

$$\int [c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x)]\,dx$$

$$= c_1\int f_1(x)\,dx + c_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + c_n\int f_n(x)\,dx$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes.

5.1.8 TEOREMA Se n for um número racional,

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Prova

$$D_x\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1}$$
$$= x^n$$

■

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Aplicando o Teorema 5.1.8 para valores específicos de n, temos

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}\,dx = \frac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C = \tfrac{3}{4}x^{4/3} + C$$

◀

A ilustração a seguir mostra como os Teoremas 5.1.4 até 5.1.8 são usados para antidiferenciar.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3**

$$\begin{aligned}\int (3x+5)\,dx &= \int 3x\,dx + \int 5\,dx && \text{(pelo Teorema 5.1.6)}\\ &= 3\int x\,dx + 5\int dx && \text{(pelo Teorema 5.1.5)}\\ &= 3\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 5(x + C_2) && \text{(pelos Teoremas 5.1.8 e 5.1.4)}\\ &= \tfrac{3}{2}x^2 + 5x + (3C_1 + 5C_2)\end{aligned}$$

Como $3C_1 + 5C_2$ é uma constante arbitrária, ela pode ser denotada por C; assim, o resultado pode ser escrito como

$$\tfrac{3}{2}x^2 + 5x + C$$

Pode-se conferir a resposta calculando sua derivada.

$$D_x(\tfrac{3}{2}x^2 + 5x + C) = 3x + 5$$

◀

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,dx &\\ &= 5\int x^4\,dx - 8\int x^3\,dx + 9\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 7\int dx\\ &= 5\cdot\frac{x^5}{5} - 8\cdot\frac{x^4}{4} + 9\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 7x + C\\ &= x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx &= \int x^{1/2}(x + x^{-1})\,dx\\ &= \int (x^{3/2} + x^{-1/2})\,dx\\ &= \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C\\ &= \tfrac{2}{5}x^{5/2} + 2x^{1/2} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}}\,dt$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}}\,dt &= 5\int \frac{t^2}{t^{4/3}}\,dt + 7\int \frac{1}{t^{4/3}}\,dt\\ &= 5\int t^{2/3}\,dt + 7\int t^{-4/3}\,dt\\ &= 5\left(\frac{t^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right) + 7\left(\frac{t^{-1/3}}{-\frac{1}{3}}\right) + C\\ &= 5(\tfrac{3}{5}t^{5/3}) + 7(-3t^{-1/3}) + C\\ &= 3t^{5/3} - \frac{21}{t^{1/3}} + C\end{aligned}$$

Os teoremas para a antiderivada das funções seno e co-seno seguem imediatamente dos teoremas correspondentes para diferenciação.

5.1.9 TEOREMA $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$

Prova $D_x(-\cos x) = -(-\operatorname{sen} x)$

$= \operatorname{sen} x$ ■

5.1.10 TEOREMA $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$

Prova $D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x$ ■

Os teoremas a seguir são conseqüências dos teoremas para as derivadas das funções tangente, co-tangente, secante e co-secante. As demonstrações também são imediatas, obtidas com o cálculo da derivada do segundo membro das fórmulas.

5.1.11 TEOREMA $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$

5.1.12 TEOREMA $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$

5.1.13 TEOREMA $\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$

5.1.14 TEOREMA $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int (3 \sec x \operatorname{tg} x - 5 \operatorname{cosec}^2 x) \, dx$$

Solução Aplicamos os Teoremas 5.1.13 e 5.1.12.

$$\begin{aligned}\int (3 \sec x \operatorname{tg} x - 5 \operatorname{cosec}^2 x) \, dx &= 3 \int \sec x \operatorname{tg} x \, dx - 5 \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx \\ &= 3 \sec x - 5(-\operatorname{cotg} x) + C \\ &= 3 \sec x + 5 \operatorname{cotg} x + C\end{aligned}$$

As identidades trigonométricas são freqüentemente usadas quando calculamos antiderivadas envolvendo funções trigonométricas. As oito identidades fundamentais a seguir são cruciais:

$$\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x = 1 \qquad \cos x \sec x = 1 \qquad \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad \operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int \frac{2 \operatorname{cotg} x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx$$

Solução

$$\begin{aligned} &\int \frac{2 \operatorname{cotg} x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx \\ &= 2 \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{cotg} x \, dx - 3 \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx \\ &= 2 \int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx - 3 \int \operatorname{sen} x \, dx \\ &= 2(-\operatorname{cosec} x) - 3(-\cos x) + C \qquad \text{(dos Teoremas 5.1.14 e 5.1.9)} \\ &= -2 \operatorname{cosec} x + 3 \cos x + C \end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 4) \, dx$$

Solução

$$\begin{aligned} &\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 4) \, dx \\ &= \int [(\sec^2 x - 1) + (\operatorname{cosec}^2 x - 1) + 4] \, dx \\ &= \int \sec^2 x \, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx + 2 \int dx \\ &= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + 2x + C \qquad \text{(dos Teoremas 5.1.11 e 5.1.12)} \end{aligned}$$

Freqüentemente, em aplicações envolvendo antidiferenciação, desejamos encontrar uma antiderivada específica que satisfaça determinadas condições chamadas **inicial** ou **lateral**, conforme elas ocorrem no ponto inicial ou para os pontos extremos do intervalo de definição da variável.* Por exemplo, se uma equação envolvendo $\frac{dy}{dx}$ for dada, bem como a condição inicial de que $y = y_1$ quando $x = x_1$, então depois que o conjunto de todas as antiderivadas for encontrado, se x e y forem substituídos por x_1 e y_1, iremos determinar um valor específico da constante arbitrária C. Com esse valor de C, uma determinada antiderivada é obtida.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Suponha que desejemos encontrar uma determinada função $y(x)$ satisfazendo a equação

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

(ou seja, uma antiderivada da função $f(x) = 2x$)
e a condição inicial de que $y = 6$ quando $x = 2$. Da fórmula

$$y = \int 2x \, dx \quad \text{temos} \quad y = x^2 + C \tag{6}$$

---

* **N. do T.**: As condições iniciais são também conhecidas como condições de Cauchy, e as condições laterais como condições de contorno, de fronteira ou de extremos.

Em (6), substituímos x por 2 e y por 6, obtendo

$$6 = 4 + C$$
$$C = 2$$

Quando esse valor de C é substituído em (6), obtemos

$$y = x^2 + 2$$

que dá a antiderivada desejada. ◀

EXEMPLO 7 Em qualquer ponto (x, y) de uma determinada curva, a reta tangente tem uma inclinação igual a $4x - 5$. Se a curva contém o ponto (3, 7), ache sua equação.

Solução Como a inclinação da reta tangente a uma curva em qualquer ponto (x, y) é o valor da derivada nesse ponto, temos

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 5$$
$$y = \int (4x - 5)\, dx$$
$$y = 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - 5x + C$$
$$y = 2x^2 - 5x + C \tag{7}$$

A Equação (7) representa uma *família* de curvas. Como queremos determinar uma certa curva dessa família que contenha o ponto (3, 7), substituímos x por 3 e y por 7 em (7), obtendo

$$7 = 2(9) - 5(3) + C$$
$$7 = 18 - 15 + C$$
$$C = 4$$

Substituindo C por 4 em (7), iremos obter a equação da curva pedida, que é

$$y = 2x^2 - 5x + 4$$

Na Secção 3.4 introduzimos as funções custo marginal e rendimento marginal, da economia. Elas são as derivadas primeiras, C' e R' da função custo total C e da função rendimento total R, respectivamente. Assim, C e R podem ser obtidas de C' e R' por antidiferenciação. Ao determinarmos a função C de C', a constante arbitrária pode ser avaliada se conhecermos o custo geral (isto é, o custo quando nenhuma unidade é produzida) ou o custo da produção de um número específico de unidades da mercadoria. Como em geral é verdade que a função rendimento total é zero quando o número de unidades produzidas é zero, esse fato pode ser usado para avaliar a constante arbitrária quando determinamos a função R de R'.

EXEMPLO 8 A função custo marginal C' é dada por

$$C'(x) = 4x - 8$$

quando $C(x)$ é o custo total da produção de x unidades. Se o custo da produção de 5 unidades for $ 20, ache a função custo total.

Solução Como $C'(x) = 4x - 8$

$$\begin{aligned} C(x) &= \int (4x - 8)\, dx \\ &= 2x^2 - 8x + k \end{aligned}$$

Como $C(5) = 20$, obtemos $k = 10$. Logo,

$$C(x) = 2x^2 - 8x + 10$$

Observe que como o custo marginal deve ser não-negativo, $4x - 8 \geqslant 0$ ou, de modo equivalente, $x \geqslant 2$. Portanto, o domínio de C é $[2, +\infty)$; lembre-se que embora x represente o número de unidades de uma mercadoria, supomos que x seja um número real para dar os requisitos de continuidade para as funções C e C'.

EXERCÍCIOS 5.1

Nos Exercícios de 1 a 36, faça a antidiferenciação. Nos Exercícios de 1 a 8, de 15 a 18 e de 31 a 34, verifique o resultado, calculando a derivada de sua resposta.

1. $\int 3x^4\, dx$ **2.** $\int 2x^7\, dx$ **3.** $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

4. $\int \frac{3}{t^5}\, dt$ **5.** $\int 5u^{3/2}\, du$ **6.** $\int 10\sqrt[3]{x^2}\, dx$

7. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ **8.** $\int \frac{3}{\sqrt{y}}\, dy$ **9.** $\int 6t^2\sqrt[3]{t}\, dt$

10. $\int 7x^3\sqrt{x}\, dx$ **11.** $\int (4x^3 + x^2)\, dx$

12. $\int (3u^5 - 2u^3)\, du$ **13.** $\int y^3(2y^2 - 3)\, dy$

14. $\int x^4(5 - x^2)\, dx$ **15.** $\int (3 - 2t + t^2)\, dt$

16. $\int (4x^3 - 3x^2 + 6x - 1)\, dx$

17. $\int (8x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 5)\, dx$

18. $\int (2 + 3x^2 - 8x^3)\, dx$ **19.** $\int \sqrt{x}(x + 1)\, dx$

20. $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$ **21.** $\int (x^{3/2} - x)\, dx$

22. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ **23.** $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right) dx$

24. $\int \left(3 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ **25.** $\int \frac{x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x}}\, dx$

26. $\int \frac{y^4 + 2y^2 - 1}{\sqrt{y}}\, dy$ **27.** $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

28. $\int \frac{27t^3 - 1}{\sqrt[3]{t}}\, dt$ **29.** $\int (3 \operatorname{sen} t - 2 \cos t)\, dt$

30. $\int (5 \cos x - 4 \operatorname{sen} x)\, dx$ **31.** $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$

32. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

33. $\int (4 \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x + 2 \sec^2 x)\, dx$

34. $\int (3 \operatorname{cosec}^2 t - 5 \sec t \operatorname{tg} t)\, dt$

35. $\int (2 \operatorname{cotg}^2 \theta - 3 \operatorname{tg}^2 \theta)\, d\theta$

36. $\int \frac{3 \operatorname{tg} \theta - 4 \cos^2 \theta}{\cos \theta}\, d\theta$

37. O ponto (3, 2) está numa curva e em qualquer ponto (x, y) sobre a curva a inclinação da reta tangente é igual a $2x - 3$. Ache uma equação da curva.

38. A inclinação da reta tangente num ponto qualquer (x, y) de uma curva é $3\sqrt{x}$. Se o ponto (9, 4) está na curva, ache uma equação para ela.

39. Os pontos $(-1, 3)$ e $(0, 2)$ estão numa curva e em qualquer ponto (x, y) da curva $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 4x$. Ache uma equação da curva. (Sugestão: faça $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}$ e obtenha uma equação envolvendo y', x e uma constante arbitrária C_1. Dessa equação, obtenha uma outra envolvendo y, x, C_1 e C_2. Usando as condições, calcule C_1 e C_2.)

40. Uma equação da reta tangente à curva no ponto (1, 3) é $y = x + 2$. Se em qualquer ponto (x, y) da curva $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$, ache uma equação da curva. Veja a sugestão para o Exercício 39.

41. Em qualquer ponto (x, y) de uma curva, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 - x^2$ e uma equação da reta tangente à curva no ponto (1, 1) é $y = 2 - x$. Ache uma equação da curva. Veja a sugestão dada no Exercício 39.

42. Em qualquer ponto (x, y) de uma curva, $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 2$ e (1, 3) é um ponto de inflexão no qual a inclinação da tangente de inflexão é -2. Ache uma equação da curva.

43. A função custo marginal é dada por $C'(x) = 3x^2 + 8x + 4$, e o custo geral é \$ 6. Ache a função custo total.

44. Uma empresa determinou que a função custo marginal para a produção de certa mercadoria é dada por $C'(x) = 125 + 10x + \frac{1}{9}x^2$, onde $C(x)$ é o custo total da produção de x unidades da mercadoria. Se o custo geral for de \$ 250, qual será o custo da produção de 15 unidades?

45. A função custo marginal é definida por $C'(x) = 6x$, onde $C(x)$ é o número de centenas de unidades monetárias no custo total de x centenas de unidades de certa mercadoria. Se o custo de 200 unidades for \$ 2000, ache (a) a função custo total e (b) o custo geral.

46. A função rendimento marginal para uma certa mercadoria é $R'(x) = 12 - 3x$. Se x unidades forem demandadas quando p unidades monetárias for o preço unitário, ache (a) a função rendimento total e (b) uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda).

47. Para um determinado artigo, a função rendimento marginal é dada por $R'(x) = 15 - 4x$. Se x unidades forem demandadas quando p unidades monetárias for o preço por unidade, ache (a) a função rendimento total e (b) uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda).

48. A eficiência de um operário é dada por uma porcentagem. Por exemplo, se a eficiência do trabalhador num dado intervalo de tempo for de 70%, então ele está trabalhando com 70% de todo o seu potencial. Suponha que E% seja a sua eficiência t horas após começar a trabalhar e que a taxa segundo a qual E está variando é $(35 - 8t)$%, a cada hora. Se a eficiência após 3 h de trabalho for de 81%, ache a sua eficiência após trabalhar (a) 4 h e (b) 8 h.

49. O volume de água num tanque é V m³ quando a profundidade da água é h m. Se a taxa de variação de V em relação a h for $\pi(4h^2 + 12h + 9)$, ache o volume de água no tanque quando a profundidade for de 3 m.

50. Um colecionador de arte comprou uma pintura por \$ 1.000 de um artista cujos trabalhos aumentam de valor em relação ao tempo, de acordo com a fórmula $\dfrac{dV}{dt} = 5t^{3/2} + 10t + 50$, onde V é o valor estimado de uma pintura t anos após sua compra. Se essa fórmula for válida pelos próximos 6 anos, qual o valor previsto para a pintura daqui a quatro anos?

51. Seja $f(x) = 1$ para todo x em $(-1, 1)$ e seja

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 < x \leqslant 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Então $f'(x) = 0$ para todo x em $(-1, 1)$ e $g'(x) = 0$, onde quer que exista g' em $(-1, 1)$. Mas, $f(x) \neq g(x) + K$ para x em $(-1, 1)$. Por que o Teorema 5.1.2 não é válido?

52. Seja

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

e $F(x) = |x|$. Mostre que $F'(x) = f(x)$ se $x \neq 0$. F é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$? Explique.

53. Seja $f(x) = |x|$ e F definida por

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$$

Mostre que F é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$.

54. Seja

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$$

Mostre que U não tem uma antiderivada em $(-\infty, +\infty)$. (*Sugestão*: suponha que U tenha uma antiderivada F em $(-\infty, +\infty)$ e uma contradição será obtida se mostrarmos, então, que pelo teorema do valor médio existe um número k, tal que $F(x) = x + k$ se $x > 0$ e $F(x) = k$ se $x < 0$.)

5.2 ALGUMAS TÉCNICAS DE ANTIDIFERENCIAÇÃO

Muitas antiderivadas não podem ser encontradas diretamente com a aplicação dos teoremas da Secção 5.1. E então, faz-se necessário aprender certas técnicas que podem ser usadas no cálculo de tais antiderivadas. Nesta secção discutiremos técnicas que requerem a *regra da cadeia para a antidiferenciação* e aquelas que envolvem uma mudança de variável.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Para diferenciar $\frac{1}{10}(1 + x^2)^{10}$ aplicamos a regra da cadeia para a diferenciação e obtemos

$$D_x[\tfrac{1}{10}(1 + x^2)^{10}] = (1 + x^2)^9(2x)$$

Suponha que desejamos antidiferenciar $(1 + x^2)^9(2x)$. Então, precisamos calcular

$$\int (1 + x^2)^9(2x\,dx) \tag{1}$$

Para chegarmos a um procedimento que possa ser usado em tal situação, seja

$$g(x) = 1 + x^2 \qquad g'(x)\,dx = 2x\,dx \tag{2}$$

Então, (1) pode ser escrito como

$$\int [g(x)]^9[g'(x)\,dx] \tag{3}$$

Do Teorema 5.1.8,

$$\int u^9\,du = \tfrac{1}{10}u^{10} + C \tag{4}$$

Observe que (3) é da mesma forma que o primeiro membro de (4). Assim,

$$\int [g(x)]^9[g'(x)\,dx] = \tfrac{1}{10}[g(x)]^{10} + C$$

e com $g(x)$ e $g'(x)\,dx$ dados em (2), temos

$$\int (1 + x^2)^9(2x\,dx) = \tfrac{1}{10}(1 + x^2)^{10} + C$$ ◀

A justificativa do procedimento usado para obter o resultado da Ilustração 1 é dada pelo teorema a seguir, que é análogo à regra da cadeia para diferenciação, sendo chamado de *regra da cadeia para antidiferenciação.*

5.2.1 TEOREMA A Regra da Cadeia para a Antidiferenciação

Seja g uma função diferenciável e seja o intervalo I a imagem de g. Suponha que f seja uma função definida em I e que F seja uma antiderivada de f em I. Então,

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

Prova Por hipótese,

$$F'(g(x)) = f(g(x)) \tag{5}$$

Pela regra da cadeia para diferenciação,

$$D_x[F(g(x))] = F'(g(x))[g'(x)]$$

Substituindo (5) nessa equação, obtemos

$$D_x[F(g(x))] = f(g(x))[g'(x)]$$

Da qual segue que

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

que é o que queríamos provar. ■

Como um caso particular do Teorema 5.2.1, a partir do Teorema 5.1.8, temos a fórmula da potência generalizada para antiderivadas, que enunciaremos a seguir.

5.2.2 TEOREMA

Se g for uma função diferenciável e se n for um número racional,

$$\int [g(x)]^n[g'(x)\,dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \sqrt{3x+4}\, dx$$

Solução Para aplicar o Teorema 5.2.2, escrevemos primeiro

$$\int \sqrt{3x+4}\, dx = \int (3x+4)^{1/2}\, dx$$

Observamos que, se

$$g(x) = 3x + 4 \quad \text{então} \quad g'(x)\, dx = 3\, dx \tag{6}$$

Logo, precisamos de um fator de 3 que acompanhe *dx* para dar $g'(x)\, dx$. Assim sendo, escrevemos

$$\begin{aligned}\int (3x+4)^{1/2}\, dx &= \int (3x+4)^{1/2}\tfrac{1}{3}(3\, dx)\\ &= \tfrac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\, dx)\end{aligned}$$

Do Teorema 5.2.2, com $g(x)$ e $g'(x)\, dx$ dados por (6), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\, dx) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C\\ &= \tfrac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Ache

$$\int x^2(5+2x^3)^8\, dx$$

Solução Observe que, se

$$g(x) = 5 + 2x^3 \quad \text{então} \quad g'(x)\, dx = 6x^2\, dx \tag{7}$$

Como

$$\int x^2(5+2x^3)^8\, dx = \int (5+2x^3)^8(x^2\, dx)$$

precisamos de um fator 6 que acompanhe $x^2\, dx$ para obter $g'(x)\, dx$. Assim, escrevemos

$$\int x^2(5+2x^3)^8\, dx = \tfrac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2\, dx)$$

Aplicando o Teorema 5.2.2 com $g(x)$ e $g'(x)\, dx$ dado em (7), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2\, dx) &= \frac{1}{6}\cdot\frac{(5+2x^3)^9}{9} + C\\ &= \tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9 + C\end{aligned}$$

A regra da cadeia para a antidiferenciação (Teorema 5.2.1) é

$$\int f(g(x))[g'(x)\, dx] = F(g(x)) + C$$

onde *F* é uma antiderivada de *f*. Se nessa fórmula *f* for a função co-seno, então *F* será a função seno e teremos

$$\int \cos(g(x))[g'(x)\, dx] = \operatorname{sen}(g(x)) + C \tag{8}$$

Vamos usar essa fórmula no próximo exemplo.

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int x \cos x^2 \, dx$$

Solução Se

$$g(x) = x^2 \quad \text{então} \quad g'(x)\,dx = 2x\,dx \tag{9}$$

Como

$$\int x \cos x^2 \, dx = \int (\cos x^2)(x\,dx)$$

precisamos de um fator de 2 acompanhando $x\,dx$ para obter $g'(x)\,dx$. Assim, escrevemos

$$\int x \cos x^2 \, dx = \tfrac{1}{2} \int (\cos x^2)(2x\,dx)$$

Aplicando (8) com $g(x)$ e $g'(x)\,dx$ dados por (9), iremos obter

$$\tfrac{1}{2} \int (\cos x^2)(2x\,dx) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C$$

Os detalhes das soluções dos Exemplos 1, 2 e 3 podem ser simplificados, não estabelecendo especificamente $g(x)$ e $g'(x)\,dx$. A solução do Exemplo 1, então, toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3x+4}\,dx &= \frac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\,dx)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C\\ &= \tfrac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C\end{aligned}$$

A solução do Exemplo 2 pode ser obtida por

$$\begin{aligned}\int x^2(5+2x^3)^8\,dx &= \frac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2\,dx)\\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{(5+2x^3)^9}{9} + C\\ &= \tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9 + C\end{aligned}$$

e a solução do Exemplo 3 pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int x\cos x^2\,dx &= \tfrac{1}{2}\int (\cos x^2)(2x\,dx)\\ &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \frac{4x^2\,dx}{(1-8x^3)^4}$$

Solução Como $d(1 - 8x^3) = -24x^2\,dx$, escrevemos

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2\,dx}{(1-8x^3)^4} &= 4\int(1-8x^3)^{-4}(x^2\,dx)\\ &= 4\left(-\frac{1}{24}\right)\int(1-8x^3)^{-4}(-24x^2\,dx)\\ &= -\frac{1}{6}\cdot\frac{(1-8x^3)^{-3}}{-3}+C\\ &= \frac{1}{18(1-8x^3)^3}+C\end{aligned}$$

Os resultados de cada um dos exemplos acima podem ser verificados através do cálculo da derivada da resposta.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** No Exemplo 2 tínhamos

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx = \tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9 + C$$

Verificando por diferenciação, obtemos

$$\begin{aligned}D_x[\tfrac{1}{54}(5+2x^3)^9] &= \tfrac{1}{54}\cdot 9(5+2x^3)^8(6x^2)\\ &= x^2(5+2x^3)^8\end{aligned}$$ ◀

Algumas vezes é possível calcular uma antiderivada após efetuarmos a mudança de uma variável, conforme mostra o exemplo a seguir.

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$$

Solução Seja

$u = 1 + x \qquad du = dx \qquad x = u - 1$

Temos

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x}\,dx &= \int(u-1)^2u^{1/2}\,du\\ &= \int(u^2-2u+1)u^{1/2}\,du\\ &= \int u^{5/2}\,du - 2\int u^{3/2}\,du + \int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{u^{7/2}}{\frac{7}{2}} - 2\cdot\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C\\ &= \tfrac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Um método alternativo para a solução do Exemplo 5 é tomar

$v = \sqrt{1+x} \qquad v^2 = 1 + x$

$x = v^2 - 1 \qquad dx = 2v\,dv$

O cálculo, então, é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x}\,dx &= \int (v^2-1)^2\cdot v\cdot(2v\,dv)\\ &= 2\int v^6\,dv - 4\int v^4\,dv + 2\int v^2\,dv\\ &= \tfrac{2}{7}v^7 - \tfrac{4}{5}v^5 + \tfrac{2}{3}v^3 + C\\ &= \tfrac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Verificando por diferenciação, obtemos

$$\begin{aligned}&D_x[\tfrac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \tfrac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}]\\ &\quad= (1+x)^{5/2} - 2(1+x)^{3/2} + (1+x)^{1/2}\\ &\quad= (1+x)^{1/2}[(1+x)^2 - 2(1+x) + 1]\\ &\quad= (1+x)^{1/2}[1 + 2x + x^2 - 2 - 2x + 1]\\ &\quad= x^2\sqrt{1+x}\end{aligned}$$

◀

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solução Seja

$$u = \sqrt{x} \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} &= 2\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)\\ &= 2\int \operatorname{sen}\,u\,du\\ &= -2\cos u + C\\ &= -2\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 7 Calcule

$$\int \operatorname{sen} x\sqrt{1-\cos x}\,dx$$

Solução Seja

$$u = 1 - \cos x \qquad du = \operatorname{sen}\,x\,dx$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x\sqrt{1-\cos x}\,dx &= \int u^{1/2}\,du\\ &= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C\\ &= \tfrac{2}{3}(1-\cos x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 8 Calcule $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x \, dx$ por dois métodos: (a) seja $u = tg\ x$; (b) seja $v = \sec x$; (c) Explique a diferença nas respostas de (a) e de (b).

Solução

(a) Se $u = \operatorname{tg} x$, então $du = \sec^2 x \, dx$. Temos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x \sec^2 x \, dx &= \int u \, du \\ &= \frac{u^2}{2} + C \\ &= \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + C\end{aligned}$$

(b) Se $v = \sec x$, então $dv = \sec x \operatorname{tg} x \, dx$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x \sec^2 x \, dx &= \int \sec x (\sec x \operatorname{tg} x \, dx) \\ &= \int v \, dv \\ &= \frac{v^2}{2} + C \\ &= \tfrac{1}{2} \sec^2 x + C\end{aligned}$$

(c) Como $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, as funções definidas por $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$ e $\frac{1}{2} \sec^2 x$ diferem por uma constante e, assim sendo, cada uma serve como antiderivada de $\operatorname{tg} x \sec^2 x$. Além disso, podemos escrever

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} \sec^2 x + C &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C \\ &= \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \tfrac{1}{2} + C \\ &= \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + K \qquad \text{onde } K = \tfrac{1}{2} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 9 Um ferimento está cicatrizando de tal forma que t dias a partir de segunda-feira, a área da ferida decresce a uma taxa de $-3(t + 2)^{-2}$ cm² por dia. Se na terça-feira a área do ferimento fora 2 cm², (a) qual teria sido a sua área na segunda-feira e (b) qual a área prevista na sexta-feira, se o ferimento continuar a cicatrizar na mesma taxa?

Solução Seja A cm² a área do ferimento t dias desde segunda-feira. Então,

$$\frac{dA}{dt} = -3(t + 2)^{-2}$$

$$A = -3 \int (t + 2)^{-2} \, dt$$

Como $d(t + 2) = dt$, obtemos

$$A = -3 \cdot \frac{(t + 2)^{-1}}{-1} + C$$

$$A = \frac{3}{t + 2} + C \tag{10}$$

Como na terça-feira a área do ferimento foi 2 cm², sabemos que quando $t = 1$ então $A = 2$. Substituindo esses valores em (10), obtemos

$$2 = 1 + C$$

$$C = 1$$

Logo, de (10),

$$A = \frac{3}{t+2} + 1 \tag{11}$$

(a) Na segunda-feira $t = 0$. Seja A_0 o valor de A quando $t = 0$. De (11),

$$\begin{aligned} A_0 &= \tfrac{3}{2} + 1 \\ &= \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Assim, na segunda-feira, a área do ferimento era 2,5 cm².

(b) Na sexta-feira, $t = 4$. Seja A_4 o valor de A quando $t = 4$. De (11),

$$\begin{aligned} A_4 &= \tfrac{3}{6} + 1 \\ &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Logo, na sexta-feira a área prevista do ferimento será de 1,5 cm².

EXERCÍCIOS 5.2

Nos Exercícios de 1 a 52, efetue a antidiferenciação.

1. $\int \sqrt{1 - 4y}\, dy$
2. $\int \sqrt[3]{3x - 4}\, dx$
3. $\int \sqrt[3]{6 - 2x}\, dx$
4. $\int \sqrt{5r + 1}\, dr$
5. $\int x\sqrt{x^2 - 9}\, dx$
6. $\int 3x\sqrt{4 - x^2}\, dx$
7. $\int x^2(x^3 - 1)^{10}\, dx$
8. $\int x(2x^2 + 1)^6\, dx$
9. $\int 5x\sqrt[3]{(9 - 4x^2)^2}\, dx$
10. $\int \frac{x\, dx}{(x^2 + 1)^3}$
11. $\int \frac{y^3\, dy}{(1 - 2y^4)^5}$
12. $\int \frac{s\, ds}{\sqrt{3s^2 + 1}}$
13. $\int (x^2 - 4x + 4)^{4/3}\, dx$
14. $\int x^4\sqrt{3x^5 - 5}\, dx$
15. $\int x\sqrt{x + 2}\, dx$
16. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{t + 3}}$
17. $\int \frac{2r\, dr}{(1 - r)^7}$
18. $\int x^3(2 - x^2)^{12}\, dx$
19. $\int \sqrt{3 - 2x}\, x^2\, dx$
20. $\int (x^3 + 3)^{1/4}x^5\, dx$
21. $\int \cos 4\theta\, d\theta$
22. $\int \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}x\, dx$
23. $\int 6x^2 \operatorname{sen} x^3\, dx$
24. $\int \tfrac{1}{2}t \cos 4t^2\, dt$
25. $\int \sec^2 5x\, dx$
26. $\int \operatorname{cosec}^2 2\theta\, d\theta$
27. $\int y \operatorname{cosec} 3y^2 \operatorname{cotg} 3y^2\, dy$
28. $\int r^2 \sec^2 r^3\, dr$
29. $\int \cos x(2 + \operatorname{sen} x)^5\, dx$
30. $\int \frac{4 \operatorname{sen} x\, dx}{(1 + \cos x)^2}$
31. $\int \sqrt{1 + \frac{1}{3x}}\, \frac{dx}{x^2}$
32. $\int \sqrt{\frac{1}{t} - 1}\, \frac{dt}{t^2}$
33. $\int 2 \operatorname{sen} x \sqrt[3]{1 + \cos x}\, dx$
34. $\int \operatorname{sen} 2x\sqrt{2 - \cos 2x}\, dx$
35. $\int \cos^2 t \operatorname{sen} t\, dt$
36. $\int \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta\, d\theta$
37. $\int (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 2x)^2\, dx$
38. $\int \frac{\frac{1}{2}\cos \frac{1}{4}x}{\sqrt{\operatorname{sen} \frac{1}{4}x}}\, dx$
39. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{1 - 2 \operatorname{sen} 3x}}\, dx$
40. $\int \frac{\sec^2 3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$
41. $\int \frac{(x^2 + 2x)\, dx}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}}$
42. $\int x(x^2 + 1)\sqrt{4 - 2x^2 - x^4}\, dx$
43. $\int \frac{x(3x^2 + 1)\, dx}{(3x^4 + 2x^2 + 1)^2}$
44. $\int \sqrt{3 + s}(s + 1)^2\, ds$
45. $\int \frac{(y + 3)\, dy}{(3 - y)^{2/3}}$
46. $\int (2t^2 + 1)^{1/3}t^3\, dt$
47. $\int \frac{(r^{1/3} + 2)^4\, dr}{\sqrt[3]{r^2}}$
48. $\int \left(t + \frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2 - 1}{t^2}\right) dt$
49. $\int \frac{x^3\, dx}{(x^2 + 4)^{3/2}}$
50. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1 - 2x^2}}$
51. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\cos x)\, dx$
52. $\int \sec x \operatorname{tg} x \cos(\sec x)\, dx$

53. Calcule $\int (2x + 1)^3\, dx$ por dois métodos: (a) expandindo $(2x + 1)^3$ pelo teorema do binômio; (b) tomando $u = 2x + 1$. (c) Explique a diferença entre as respostas de (a) e (b).

54. Calcule $\int x(x^2 + 2)^2\, dx$ por dois métodos: (a) expandindo $(x^2 + 2)^2$ e multiplicando o resultado por x; (b) tomando $u = x^2 + 2$. (c) Explique a diferença entre as respostas de (a) e (b).

55. Calcule $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}\, dx$ por dois métodos: (a) expandindo $(\sqrt{x} - 1)^2$ e multiplicando o resultado por $x^{-1/2}$; (b) tomando $u = \sqrt{x} - 1$. (c) Explique a diferença entre as respostas de (a) e (b).

56. Calcule $\int \sqrt{x - 1}\, x^2\, dx$ por dois métodos: (a) tomando $u = x - 1$; (b) tomando $v = \sqrt{x - 1}$.

57. Calcule $\int 2 \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ por três métodos: (a) tomando $u = \operatorname{sen} x$; (b) tomando $u = \cos x$; (c) usando a identidade $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$. (d) Explique a diferença entre as respostas de (a), (b) e (c).

58. Calcule $\int \operatorname{cosec}^2 x \operatorname{cotg} x\, dx$ por dois métodos: (a) tomando $u = \operatorname{cotg} x$; (b) tomando $v = \operatorname{cosec} x$. (c) Explique a diferença entre as respostas de (a) e (b).

59. A função custo marginal para um determinado artigo é dada por $C'(x) = 3(5x + 4)^{-1/2}$. Se o custo geral for \$ 10, ache a função custo total.

60. Para uma certa mercadoria, a função custo marginal é dada por $C'(x) = 3\sqrt{2x + 4}$. Se o custo geral for zero, determine a função custo total.

61. Se x unidades forem demandadas quando p for o preço unitário, ache uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda) de uma mercadoria para a qual a função rendimento marginal é dada por $R'(x) = 4 + 10(x + 5)^{-2}$.

62. A função rendimento marginal para uma certa mercadoria é dada por $R'(x) = ab(x + b)^{-2} - c$. Ache (a) a função rendimento total e (b) uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda), onde x unidades são demandadas quando p unidades monetárias for o preço unitário.

63. Se q coulombs for a carga de eletricidade recebida por um condensador de um circuíto elétrico de i ampères em t s, então $i = \frac{dq}{dt}$. Se $i = 5 \operatorname{sen} 60t$ e $q = 0$ quando $t = \frac{\pi}{2}$, ache a carga positiva máxima no condensador.

64. Faça o Exercício 63 se $i = 4 \cos 120t$ e $q = 0$ quando $t = 0$.

65. O custo de certa peça de maquinaria é \$ 700 e seu valor é depreciado com o tempo, de acordo com a fórmula $\frac{dV}{dt} = -500(t + 1)^{-2}$, onde V é seu valor t anos após a compra. Qual o valor da peça três anos após sua compra?

66. O volume de um balão cresce de acordo com a fórmula $\frac{dV}{dt} = \sqrt{t + 1} + \frac{2}{3}t$, onde V cm³ é o seu volume em t s. Se $V = 33$ quando $t = 3$, ache (a) uma fórmula para V em termos de t; (b) o volume do balão em 8 s.

67. Durante os primeiros 10 dias de dezembro, a célula de uma planta cresceu de tal forma que t dias após o 1º de dezembro o volume da célula estava crescendo a uma taxa de $(12 - t)^{-2}$ μm³ por dia. Se em 3 de dezembro o volume da célula era de 3 μm³, qual seria o volume esperado no dia 8 de dezembro?

68. O volume de água em um tanque é V m³ quando a profundidade é h m. Se a taxa de variação de V em relação a h for dada por $\frac{dV}{dh} = \pi(2h + 3)^2$, ache o volume de água no tanque quando a profundidade for 3 m.

5.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MOVIMENTO RETILÍNEO

Uma equação contendo derivadas é chamada de **equação diferencial**. Alguns exemplos simples de equações diferenciais são

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{3y^3} \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 3 \tag{3}$$

A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. Logo, (1) e (2) são equações diferenciais de primeira ordem e (3) é de segunda ordem. O tipo mais simples de equação diferencial é a equação de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

da qual (1) é um exemplo. Escrevendo-a com diferenciais, temos

$$dy = f(x)\,dx \tag{4}$$

Outro tipo de equação diferencial de primeira ordem é da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

A equação (2) é um exemplo desse tipo. Se essa equação for escrita com diferenciais, temos

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx \tag{5}$$

Em ambos (4) e (5), o primeiro membro envolve somente a variável y, enquanto que o segundo membro, somente a variável x. Assim, as variáveis estão separadas e dizemos que elas são **equações diferenciais com variáveis separáveis.**

Considere a equação (4), que é

$$dy = f(x)\,dx$$

Para resolver essa equação, precisamos encontrar todas as funções G para as quais $y = G(x)$, tais que a equação esteja satisfeita. Assim, se F for uma antiderivada de f, todas as funções G serão definidas por $G(x) = F(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária. Isto é, se

$$\begin{aligned} d(G(x)) &= d(F(x) + C) \\ &= f(x)\,dx \end{aligned}$$

então, o que chamamos de **solução completa** de (4) é dada por

$$y = F(x) + C$$

Essa equação representa uma família de funções dependendo de uma constante arbitrária C, sendo chamada de **família dependente de um parâmetro**. Os gráficos dessas funções formam uma família de curvas no plano dependente de um parâmetro e, por um ponto (x_1, y_1) qualquer do plano, passa uma única curva da família.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Queremos encontrar uma solução completa da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{6}$$

Separamos as variáveis, escrevendo a equação com diferenciais como

$$dy = 2x\,dx$$

Antidiferenciamos ambos os lados da equação e obtemos

$$\int dy = \int 2x\,dx$$

$$y + C_1 = x^2 + C_2$$

Como $C_2 - C_1$ é uma constante arbitrária se C_2 e C_1 forem arbitrárias, podemos substituir $C_2 - C_1$ por C, obtendo então

$$y = x^2 + C \tag{7}$$

que é a solução completa da equação diferencial (6).

A equação (7) representa uma família de funções dependentes de um parâmetro. A Figura 1 mostra esboços dos gráficos das funções correspondentes a $C = -4$, $C = -1$, $C = 0$, $C = 1$ e $C = 2$. ◀

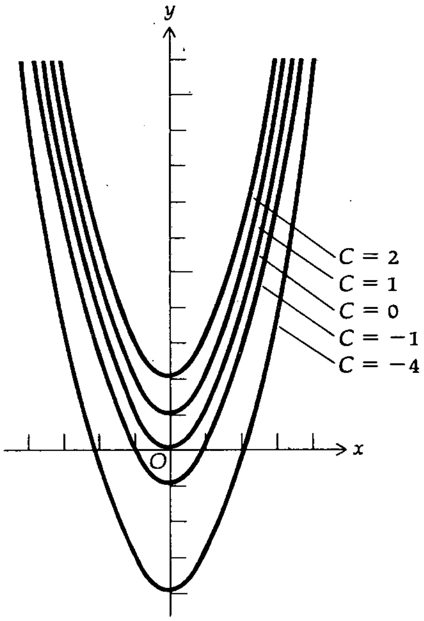


FIGURA 1

Consideremos (5), que é

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

Se antiderivarmos ambos os membros da equação, escreveremos

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

Se H for uma antiderivada de h, e G for uma antiderivada de g, a solução completa de (5) será dada por

$$H(y) = G(x) + C$$

EXEMPLO 1 Ache a solução completa da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{3y^3}$$

Solução Se escrevermos a equação dada com diferenciais, teremos

$$3y^3\,dy = 2x^2\,dx$$

e as variáveis estarão separadas. Antidiferenciando ambos os membros da equação, obtemos

$$\int 3y^3\,dy = \int 2x^2\,dx$$

$$\frac{3y^4}{4} = \frac{2x^3}{3} + \frac{C}{12}$$

$$9y^4 = 8x^3 + C$$

que é a solução completa.

Primeiro, a constante arbitrária foi escrita como $C/12$; assim, multiplicando ambos os membros da equação por 12, a constante arbitrária torna-se C.

Na ilustração a seguir mostramos como obter uma solução para uma equação diferencial de primeira ordem, quando as condições iniciais são dadas.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Para encontrar a solução da equação diferencial (6), satisfazendo a condição inicial de que $y = 6$ quando $x = 2$, substituímos esses valores em (7) e resolvemos em C, obtendo $6 = 4 + C$ ou $C = 2$. Substuindo esse valor de C em (7), obtemos

$$y = x^2 + 2$$

que é a solução desejada. ◀

A equação (3) é exemplo de um tipo particular de equação de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

Duas antidiferenciações sucessivas são necessárias para resolvê-la, e duas constantes arbitrárias ocorrem na solução completa. Assim sendo, a sua solução completa representa uma **família de funções dependente de dois parâmetros** e seus gráficos formam uma família de curvas dependente de dois parâmetros no plano. Os exemplos a seguir mostram como obter a solução completa de uma equação desse tipo.

EXEMPLO 2 Ache a solução completa da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x + 3$$

Solução Como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

tomando $y' = \frac{dy}{dx}$, podemos escrever a equação dada como

$$\frac{dy'}{dx} = 4x + 3$$

Assim, com diferenciais, temos

$$dy' = (4x + 3)\,dx$$

Antidiferenciando, obtemos

$$\int dy' = \int (4x + 3)\,dx$$

$$y' = 2x^2 + 3x + C_1$$

Como $y' = \frac{dy}{dx}$, fazemos essa substituição na expressão acima resultando que

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 3x + C_1$$

$$dy = (2x^2 + 3x + C_1)\,dx$$

$$\int dy = \int (2x^2 + 3x + C_1)\,dx$$

$$y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

que é a solução completa.

EXEMPLO 3 Ache uma solução da equação diferencial do Exemplo 2 para a qual $y = 2$ e $y' = 3$ quando $x = 1$.

Solução Como $y' = 2x^2 + 3x + C_1$, substituímos y' por -3 e x por 1, obtendo $-3 = 2 + 3 + C_1$, ou $C_1 = -8$. Substituindo esse valor de C_1 na solução completa, obtemos

$$y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 8x + C_2$$

Como $y = 2$ quando $x = 1$, substituímos esses valores na equação acima obtendo $2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 8 + C_2$, da qual temos que $C_2 = \frac{47}{6}$. A solução particular desejada é, então,

$$y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 8x + \tfrac{47}{6}$$

Vimos nas Secções 3.4 e 3.10 que se considerarmos o movimento de uma partícula ao longo de uma linha reta, quando é dada uma equação de movimento, $s = f(t)$, então a velocidade e a aceleração instantâneas poderão ser determinadas pelas expressões:

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

Assim sendo, se nos for dado v ou a como uma função de t, bem como condições laterais e/ou condições iniciais, é possível determinar a equação de movimento resolvendo uma equação diferencial. Esse procedimento está ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 Uma partícula move-se ao longo de uma linha reta; em t s, s cm é a distância da partícula à origem, v cm/s é a sua velocidade e a cm/s^2 é a sua aceleração. Se

$$a = 2t - 1$$

e $v = 3$ e $s = 4$ quando $t = 1$, expresse v e s como funções de t.

Solução Como $a = \dfrac{dv}{dt}$, temos a equação diferencial

$$\frac{dv}{dt} = 2t - 1$$

$$dv = (2t - 1)\,dt$$

$$\int dv = \int (2t - 1)\,dt$$

$$v = t^2 - t + C_1 \tag{8}$$

Substituindo $v = 3$ e $t = 1$ em (8), temos

$$3 = 1 - 1 + C_1$$

$$C_1 = 3$$

Substituindo esse valor de C_1 em (8), obtemos

$$v = t^2 - t + 3$$

que expressa v como uma função de t. Agora, tomando $v = \frac{ds}{dt}$ nessa equação, temos

$$\frac{ds}{dt} = t^2 - t + 3$$

$$ds = (t^2 - t + 3)\,dt$$

$$\int ds = \int (t^2 - t + 3)\,dt$$

$$s = \tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + 3t + C_2 \tag{9}$$

Substituímos em (9) $s = 4$ e $t = 1$, obtendo

$$4 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + 3 + C_2$$

$$C_2 = \tfrac{7}{6}$$

Assim, substituindo C_2 por $\frac{7}{6}$ em (9) expressamos s como uma função de t:

$$s = \tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + 3t + \tfrac{7}{6}$$

EXEMPLO 5 Uma partícula move-se sobre uma linha reta onde v cm/s é a velocidade da partícula em t s e

$$v = \cos 2\pi t$$

Se a direção positiva estiver à direita da origem e a partícula estiver a 5 cm à direita da origem, no início do movimento, ache a posição $\frac{1}{3}$ s depois.

Solução Seja s cm a distância orientada da partícula a partir da origem em t s. Como $v = \frac{ds}{dt}$,

$$\frac{ds}{dt} = \cos 2\pi t$$

$$ds = \cos 2\pi t\,dt$$

$$\int ds = \int \cos 2\pi t\,dt$$

$$s = \frac{1}{2\pi}\int \cos 2\pi t(2\pi\,dt)$$

$$s = \frac{1}{2\pi}\,\text{sen}\,2\pi t + C$$

Como $s = 5$ quando $t = 0$,

$$5 = \frac{1}{2\pi}\,\text{sen}\,0 + C$$

$$C = 5$$

Logo, a equação de movimento é

$$s = \frac{1}{2\pi}\,\text{sen}\,2\pi t + 5$$

Seja $s = \bar{s}$ quando $t = \frac{1}{3}$. Então,

$$\begin{aligned}\bar{s} &= \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi + 5\\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 5\\ &\approx 5{,}14\end{aligned}$$

Assim, a partícula está a 5,14 cm à direita da origem, $\frac{1}{3}$ s após o início do movimento.

Se um objeto se move livremente numa reta vertical e está sendo puxado em direção à terra pela força da gravidade, a aceleração devido à *gravidade*, denotada por g m/s², varia com a distância do objeto ao centro da Terra. Entretanto, para pequenas variações da distância, a aceleração, devido à gravidade é quase constante e um valor aproximado de g, se o objeto estiver próximo ao nível do mar, será 10 m/s².

EXEMPLO 6 Uma pedra é atirada verticalmente para cima, partindo do solo, com uma velocidade inicial de 20 m/s. Se a única força considerada for aquela atribuída à aceleração devido à gravidade, ache (a) quanto tempo levará para a pedra atingir o chão (b) a velocidade com que a pedra atinge o chão e (c) qual a altura máxima atingida pela pedra.

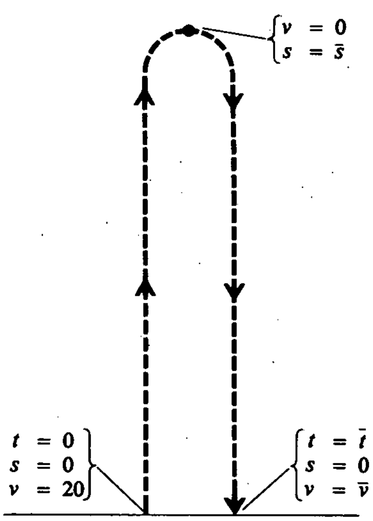


FIGURA 2

Solução O movimento da pedra está ilustrado na Figura 2. A direção positiva é para cima.

Seja t s o tempo decorrido desde o lançamento da pedra, s m a distância percorrida pela pedra em t s, v m/s a velocidade da pedra em t s e $|v|$ m/s a velocidade escalar da pedra em t s.

Quando a pedra atinge o chão, $s = 0$. Sejam $\bar{t}$ e $\bar{v}$ os valores de t e v quando $s = 0$ e $t \neq 0$. A pedra está em seu ponto mais alto quando $v = 0$. Seja $\bar{s}$ o valor de s quando $v = 0$. A Tabela 1 mostra as condições laterais.

Tabela 1

t	s	v
0	0	20
	$\bar{s}$	0
$\bar{t}$	0	$\bar{v}$

Como a única aceleração presente é a da gravidade, a qual é vertical e dirigida para baixo, a aceleração tem um valor constante que tomaremos como sendo de -10 m/s². Uma vez que a aceleração é dada por $\frac{dv}{dt}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -10\\ dv &= -10\,dt\\ \int dv &= -10\int dt\\ v &= -10t + C_1\end{aligned}$$

Mas $v = 20$ quando $t = 0$ e, substituindo esses valores na equação acima, iremos obter $C_1 = 20$. Logo,

$$v = -10t + 20 \tag{10}$$

Como $v = \dfrac{ds}{dt}$,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -10t + 20 \\ ds &= (-10t + 20)\,dt \\ \int ds &= \int (-10t + 20)\,dt \\ s &= -5t^2 + 20t + C_2 \end{aligned}$$

Com $s = 0$ quando $t = 0$, então $C_2 = 0$; portanto, da equação acima resulta

$$s = -5t^2 + 20t \tag{11}$$

(a) Em (11) substituímos t por $\bar{t}$ e s por 0, obtendo

$$0 = -5\bar{t}(\bar{t} - 4)$$

donde concluímos que $\bar{t} = 0$ ou $\bar{t} = 4$. O valor 0, contudo, ocorre quando a pedra é atirada para cima; assim sendo, a pedra leva 4 s para chegar ao chão.

(b) Para obter $\bar{v}$ usamos (10), substituindo t por 4 e v por $\bar{v}$:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= -10(4) + 20 \\ &= -20 \end{aligned}$$

Assim, $|\bar{v}| = 20$ e a pedra chega ao solo com uma velocidade escalar de 20 m/s.

(c) Para encontrar $\bar{s}$ procuramos primeiro o valor de t para o qual $v = 0$. De (10), $t = 2$ quando $v = 0$. Substituindo em (11) t por 2 e s por $\bar{s}$, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{s} &= -5 \cdot (4) + 20(2) \\ &= 20 \end{aligned}$$

Portanto, a pedra irá atingir 20 m de altura.

EXERCÍCIOS 5.3

Nos Exercícios de 1 a 14, ache a solução completa da equação diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 4x - 5$
2. $\dfrac{dy}{dx} = 6 - 3x^2$
3. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 7$
4. $\dfrac{ds}{dt} = 5\sqrt{s}$
5. $\dfrac{dy}{dx} = 3xy^2$
6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{y} - y}$
7. $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{3v\sqrt{1 + u^2}}{u}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2\sqrt{x^3 - 3}}{y^2}$
9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 y}$
10. $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{\cos 2v}{\operatorname{sen} 3u}$
11. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 5x^2 + 1$
12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{2x - 3}$
13. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \operatorname{sen} 3t + \cos 3t$
14. $\dfrac{d^2u}{dv^2} = \operatorname{tg} v \sec^2 v$

Nos Exercícios de 15 a 20, ache a solução da equação diferencial dada, determinada pelas condições iniciais.

15. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 2x - 4$; $y = -6$ quando $x = 3$

16. $\dfrac{dy}{dx} = (x + 1)(x + 2)$; $y = -\frac{3}{2}$ quando $x = -3$

17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 2y}$; $y = \frac{1}{3}\pi$ quando $x = \frac{1}{2}\pi$

18. $\dfrac{ds}{dt} = \cos \frac{1}{2}t$; $s = 3$ quando $t = \frac{1}{3}\pi$

19. $\dfrac{d^2u}{dv^2} = 4(1 + 3v)^2$; $u = -1$ e $\dfrac{du}{dv} = -2$ quando $v = -1$

20. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{3}{x^4}$; $y = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{dy}{dx} = -1$ quando $x = 1$

Nos Exercícios de 21 a 32, uma partícula move-se ao longo de uma linha reta, em t s, *s é a distância orientada da partícula até a origem, v* m/s *é a sua velocidade e a* m/s² *é a sua aceleração.* $\left(\textit{Sugestão para os Exercícios de 29 a 32: } a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{ds}\dfrac{ds}{dt} = v\dfrac{dv}{ds}.\right)$

21. $v = \sqrt{2t + 4}$; $s = 0$ quando $t = 0$. Expresse s em termos de t.

22. $v = 4 - t$; $s = 0$ quando $t = 2$. Expresse s em termos de t.

23. $a = 5 - 2t$; $v = 2$ e $s = 0$ quando $t = 0$. Expresse v e s em termos de t.

24. $a = 17$; $v = 0$ e $s = 0$ quando $t = 0$. Expresse v e s em termos de t.

25. $a = t^2 + 2t$; $s = 1$ quando $t = 0$ e $s = -3$ quando $t = 2$. Expresse v e s em termos de t.

26. $a = 3t - t^2$; $v = \frac{7}{6}$ e $s = 1$ quando $t = 1$. Expresse v e s em termos de t.

27. $a = -4\sqrt{2}\cos(2t - \frac{1}{4}\pi)$; $v = 2$ e $s = 1$ quando $t = 0$. Expresse v e s em termos de t.

28. $a = 18 \operatorname{sen} 3t$; $v = -6$ e $s = 4$ quando $t = 0$. Expresse v e s em termos de t.

29. $a = 800$; $v = 20$ quando $s = 1$. Ache uma equação envolvendo v e s.

30. $a = 500$; $v = 10$ quando $s = 5$. Ache uma equação envolvendo v e s.

31. $a = 5s + 2$; $v = 4$ quando $s = 2$. Ache uma equação envolvendo v e s.

32. $a = 2s + 1$; $v = 2$ quando $s = 1$. Ache uma equação envolvendo v e s.

Nos Exercícios de 33 a 40, a única força considerada é aquela decorrente da aceleração da gravidade, que tomaremos como sendo 10 m/s², vertical e dirigida para baixo.

33. Uma pedra é atirada verticalmente para cima, partindo do solo, com uma velocidade inicial de 20 m/s. (a) Quanto tempo irá decorrer até que a pedra retorne ao solo? (b) Com que velocidade escalar ela atinge o solo? (c) Por quanto tempo a pedra continuará subindo? (d) Qual a altura máxima atingida pela pedra?

34. Uma pedra é atirada para cima, partindo do solo, com uma velocidade inicial de 25 m/s. (a) Quanto tempo irá decorrer até que ela retorne ao solo? (b) Qual a velocidade escalar quando ela atinge o solo?

35. Uma bola cai do topo do monumento a Washington que tem 165 m de altura. (a) Quanto tempo irá decorrer até ela atingir o solo? (b) Qual a velocidade escalar quando ela chegar ao solo?

36. Uma pedra é atirada verticalmente para cima, partindo do solo, com uma velocidade inicial de 15 m/s. (a) Por quanto tempo ela subirá? (b) Qual a altura máxima atingida pela pedra?

37. Uma mulher derruba o seu binóculo estando num balão a 150 m do solo, que está subindo com uma velocidade de 10 m/s. (a) Quanto tempo irá decorrer até o binóculo atingir o solo e qual a velocidade escalar dele no momento do impacto?

38. Uma bola é atirada de uma janela que está a 25 m do solo, com uma velocidade inicial de -20 m/s. (a) Quando a bola atinge o solo? (b) Com que velocidade escalar ela irá atingir o solo?

39. Uma bola é atirada verticalmente para cima, com uma velocidade inicial de 40 m/s, de um ponto a 20 m do solo. (a) Se v m/s for a velocidade da bola quando estiver a s m do ponto inicial, expresse v em termos de s. (b) Qual a velocidade da bola quando ela estiver a 36 m do solo e ainda subindo? (*Sugestão*: veja a sugestão dada para os Exercícios de 29 a 32.)

40. Uma pedra é atirada verticalmente para cima, do telhado de uma casa com 20 m de altura, com uma velocidade inicial de 15 m/s. (a) Depois de quanto tempo ela atingirá a altura máxima e (b) qual será essa altura? (c) Quanto tempo irá decorrer até que a pedra na descida passe pelo telhado da casa e (d) qual a sua velocidade nesse instante? (e) Quanto tempo irá decorrer para que ela atinja o solo e (f) qual a sua velocidade então?

41. Uma partícula move-se ao longo de uma linha reta de tal forma que se v cm/s for a velocidade da partícula em t s, então $v = \operatorname{sen} \pi t$, onde a direção positiva é à direita da origem. Se a partícula estiver na origem no início do movimento, ache a sua posição $\frac{2}{3}$ s depois.

42. Se uma bola rola pelo chão com uma velocidade de 6 m/s e se a velocidade decresce a uma taxa de 1,8 m/s², devido ao atrito, qual a distância percorrida pela bola?

43. Se um motorista deseja que a velocidade escalar de seu carro aumente de 40 km/h para 100 km/h, enquanto percorre uma distância de 200 m, que aceleração constante ele deve manter?

44. Que aceleração negativa constante irá possibilitar a um motorista diminuir a velocidade escalar de seu carro de 120 km/h para 60 km/h, enquanto percorre uma distância de 100 m?

45. Um carro a 100 km/h é freiado e isto o leva a uma aceleração negativa constante de 8 m/s². (a) Depois de quanto tempo o carro irá parar? (b) Qual a distância percorrida até a parada?

46. Uma bola começa a subir em um plano inclinado com uma velocidade inicial de 1,5 m/s. Se há uma aceleração para baixo de 1,2 m/s^2, até onde a bola subirá no plano antes de começar a descer?
47. Se os freios dão uma aceleração negativa constante ao carro de 8 m/s^2, qual deverá ser a velocidade escalar máxima do carro, para que ele pare 25 m depois da freiada?
48. Um bloco de gelo desliza por uma rampa com uma aceleração de 3m/s^2. A rampa tem 36 m e leva 4 s para o gelo atingir a base. (a) Qual a velocidade inicial do gelo? (b) Qual a velocidade escalar do gelo após percorrer 12 m da rampa? (c) Quanto tempo leva para o gelo percorrer 12 m?
49. A equação $x^2 = 4ay$ representa uma família de parábolas a um parâmetro. Ache uma equação de uma outra família de curvas a um parâmetro, tal que em todo ponto (x, y) haja uma curva de cada família passando por ele e as retas tangentes às duas curvas nesse ponto sejam perpendiculares. (*Sugestão*: mostre primeiro que a inclinação da reta tangente num ponto (x, y), que não está no eixo y, da família de parábolas dada é $2y/x$.)
50. Resolva o Exercício 49, se a família a um parâmetro tiver a equação $x^3 + y^3 = a^3$.

5.4 ÁREA

Você provavelmente já tenha uma idéia intuitiva do que entendemos por *área* de certas figuras geométricas. É a medida que, de alguma forma, indica o tamanho da região encerrada pela figura. A área de um retângulo é o produto de seu comprimento pela largura e a área de um triângulo é a metade do produto do comprimento da base pela altura.

A área de um polígono pode ser definida como a soma das áreas dos triângulos nos quais ela pode ser decomposta e podemos provar que a área assim obtida independe de como o polígono é decomposto em triângulos (veja a Figura 1). Entretanto, como definir a área de uma região plana se ela for limitada por uma curva? Nesta secção vamos dar a definição da área de tal região e na Secção 5.5 ela será usada para motivar a definição de *integral definida.*

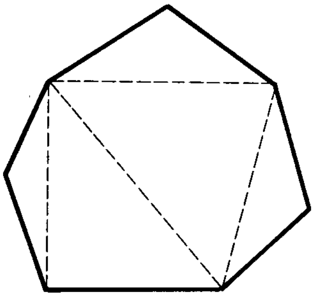


FIGURA 1

O tratamento que vamos dar ao conceito de área envolve somas com muitas parcelas e para facilitar o seu cálculo vamos introduzir a notação chamada de **somatória**. Essa notação envolve o uso do símbolo $\sum$, a letra sigma maiúscula do alfabeto grego. Alguns exemplos do uso de somatória são dados na ilustração a seguir.

▶ ILUSTRAÇÃO 1

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$\sum_{i=-2}^{2} (3i + 2) = [3(-2) + 2] + [3(-1) + 2] + [3 \cdot 0 + 2] + [3 \cdot 1 + 2] + [3 \cdot 2 + 2]$$

$$= (-4) + (-1) + 2 + 5 + 8$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

$$\sum_{k=3}^{8} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$ ◀

A seguir, vamos dar a definição formal de somatória.

5.4.1 DEFINIÇÃO

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \ldots + F(n-1) + F(n)$$

onde m e n são inteiros, e $m \leqslant n$.

O segundo membro da equação consiste em uma soma de $(n - m + 1)$ termos, o primeiro dos quais é obtido substituindo i por m em $F(i)$, o segundo substituindo i por $m + 1$ em $F(i)$ e assim por diante, até que o último termo seja obtido substituindo i por n em $F(i)$.

O número m é chamado de **limite inferior** da somatória, enquanto que n é chamado de **limite superior**. O símbolo i é chamado de **índice da somatória**. É um índice "mudo"; qualquer letra pode ser usada para o mesmo propósito. Por exemplo,

$$\sum_{k=3}^{5} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2$$

é equivalente a

$$\sum_{i=3}^{5} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2$$

► **ILUSTRAÇÃO 2** Da Definição 5.4.1,

$$\sum_{i=3}^{6} \frac{i^2}{i+1} = \frac{3^2}{3+1} + \frac{4^2}{4+1} + \frac{5^2}{5+1} + \frac{6^2}{6+1}$$ ◄

Algumas vezes os termos de uma soma envolvem subscritos, conforme mostra a próxima ilustração.

► **ILUSTRAÇÃO 3**

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

$$\sum_{k=4}^{9} kb_k = 4b_4 + 5b_5 + 6b_6 + 7b_7 + 8b_8 + 9b_9$$

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + f(x_4)\,\Delta x + f(x_5)\,\Delta x$$ ◄

Os teoremas a seguir, envolvendo somatória, são úteis para o cálculo e podem ser facilmente provados.

5.4.2 TEOREMA

$\sum_{i=1}^{n} c = cn$, onde c é qualquer constante.

Prova

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + \ldots + c \qquad (n \text{ termos})$$
$$= cn$$ ■

5.4.3 TEOREMA

$\sum_{i=1}^{n} c \cdot F(i) = c \sum_{i=1}^{n} F(i)$, onde c é qualquer constante.

Prova

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot F(i) = c \cdot F(1) + c \cdot F(2) + c \cdot F(3) + \ldots + c \cdot F(n)$$
$$= c[F(1) + F(2) + F(3) + \ldots + F(n)]$$
$$= c \sum_{i=1}^{n} F(i)$$ ■

5.4.4 TEOREMA

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) + G(i)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)$$

A demonstração será deixada como exercício (veja o Exercício 59). O Teorema 5.4.4 pode ser aplicado à soma de um número qualquer de funções.

5.4.5 TEOREMA

$$\sum_{i=a}^{b} F(i) = \sum_{i=a+c}^{b+c} F(i-c) \qquad (1)$$

e

$$\sum_{i=a}^{b} F(i) = \sum_{i=a-c}^{b-c} F(i+c) \qquad (2)$$

A demonstração do Teorema 5.4.5 será deixada como exercício (veja o Exercício 60). A ilustração a seguir mostra a aplicação desse teorema.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Da fórmula (1) do Teorema 5.4.5,

$$\sum_{i=3}^{10} F(i) = \sum_{i=5}^{12} F(i-2) \quad \text{e} \quad \sum_{i=6}^{11} i^2 = \sum_{i=7}^{12} (i-1)^2$$

Da fórmula (2) do Teorema 5.4.5,

$$\sum_{i=3}^{10} F(i) = \sum_{i=1}^{8} F(i+2) \quad \text{e} \quad \sum_{i=6}^{11} i^2 = \sum_{i=1}^{6} (i+5)^2$$ ◀

5.4.6 TEOREMA

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0)$$

Prova

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) - \sum_{i=1}^{n} F(i-1)$$

No segundo membro da fórmula acima escrevemos a primeira somatória de uma outra forma e aplicamos a expressão (2) do Teorema 5.4.5 com $c = 1$ à segunda somatória. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] = \left(\sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n)\right) - \sum_{i=1-1}^{n-1} F[(i+1) - 1]$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n) - \sum_{i=0}^{n-1} F(i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n) - \left(F(0) + \sum_{i=1}^{n-1} F(i)\right)$$
$$= F(n) - F(0)$$ ■

EXEMPLO 1 Calcule

$$\sum_{i=1}^{n} (4^i - 4^{i-1})$$

Solução Do Teorema 5.4.6, onde $F(i) = 4^i$, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (4^i - 4^{i-1}) &= 4^n - 4^0 \\ &= 4^n - 1\end{aligned}$$

No teorema a seguir, existem quatro fórmulas úteis ao cálculo com somatória. Elas estão numeradas para referências futuras.

5.4.7 TEOREMA Se n for um inteiro positivo, então

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(Fórmula 1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{(Fórmula 2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \text{(Fórmula 3)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} \qquad \text{(Fórmula 4)}$$

Prova Vamos demonstrar a Fórmula 1.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

Somando os primeiros membros de ambas, teremos

$$2\sum_{i=1}^{n} i$$

e se os segundos membros forem somados termo a termo, cada um tendo o valor $(n + 1)$, obteremos n termos. Assim,

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{n} i &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) \qquad n \text{ termos} \\ &= n(n+1)\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

que é a Fórmula 1. Tanto a Fórmula 1, como as demais podem ser provadas por indução matemática. Vamos fazer a demonstração da Fórmula 2 por indução matemática. A prova consiste em duas partes e uma conclusão.

Parte 1: Vamos primeiro verificar a Fórmula 2 para $n = 1$. Se $n = 1$, então o primeiro membro da Fórmula 2 será

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1$$

e o segundo membro será

$$\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$
$$= 1$$

Desse modo, a Fórmula 2 é válida, quando $n = 1$.

Parte 2: Vamos supor que a Fórmula 2 seja válida para $n = k$, onde k é um inteiro positivo; isto é, suponhamos

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \tag{3}$$

Com essa hipótese, queremos provar que a fórmula também é válida quando $n = k + 1$, isto é, queremos provar

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} \tag{4}$$

Quando $n = k + 1$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \qquad \text{(aplicando (3))} \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}
\end{aligned}$$

que é (4).

Conclusão: Da parte 1, sabemos que a Fórmula 2 é válida para $n = 1$. Por isso, segue da parte 2 que ela é válida para $n = 1 + 1$, ou 2; como é válida para $n = 2$, é também válida para $n = 2 + 1$, ou 3; e assim por diante. Pelo princípio da indução matemática, a fórmula é válida para todos os valores inteiros positivos de n. ■

As demonstrações das Fórmulas 3 e 4 serão deixadas como exercício (veja os Exercícios de 53 a 58).

EXEMPLO 2 Calcule

$$\sum_{i=1}^{n} i(3i-2)$$

Solução

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i(3i-2) &= \sum_{i=1}^{n} (3i^2-2i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (3i^2) + \sum_{i=1}^{n} (-2i) \qquad \text{(pelo Teorema 5.4.4)} \\
&= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i \qquad \text{(pelo Teorema 5.4.3)} \\
&= 3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(pelas Fórmulas 2 e 1)} \\
&= \frac{2n^3+3n^2+n-2n^2-2n}{2} \\
&= \frac{2n^3+n^2-n}{2}
\end{aligned}$$

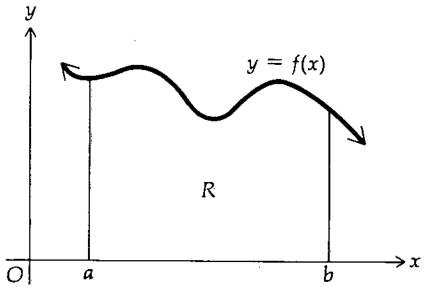


FIGURA 2

Antes de discutir a área de uma região plana, queremos indicar por que a terminologia "*medida* da área" é usada. A palavra *medida* refere-se a um número (sem unidades incluídas). Por exemplo, se a área for 20 cm², diremos que a medida da área em centímetros quadrados é 20. Quando a palavra *medição* for aplicada, devemos incluir as unidades. Assim, a medição da área de um triângulo é 20 cm².

Considere agora uma região R no plano, conforme mostra a Figura 2. A região R é limitada pelo eixo dos x, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pela curva tendo equação $y = f(x)$, onde f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Para simplificar, vamos tomar $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Queremos atribuir à medida da área de R um número A, usando um processo de limite semelhante ao usado para definir a área de um círculo: a área de um círculo é definida como o limite das áreas dos polígonos regulares inscritos quando o número de lados cresce indefinidamente. Vemos intuitivamente que qualquer que seja o número escolhido para representar A, esse número deverá ser, no mínimo, tão grande quanto a medida da área de qualquer região poligonal contida em R e não deverá ser maior do que a medida da área de qualquer região poligonal contendo R.

Vamos definir primeiro uma região poligonal contida em R. Dividimos o intervalo fechado $[a, b]$ em n subintervalos. Para simplificar, vamos tomar cada um desses subintervalos como tendo o mesmo comprimento, digamos, Δx. Logo, $\Delta x = (b - a)/n$. Vamos denotar os extremos desses subintervalos por x_0, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, onde $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x, \ldots, x_i = a + i\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$, $x_n = b$. Seja $[x_{i-1}, x_i]$ o i-ésimo subintervalo. Como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, ela é contínua em cada um dos subintervalos. Pelo teorema do valor extremo, existe um número em cada subintervalo para o qual f tem um valor mínimo absoluto. No i-ésimo subintervalo, seja c_i esse número, assim $f(c_i)$ será o valor mínimo absoluto de f no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Considere n retângulos, cada um com um comprimento de Δx unidades e uma altura $f(c_i)$ unidades (veja a Figura 3). Sejam S_n unidades quadradas a soma das áreas desses n retângulos; então

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + \ldots + f(c_i)\,\Delta x + \ldots + f(c_n)\,\Delta x$$

ou, com somatória,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \tag{5}$$

A somatória do segundo membro de (5) dá a soma das medidas das áreas dos n retângulos inscritos. Assim, não importa como A seja definido, ele deve ser tal que

$$A \geqslant S_n$$

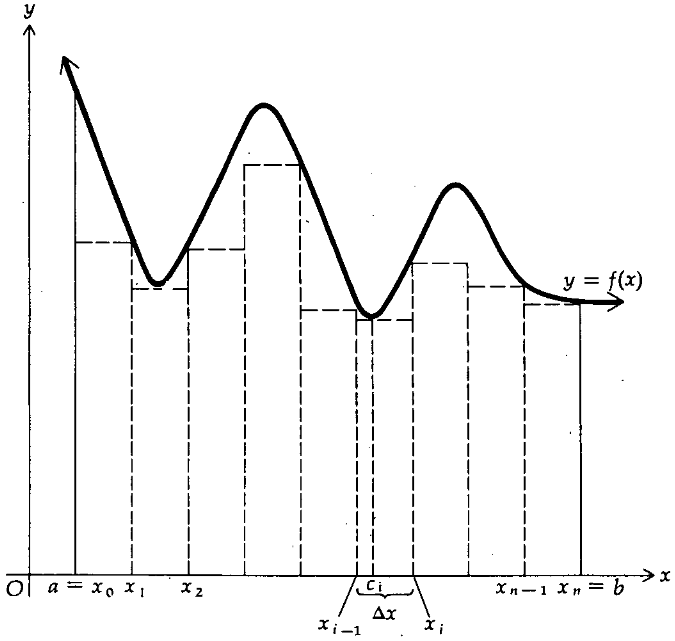


FIGURA 3

Na Figura 3, a região sombreada tem uma área de S_n unidades quadradas. Vamos fazer agora n crescer. Especificamente, multiplicamos n por 2; então, o número de retângulos vai dobrar, enquanto que o comprimento de cada retângulo será reduzido à metade. Isso está ilustrado na Figura 4, mostrando o dobro de retângulos da Figura 3. Comparando as duas figuras, vemos que a área sombreada na Figura 4 parece aproximar-se melhor da região R do que a da Figura 3. Assim, a soma das medidas das áreas dos retângulos na Figura 4 está mais próxima do número que desejamos para representar a medida da área de R.

Enquanto n cresce, os valores de S_n encontrados pela fórmula (5) aumentam, e valores sucessivos de S_n diferem um do outro por quantidades que se tornam

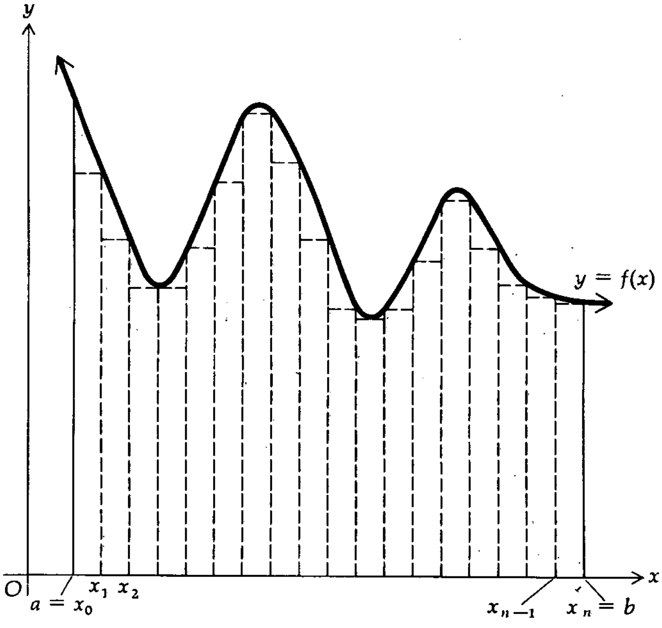


FIGURA 4

arbitrariamente pequenas. Isto é provado em Cálculo Avançado por um teorema que afirma que se f for contínua em $[a, b]$, então quando n cresce indefinidamente, os valores de S_n dados por (5) tendem a um limite. É esse limite que iremos tomar como a definição de medida da área da região R.

5.4.8 DEFINIÇÃO

Suponha que a função f seja contínua no intevalo fechado $[a, b]$ com $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$ e seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$. Vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, cada um com comprimento $\Delta x = (b - a)/n$ e vamos denotar o i-ésimo subintervalo por $[x_{i-1}, x_i]$. Então se $f(c_i)$ for o valor funcional mínimo absoluto no i-ésimo subintervalo, a medida da área da região R será dada por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x \tag{6}$$

A igualdade (6) significa que para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que se n for um inteiro positivo e se

$$n > N \text{ então } \left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x - A \right| < \epsilon$$

Podíamos ter considerado retângulos circunscritos ao invés de retângulos inscritos. Nesse caso, tomamos como medida das alturas dos retângulos o valor máximo absoluto de f em cada subintervalo. A existência desse valor máximo absoluto de f em cada subintervalo é garantida pelo teorema do valor extremo. As somas correspondentes das medidas das áreas dos retângulos circunscritos são, no mínimo, tão grandes quanto a medida da área da região R e pode ser mostrado que o limite dessas somas quando n cresce indefinidamente é exatamente igual ao limite da soma das medidas das áreas dos retângulos inscritos. Prova-se isto também em Cálculo Avançado. Assim sendo, poderíamos definir a medida da área da região R por

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\,\Delta x \tag{7}$$

onde $f(d_i)$ é o valor máximo absoluto de f em $[x_{i-1}, x_i]$.

A medida da altura do retângulo no i-ésimo subintervalo realmente pode ser tomada como o valor funcional em qualquer número daquele subintervalo, e o limite da soma das medidas das áreas dos retângulos continua o mesmo, não importanto quais os números selecionados. Na Secção 5.5 estendemos a definição de medida da área de uma região como o limite de tal soma.

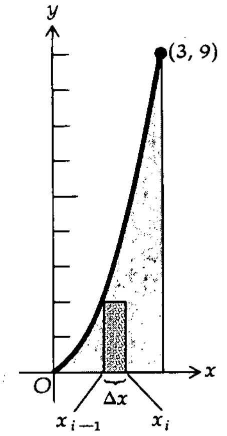


FIGURA 5

EXEMPLO 3 Ache a área da região limitada pela curva $y = x^2$, o eixo x e a reta $x = 3$, tomando retângulos inscritos.

Solução A Figura 5 mostra a região o i-ésimo retângulo inscrito. Aplicamos a Definição 5.4.8. Dividimos o intervalo fechado $[0, 3]$ em n subintervalos, cada um com comprimento Δx: $x_0 = 0$, $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\Delta x$, ..., $x_i = i\Delta x$, ..., $x_{n-1} = (n-1)\Delta x$, $x_n = 3$.

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} \qquad f(x) = x^2$$

$$= \frac{3}{n}$$

Como f é crescente em $[0, 3]$, o valor mínimo absoluto de f no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_{i-1})$. Logo, de (6),

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x \tag{8}$$

Como $x_{i-1} = (i-1)\Delta x$ e $f(x) = x^2$,

$$f(x_{i-1}) = [(i-1)\,\Delta x]^2$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2(\Delta x)^3$$

Mas $\Delta x = 3/n$, assim,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \frac{27}{n^3}$$

$$= \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2$$

$$= \frac{27}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

e usando as Fórmulas 2 e 1 e o Teorema 5.4.2, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x &= \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n\right]\\ &= \frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n-6n^2-6n+6n}{6}\\ &= \frac{9}{2}\cdot\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\end{aligned}$$

Então, de (8),

$$\begin{aligned}A &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{9}{2}\cdot\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right]\\ &= \frac{9}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \tfrac{9}{2}(2-0+0)\\ &= 9\end{aligned}$$

Assim, a área da região é 9 unidades quadradas.

EXEMPLO 4 Ache a área da região no Exemplo 3, tomando retângulos circunscritos.

Solução Com retângulos circunscritos, a medida da altura do i-ésimo retângulo é o valor máximo absoluto de f no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, que é $f(x_i)$. De (7),

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \tag{9}$$

Como $x_i = i\Delta x$, então $f(x_i) = (i\Delta x)^2$, e assim

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} i^2(\Delta x)^3\\ &= \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\\ &= \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\\ &= \frac{9}{2}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\end{aligned}$$

Logo, da igualdade (9),

$$\begin{aligned}A &= \lim_{n\to+\infty}\frac{9}{2}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\\ &= 9 \qquad \text{(como no Exemplo 3)}\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Ache a área do trapézio limitado pelas retas $x = 1$ e $x = 3$, pelo eixo x e pela reta $2x + y = 8$. Tome retângulos inscritos.

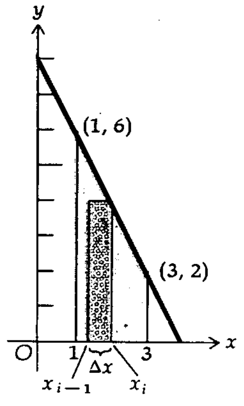


FIGURA 6

Solução A região e o i-ésimo retângulo inscrito estão na Figura 6. O intervalo fechado $[1, 3]$ é dividido em n subintervalos, cada um com comprimento Δx: $x_0 = 1, x_1 = 1 + \Delta x, x_2 = 1 + 2\Delta x, \ldots, x_i = 1 + i\Delta x, \ldots, x_{n-1} = 1 + (n - 1)\Delta x, x_n = 3$.

$$\Delta x = \frac{3-1}{n}$$

$$= \frac{2}{n}$$

Resolvendo em y a equação da reta, obtemos $y = -2x + 8$. Logo, $f(x) = -2x + 8$ e como f é decrescente em $[1, 3]$, o valor mínimo absoluto de f no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é $f(x_i)$. Como $x_i = 1 + i\Delta x$ e $f(x) = -2x + 8$, então $f(x_i) = -2(1 + i\Delta x) + 8$, isto é, $f(x_i) = 6 - 2i\Delta x$. De (6),

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} (6 - 2i\,\Delta x)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} [6\,\Delta x - 2i(\Delta x)^2]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[6\left(\frac{2}{n}\right) - 2i\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{12}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\right]$$

Do Teorema 5.4.2 e da Fórmula 1,

$$A = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{12}{n}\cdot n - \frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(8 - \frac{4}{n}\right)$$

$$= 8$$

Assim, a área é 8 unidades quadradas. Usando a fórmula de Geometria Plana para a área do trapézio, $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, onde h, b_1 e b_2 são, respectivamente, o número de unidades nos comprimentos da altura e das duas bases, obtemos $A = \frac{1}{2}(2)(6 + 2)$; isto é, $A = 8$, o que está de acordo com o resultado acima.

EXERCÍCIOS 5.4

Nos Exercícios de 1 a 12, ache a soma dada.

1. $\sum_{i=1}^{6} (3i - 2)$
2. $\sum_{i=1}^{20} (5i + 4)$
3. $\sum_{i=1}^{7} (i^2 + 1)$
4. $\sum_{i=1}^{7} (i + 1)^2$
5. $\sum_{i=1}^{10} (i - 1)^3$
6. $\sum_{i=1}^{10} (i^3 - 1)$

7. $\sum_{i=2}^{5} \frac{i}{i-1}$

8. $\sum_{j=3}^{6} \frac{2}{j(j-2)}$

9. $\sum_{i=-2}^{3} 2^i$

10. $\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{1+i^2}$

11. $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

12. $\sum_{k=-2}^{3} \frac{k}{k+3}$

Nos Exercícios de 13 a 20, calcule a soma indicada, usando os Teoremas 5.4.2 até 5.4.7.

13. $\sum_{i=1}^{25} 2i(i-1)$

14. $\sum_{i=1}^{20} 3i(i^2+2)$

15. $\sum_{k=1}^{n} (2^k - 2^{k-1})$

16. $\sum_{i=1}^{n} (10^{i+1} - 10^i)$

17. $\sum_{k=1}^{100} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$

18. $\sum_{i=1}^{n} 2i(1+i^2)$

19. $\sum_{i=1}^{n} 4i^2(i-2)$

20. $\sum_{k=1}^{n} [(3^{-k} - 3^k)^2 - (3^{k-1} + 3^{-k-1})^2]$

Nos Exercícios de 21 a 36, use o método desta secção para calcular a área da região dada; use retângulos inscritos ou circunscritos, conforme indicado. Para cada exercício, faça uma figura mostrando a região e o i-ésimo retângulo.

21. A região limitada por $y = x^2$, o eixo x e a reta $x = 2$; retângulos inscritos.

22. A região do Exercício 21; retângulos circunscritos.

23. A região limitada por $y = 2x$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 4$; retângulos circunscritos.

24. A região do Exercício 23; retângulos inscritos.

25. A região acima do eixo x e à direita da reta $x = 1$, limitada pelo eixo x, a reta $x = 1$ e a curva $y = 4 - x^2$; retângulos inscritos.

26. A região do Exercício 25; retângulos circunscritos.

27. A região à esquerda da reta $x = 1$, limitada pela curva e as retas do Exercício 25; retângulos circunscritos.

28. A região do Exercício 27; retângulos inscritos.

29. A região limitada por $y = 3x^4$, pelo eixo x e pela reta $x = 1$; retângulos inscritos.

30. A região do Exercício 29; retângulos circunscritos.

31. A região limitada por $y = x^3$, eixo x e as retas $x = -1$ e $x = 2$; retângulos inscritos.

32. A região do Exercício 31; retângulos circunscritos.

33. A região limitada por $y = x^3 + x$, o eixo x e as retas $x = -2$ e $x = 1$; retângulos circunscritos.

34. A região do Exercício 33; retângulos inscritos.

35. A região limitada por $y = mx$, com $m > 0$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, com $b > a > 0$; retângulos circunscritos.

36. A região do Exercício 35; retângulos inscritos.

37. Use o método desta secção para encontrar a área de um trapézio isósceles cujas bases têm medidas b_1 e b_2 e cuja altura tem medida h.

38. O gráfico de $y = 4 - |x|$ e o eixo x de $x = -4$ até $x = 4$ formam um triângulo. Use o método desta secção para encontrar sua área.

Nos Exercícios de 39 a 44, ache a área da região, tomando como medida da altura do i-ésimo retângulo $f(m_i)$, onde m_i é o ponto médio do i-ésimo subintervalo. (Sugestão: $m_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$.)

39. A região do Exemplo 3.

40. A região do Exercício 21.

41. A região do Exercício 23.

42. A região do Exercício 25.

43. A região do Exercício 27.

44. A região do Exercício 29.

Nos Exercícios de 45 a 52, uma função f e os números n, a e b são dados. Aproxime até quatro casas decimais a área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$ fazendo o seguinte: divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de Δx unidades de igual comprimento e use uma calculadora para determinar a soma das áreas de n retângulos inscritos ou circunscritos (como indicado), cada um com Δx unidades de largura.

45. $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 3$, $n = 10$, retângulos inscritos.

46. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 1$, $b = 2$, $n = 12$, retângulos circunscritos.

47. $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 3$, $n = 10$, retângulos circunscritos.

48. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 1$, $b = 2$, $n = 12$, retângulos inscritos.

49. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \frac{1}{6}\pi$, $b = \frac{5}{6}\pi$, $n = 8$, retângulos circunscritos.

50. $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}\pi$, $n = 6$, retângulos inscritos.

51. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \frac{1}{6}\pi$, $b = \frac{5}{6}\pi$, $n = 8$, retângulos inscritos.

52. $f(x) = \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}\pi$, $n = 6$, retângulos circunscritos.

53. Prove a Fórmula 2 do Teorema 5.4.7 sem indução matemática. (*Sugestão:* $i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$; assim, $\sum_{i=1}^{n} [i^3 - (i-1)^3] = \sum_{i=1}^{n} (3i^2 - 3i + 1)$. No primeiro membro dessa equação use o Teorema 5.4.6; no segundo membro, use os Teoremas 5.4.2, 5.4.3 e 5.4.4 e a Fórmula 1.)

54. Prove a Fórmula 3 do Teorema 5.4.7. (*Sugestão:* $i^4 - (i-1)^4 = 4i^3 - 6i^2 + 4i - 1$, e use um método similar ao do Exercício 53.)

55. Prove a Fórmula 4 do Teorema 5.4.7. (Veja as sugestões para os Exercícios 53 e 54.)

56. Prove a Fórmula 1 do Teorema 5.4.7 por indução matemática.

57. Prove a Fórmula 3 do Teorema 5.4.7 por indução matemática.

58. Prove a Fórmula 4 do Teorema 5.4.7 por indução matemática.

59. Prove o Teorema 5.4.4.

60. Prove o Teorema 5.4.5.

5.5 A INTEGRAL DEFINIDA

Na Secção 5.4, a medida da área de uma região foi definida como sendo o seguinte limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x \tag{1}$$

Para chegarmos a essa definição, dividimos o intervalo fechado $[a, b]$ em subintervalos de igual comprimento e então tomamos c_i como sendo o ponto do i-ésimo subintervalo no qual f tem um valor mínimo absoluto. Também restringimos os valores funcionais a serem não-negativos em $[a, b]$ e além disso exigimos que f fosse contínua em $[a, b]$.

O limite em (1) é um caso particular de um novo tipo de processo de limite que nos leva à definição de *integral definida*. Vamos discutir agora esse "novo tipo de limite".

Seja f a função definida no intervalo fechado $[a, b]$. Vamos dividir esse intervalo em n subintervalos, escolhendo qualquer dos $(n - 1)$ pontos intermediários entre a e b. Sejam $x_0 = a$ e $x_n = b$ e $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ os pontos intermediários, de tal forma que

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$$

Os pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ não são necessariamente eqüidistantes. Seja $\Delta_1 x$ o comprimento do primeiro subintervalo, de tal forma que $\Delta_1 x = x_1 - x_0$; seja $\Delta_2 x$ o comprimento do segundo subintervalo tal que $\Delta_2 x = x_2 - x_1$; e assim por diante, de forma que o comprimento do i-ésimo subintervalo seja $\Delta_i x$, e

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

Um conjunto de todos esses subintervalos do intervalo $[a, b]$ é chamado uma **partição** do intervalo $[a, b]$. Seja Δ tal partição. A Figura 1 ilustra essa partição Δ de $[a, b]$.

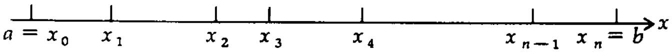


FIGURA 1

A partição Δ contém n subintervalos. Um deles é o maior; pode existir mais de um desses subintervalos. O comprimento do maior subintervalo da partição Δ, chamado **norma** da partição, é denotado por $\|\Delta\|$.

Vamos escolher um ponto em cada subintervalo da partição Δ: seja ξ_1 o ponto escolhido em $[x_0, x_1]$ de tal forma que $x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1$. Tomemos ξ_2 como o ponto escolhido em $[x_1, x_2]$, de tal forma que $x_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2$ e assim por diante, de forma que ξ_i seja o ponto escolhido em $[x_{i-1}, x_i]$ e $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. Formamos, então, a soma

$$f(\xi_1)\, \Delta_1 x + f(\xi_2)\, \Delta_2 x + \ldots + f(\xi_i)\, \Delta_i x + \ldots + f(\xi_n)\, \Delta_n x$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

Tal soma é denominada **soma de Riemann**, assim chamada pelo matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866).

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Suponha que $f(x) = 10 - x^2$, com $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 3$. Vamos achar a soma de Riemann para a função f em $[\frac{1}{4}, 3]$ para a partição Δ: $x_0 = \frac{1}{4}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1\frac{1}{2}$, $x_3 = 1\frac{3}{4}$, $x_4 = 2\frac{1}{4}$, $x_5 = 3$ e $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $\xi_2 = 1\frac{1}{4}$, $\xi_3 = 1\frac{3}{4}$, $\xi_4 = 2$, $\xi_5 = 2\frac{3}{4}$.

A Figura 2 mostra um esboço do gráfico de f em $[\frac{1}{4}, 3]$ e os cinco retângulos cujas áreas são os termos da soma de Riemann.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\,\Delta_i x &= f(\xi_1)\,\Delta_1 x + f(\xi_2)\,\Delta_2 x + f(\xi_3)\,\Delta_3 x + f(\xi_4)\,\Delta_4 x + f(\xi_5)\,\Delta_5 x \\ &= f(\tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{5}{4})(1\tfrac{1}{2} - 1) + f(\tfrac{7}{4})(1\tfrac{3}{4} - 1\tfrac{1}{2}) + f(2)(2\tfrac{1}{4} - 1\tfrac{3}{4}) + f(\tfrac{11}{4})(3 - 2\tfrac{1}{4}) \\ &= (9\tfrac{3}{4})(\tfrac{3}{4}) + (8\tfrac{7}{16})(\tfrac{1}{2}) + (6\tfrac{15}{16})(\tfrac{1}{4}) + (6)(\tfrac{1}{2}) + (2\tfrac{7}{16})(\tfrac{3}{4}) \\ &= 18\tfrac{3}{32}\end{aligned}$$

A norma de Δ é o comprimento do maior subintervalo. Logo $\|\Delta\| = \frac{3}{4}$. ◀

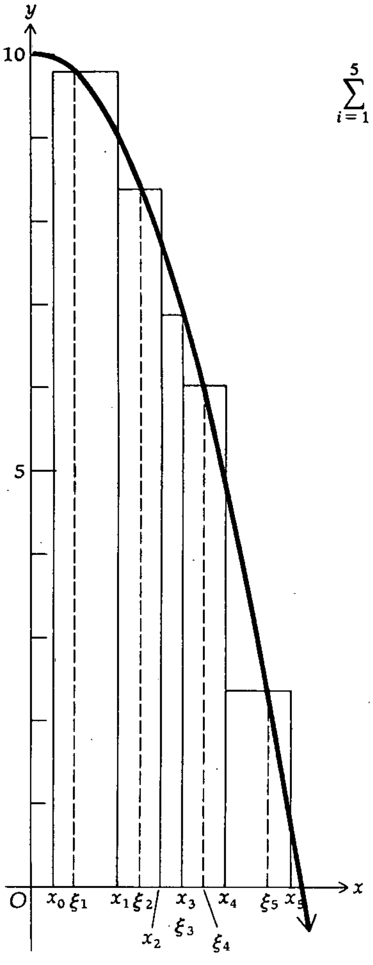


FIGURA 2

Como os valores funcionais $f(x)$ não estão restritos aos valores não-negativos, alguns dos $f(\xi_i)$ podem ser negativos. Em tal caso, a interpretação geométrica da soma de Riemann é a soma das medidas das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x com os negativos das medidas das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x. Essa situação está ilustrada na Figura 3. Aqui

$$\sum_{i=1}^{10} f(\xi_i)\,\Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6 + A_7 - A_8 - A_9 - A_{10}$$

pois $f(\xi_3)$, $f(\xi_4)$, $f(\xi_5)$, $f(\xi_8)$, $f(\xi_9)$ e $f(\xi_{10})$ são números negativos.

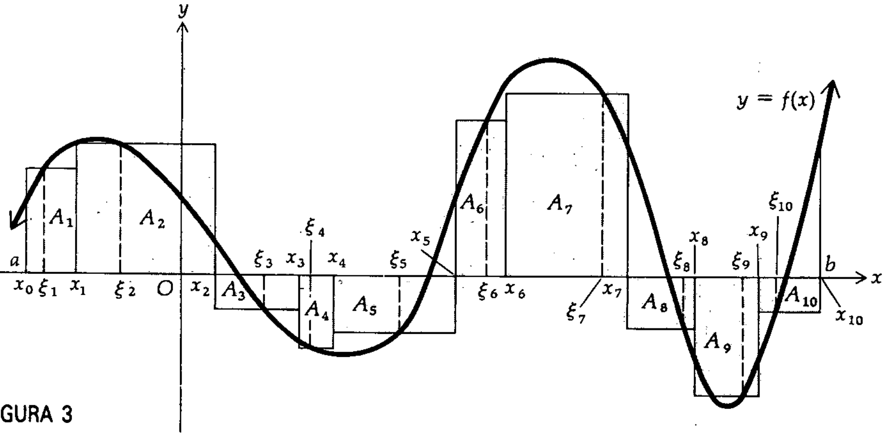


FIGURA 3

Seja f uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$. Suponha que exista um número L tal que $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x - L\right|$ possa ser tão pequeno quanto desejarmos para todas as partições Δ que tenham normas suficientemente pequenas, e para qualquer ξ_i, no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Neste caso, f é chamada de *integrável* em $[a, b]$.

5.5.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$. Então, f será **integrável** em $[a, b]$ se existir um número L satisfazendo a seguinte condição: para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que toda partição Δ para a qual $\|\Delta\| < \delta$, com ξ_i no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x - L\right| < \epsilon \qquad (2)$$

Nessas condições, escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = L \qquad (3)$$

Essa definição estabelece que, para uma dada função f definida no intervalo fechado $[a, b]$, podemos tornar os valores das somas de Riemann tão próximos de L quanto desejarmos, tomando as normas $\|\Delta\|$ de todas as partições Δ de $[a, b]$ suficientemente pequenas para todas as escolhas possíveis dos números ξ_i para os quais $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

O processo de limite dado por (3) é diferente daquele que foi discutido no Capítulo 2. Na Definição 5.5.1, o número L em (3) existe se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que para toda partição Δ com $\|\Delta\| < \delta$ e para todo ξ_i no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então a desigualdade (2) será válida.

Na Definição 2.1.1 tínhamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{4}$$

se para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon.$$

No processo de limite (3) para um dado $\delta > 0$, existe uma infinidade de partições Δ com norma $\|\Delta\| < \delta$. Isto é análogo ao fato de que no processo de limite (4), para um dado $\delta > 0$, existe uma infinidade de valores de x para os quais $0 < |x - a| < \delta$. Mas, no processo de limite (3), para cada partição Δ existe uma infinidade de escolhas de ξ_i. É nesse aspecto que os dois processos de limite diferem.

O Teorema 2.1.2, provado na Secção Suplementar 2.9, estabelece que se o número L no processo de limite (4) existir, então será único. De modo similar, podemos mostrar que se existir um número L satisfazendo a Definição 5.5.1, então ele será único. Agora podemos definir a *integral definida*.

5.5.2 DEFINIÇÃO Se f for uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, então a **integral definida** de f de a até b, denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, será dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x \tag{5}$$

se o limite existir.

Note que a afirmação "a função f é integrável no intervalo fechado $[a, b]$" é sinônima da afirmação "a integral definida de f de a até b existe".

Na notação de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ é chamada de **integrando**, a de **limite inferior** e b de **limite superior**. O símbolo $\int$ é chamado de **sinal de de integração**. O sinal de integração lembra um S maiúsculo, o que é apropriado, pois a integral definida é o limite de uma soma. O símbolo é o mesmo que foi usado para indicar a operação de antidiferenciação. A razão para o emprego do mesmo símbolo encontra-se no Teorema 5.8.2, chamado de segundo teorema fundamental do Cálculo, que possibilita calcular a integral definida através da determinação de uma antiderivada (também chamada de **integral indefinida**).

A seguinte questão surge agora: sob que condições existe um número L satisfazendo a Definição 5.5.2, ou seja, sob que condições uma função é integrável? Uma resposta a essa questão é dada pelo próximo teorema.

5.5.3 TEOREMA Se uma função for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então ela será integrável em $[a, b]$.

A demonstração desse teorema foge ao contexto deste livro, sendo encontrada em qualquer texto de Cálculo Avançado. A condição de que f seja contínua em $[a, b]$, apesar de ser suficiente para garantir a integrabilidade de f em $[a, b]$, não é necessária à existência de $\int_a^b f(x)\,dx$. Isto é, se f for contínua em $[a, b]$, então o Teorema 5.5.3 irá nos assegurar de que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe; contudo, há funções que são descontínuas, embora sejam integráveis em um intervalo fechado. Tal função é dada no Exemplo 2, no final desta secção.

No começo desta secção estabelecemos que o limite usado na Definição 5.4.8 para definir a medida da área de uma região é um caso particular do limite usado na Definição 5.5.2, para definir a integral definida. Na discussão sobre área, o intervalo $[a, b]$ foi dividido em n subintervalos de igual comprimento. Tal partição do intervalo $[a, b]$ é chamada de **partição regular**. Se Δx for o comprimento de cada subintervalo em uma partição regular, então cada $\Delta_i x = \Delta x$ e a norma da partição será Δx. Fazendo essas substituições em (5), temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x \tag{6}$$

Além disso,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad n = \frac{b-a}{\Delta x}$$

Assim,

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \to 0} n = +\infty$$

A razão de $\lim_{\Delta x \to 0} n = +\infty$ é que $b > a$ e Δx tende a zero através de valores positivos (pois $\Delta x > 0$). Desses limites concluímos que

$$\Delta x \to 0 \quad \text{é equivalente a} \quad n \to +\infty$$

Assim, temos da expressão em (6) e dessa afirmativa

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x \tag{7}$$

Deve ser lembrado que ξ_i pode ser qualquer ponto no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Comparando o limite usado na Definição 5.4.8, que dá a medida da área de uma região, com o limite do segundo membro de (7), temos no primeiro caso

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \tag{8}$$

onde $f(c_i)$ é o valor funcional mínimo absoluto em $[x_{i-1}, x_i]$. No segundo caso, temos

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x \tag{9}$$

onde ξ_i é qualquer número em $[x_{i-1}, x_i]$.

Como a função f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema 5.5.3, $\int_a^b f(x)\,dx$ existe; logo, essa integral definida é o limite de todas as somas de Riemann de f em $[a, b]$, inclusive aquelas que aparecem em (8) e (9). Por causa disso, vamos redefinir a área de uma região de uma forma mais geral.

5.5.4 DEFINIÇÃO

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Então, a medida A da área da região R é dada por

$$A = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

$$\Leftrightarrow A = \int_a^b f(x)\, dx$$

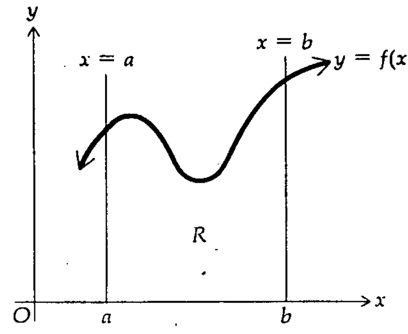


FIGURA 4

Essa definição estabelece que se $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$, a integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ poderá ser interpretada geometricamente como a medida da área da região R mostrada na Figura 4.

A relação (7) pode ser usada para encontrarmos o valor exato de uma integral definida, conforme é ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Ache o valor exato da integral definida $\int_1^3 x^2\, dx$. Interprete geometricamente o resultado.

Solução Considere uma partição regular do intervalo fechado $[1, 3]$ em n subintervalos. Então $\Delta x = 2/n$.

Se escolhermos ξ_i como o extremo direito de cada subintervalo, teremos:

$$\xi_1 = 1 + \frac{2}{n}, \xi_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right), \xi_3 = 1 + 3\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, \xi_i = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, \xi_n = 1 + n\left(\frac{2}{n}\right)$$

Como $f(x) = x^2$,

$$f(\xi_i) = \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2$$
$$= \left(\frac{n + 2i}{n}\right)^2$$

Logo, usando (7) e aplicando os teoremas da Secção 5.4, teremos

$$\int_1^3 x^2\, dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n + 2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n}$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (n^2 + 4ni + 4i^2)$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 + 4n \sum_{i=1}^{n} i + 4 \sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^2 n + 4n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^3 + 2n^3 + 2n^2 + \frac{2n(2n^2 + 3n + 1)}{3}\right]$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8n^2 + 12n + 4}{3n^2}\right]$$

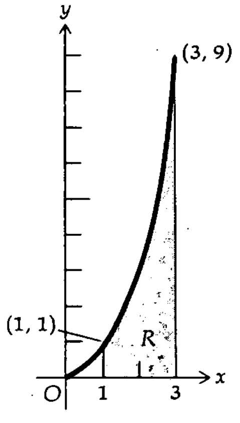


FIGURA 5

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right]$$

$$= 6 + 0 + \tfrac{8}{3} + 0 + 0$$

$$= \tfrac{26}{3}$$

Vamos interpretar geometricamente o resultado. Como $x^2 \geqslant 0$ para todo x em $[1, 3]$, a região limitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 3$ tem $\frac{26}{3}$ unidades quadradas de área.(*) A região está mostrada na Figura 5.

Na Definição 5.5.2 o intervalo fechado $[a, b]$ é dado e assim supomos que $a < b$. Para considerar a integral definida de uma função f de a até b onde $a > b$ ou $a = b$, temos as definições a seguir.

5.5.5 DEFINIÇÃO Se $a > b$, então

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

se $\int_b^a f(x)dx$ existir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** No Exemplo 1 mostramos que $\int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}$. Logo, da Definição 5.5.5,

$$\int_3^1 x^2\,dx = -\int_1^3 x^2\,dx = -\tfrac{26}{3}$$ ◀

5.5.6 DEFINIÇÃO Se $f(a)$ existe, então

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Da definição 5.5.6,

$$\int_1^1 x^2\,dx = 0$$ ◀

Como afirmamos anteriormente, uma função pode ser integrável em um intervalo fechado, apesar de ser descontínua nele. Tal situação ocorre no exemplo a seguir.

EXEMPLO 2 Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Seja $[a, b]$ qualquer intervalo para o qual $a < 0 < b$. Mostre que f é descontínua em $[a, b]$ e, ainda assim, integrável em $[a, b]$.

Solução Como $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, mas $f(0) = 1$, f é descontínua em 0 e, portanto, descontínua em $[a, b]$.

---

* **N. do T.:** As unidades de área são unidades de comprimento ao quadrado e, por isso, são também chamadas de unidades quadradas.

Para provar que f é integrável em $[a, b]$, vamos mostrar que a Definição 5.5.1 está satisfeita. Consideremos as somas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\,\Delta_i x$$

Se nenhum dos números $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ for nulo, então a soma de Riemann será zero. Vamos supor que $\xi_j = 0$. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = 1 \cdot \Delta_j x$$

Em qualquer um dos casos,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x\right| \leqslant \|\Delta\|$$

Logo,

$$\text{se } \|\Delta\| < \epsilon \quad \text{então} \quad \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x - 0\right| < \epsilon$$

Comparando o resultado acima com a Definição 5.5.1 onde $\delta = \epsilon$ e $L = 0$, vemos que f é integrável em $[a, b]$.

Observe que a função f do Exemplo 2 tem um número finito (somente 1) de descontinuidades em $[a, b]$ e $|f(x)| \leqslant 1$ para todo x em $[a, b]$. Essa função f pertence ao conjunto das funções que são integráveis em um intervalo fechado. Outras três funções desse conjunto estão nos Exercícios 36 - 38.

EXERCÍCIOS 5.5

Nos Exercícios de 1 a 9, ache a soma de Reimann para a função no intervalo, usando a partição Δ dada e os valores de ξ_i dados. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo dado e mostre os retângulos cujas medidas de área são os termos da soma de Riemann. (Veja a Ilustração 1 e 2 Figura 2.)

1. $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1\frac{1}{4}$, $x_3 = 2\frac{1}{4}$, $x_4 = 3$; $\xi_1 = \frac{1}{4}$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 1\frac{1}{2}$, $\xi_4 = 2\frac{1}{2}$

2. $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 1\frac{1}{4}$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2\frac{3}{4}$, $x_5 = 3$; $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 1\frac{3}{4}$, $\xi_4 = 2\frac{1}{4}$, $\xi_5 = 2\frac{3}{4}$

3. $f(x) = 1/x$, $1 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = 1$, $x_1 = 1\frac{2}{3}$, $x_2 = 2\frac{1}{4}$, $x_3 = 2\frac{2}{3}$, $x_4 = 3$; $\xi_1 = 1\frac{1}{4}$, $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 2\frac{1}{2}$, $\xi_4 = 2\frac{3}{4}$

4. $f(x) = x^3$, $-1 \leqslant x \leqslant 2$; para Δ: $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1\frac{1}{4}$, $x_5 = 2$; $\xi_1 = -\frac{1}{2}$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = \frac{2}{3}$, $\xi_4 = 1$, $\xi_5 = 1\frac{1}{2}$

5. $f(x) = x^2 - x + 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; para Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0{,}7$, $x_4 = 1$; $\xi_1 = 0{,}1$, $\xi_2 = 0{,}4$, $\xi_3 = 0{,}6$, $\xi_4 = 0{,}9$

6. $f(x) = 1/(x + 2)$, $-1 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 1\frac{1}{4}$, $x_5 = 2$, $x_6 = 2\frac{1}{4}$, $x_7 = 2\frac{3}{4}$, $x_8 = 3$; $\xi_1 = -\frac{3}{4}$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = \frac{1}{4}$, $\xi_4 = 1$, $\xi_5 = 1\frac{1}{2}$, $\xi_6 = 2$, $\xi_7 = 2\frac{1}{2}$, $\xi_8 = 3$

7. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; para Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}\pi$, $x_2 = \frac{1}{2}\pi$, $x_3 = \frac{2}{3}\pi$, $x_4 = \frac{3}{4}\pi$, $x_5 = \pi$; $\xi_1 = \frac{1}{6}\pi$, $\xi_2 = \frac{1}{3}\pi$, $\xi_3 = \frac{1}{2}\pi$, $\xi_4 = \frac{3}{4}\pi$, $\xi_5 = \frac{5}{6}\pi$.

8. $f(x) = 3 \cos \frac{1}{2}x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$; para Δ: $x_0 = -\pi$, $x_1 = -\frac{1}{2}\pi$, $x_2 = -\frac{1}{3}\pi$, $x_3 = \frac{1}{3}\pi$, $x_4 = \frac{7}{12}\pi$, $x_5 = \pi$; $\xi_1 = -\frac{2}{3}\pi$, $\xi_2 = -\frac{1}{3}\pi$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = \frac{1}{2}\pi$, $\xi_5 = \frac{2}{3}\pi$

9. $f(x) = [\![x]\!] + 2$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$; para Δ: $x_0 = -3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$; $\xi_1 = -2{,}5$, $\xi_2 = -0{,}5$, $\xi_3 = 1$, $\xi_4 = 2{,}5$

Nos Exercícios de 10 a 18, ache o valor exato da integral definida. Use o método do Exemplo 1 desta secção.

10. $\int_2^7 3x\,dx$

11. $\int_0^2 x^2\,dx$

12. $\int_2^4 x^2\,dx$

13. $\int_1^2 x^3\,dx$

14. $\int_0^5 (x^3 - 1)\,dx$

15. $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)\,dx$

16. $\int_0^4 (x^2 + x - 6)\,dx$

17. $\int_{-2}^2 (x^3 + 1)\,dx$

18. $\int_{-2}^1 x^4\,dx$

Nos Exercícios de 19 a 28, ache a área exata da região da seguinte forma: (a) expresse a medida da área como o limite de uma soma de Riemann com partições regulares, (b) expresse esse li-

mite com a notação de integral definida; (c) calcule a integral definida pelo método desta secção e faça uma escolha adequada de ξ_i. Desenhe uma figura mostrando a região.

19. Limitada pela reta $y = 2x - 1$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 5$.

20. Limitada pela reta $y = 2x - 6$, pelo eixo x e pelas retas $x = 4$ e $x = 7$.

21. Limitada pela reta $y = -3x + 2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -5$ e $x = -1$.

22. Limitada pela reta $y = 3x + 2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -4$ e $x = -1$.

23. Limitada pela curva $y = 4 - x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 2$.

24. Limitada pela curva $y = (x + 3)^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -3$ e $x = 0$.

25. Limitada pela curva $y = 12 - x - x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -3$ e $x = 2$.

26. Limitada pela curva $y = 10 + x - x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = -2$ e $x = 3$.

27. Limitada pela curva $y = x^3 - 4$, pelo eixo x e pelas retas $x = -2$ e $x = -1$.

28. Limitada pela curva $y = 6x + x^2 - x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 3$.

Nos Exercícios de 29 a 32, dê o valor aproximado da integral definida, usando uma calculadora para determinar, até quatro casas decimais, a soma de Riemann correspondente, com uma partição regular de n subintervalos e ξ_i como o extremo esquerdo ou direito (conforme estiver indicado) de cada subintervalo.

29. $\int_2^5 \frac{1}{x^2}\,dx$, $n = 9$, ξ_i é o extremo direito.

30. $\int_3^4 \frac{1}{x}\,dx$, $n = 10$, ξ_i é o extremo esquerdo.

31. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x\,dx$, $n = 8$, ξ_i é o extremo esquerdo.

32. $\int_{-\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx$, $n = 6$, ξ_i é o extremo direito.

33. Expresse como uma integral definida: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3}$. (*Sugestão*: considere a função f para a qual $f(x) = x^2$.)

34. Expresse como uma integral definida: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$. (*Sugestão*: considere a função f para a qual $f(x) = \frac{1}{x}$ em $[1, 2]$.)

35. Expresse como uma integral definida: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n}{(i+n)^2}$. (*Sugestão*: considere a função f para a qual $f(x) = \frac{1}{x^2}$ em $[1, 2]$.)

36. Seja $[a, b]$ qualquer intervalo tal que $a < 0 < b$. Prove que mesmo que a função escada unitária (Exercício 24 nos Exercícios 2.3) seja descontínua em $[a, b]$, ela será integrável nesse intervalo e $\int_a^b u(x)dx = b$.

37. Prove que a função sinal é descontínua em $[-1, 1]$ e mesmo assim é integrável nesse intervalo. Mostre também que $\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\,dx = 0$.

38. Prove que a função maior inteiro é descontínua em $[0, \frac{3}{2}]$ e mesmo assim é integrável nesse intervalo. Mostre também que $\int_0^{3/2} [\![x]\!]\,dx = \frac{1}{2}$.

5.6 PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

O cálculo de uma integral definida a partir da definição, determinando realmente o limite de uma soma conforme fizemos na Secção 5.5, em geral é muito trabalhoso e, freqüentemente, impossível. Para estabelecer um método mais simples, precisamos desenvolver antes algumas propriedades da integral definida. Em primeiro lugar precisamos dos teoremas a seguir, sobre as somas de Riemann.

5.6.1 TEOREMA

Se Δ for qualquer partição do intervalo fechado $[a, b]$, então

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a$$

Prova

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x - (b-a) &= (b-a) - (b-a)\\ &= 0\end{aligned}$$

Logo, para todo $\epsilon > 0$, qualquer escolha de $\delta > 0$ garante que

$$\text{se } \|\Delta\| < \delta \text{ então } \left|\sum_{i=1}^{n} \Delta_i x - (b-a)\right| < \epsilon$$

Assim, pela Definição 5.5.1,

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = b - a \qquad \blacksquare$$

5.6.2 TEOREMA Se f for definida no intervalo fechado $[a, b]$, e se

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

existe, onde Δ é qualquer partição de $[a, b]$, então se k for uma constante qualquer,

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\, \Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

A demonstração desse teorema será deixada como exercício (veja o Exercício 43).

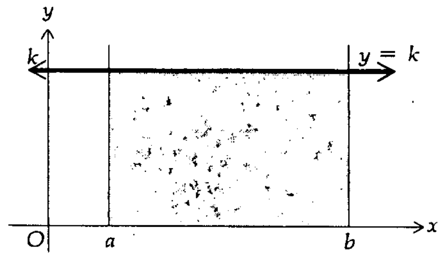


FIGURA 1

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Consulte a Figura 1. Se $k > 0$, a integral definida $\int_a^b k\, dx$ dará a medida da área da região sombreada, que é um retângulo cujas dimensões são k unidades e $(b - a)$ unidades. Este fato é uma interpretação geométrica do teorema a seguir, quando $k > 0$. ◀

5.6.3 TEOREMA Se k for qualquer constante, então

$$\int_a^b k\, dx = k(b - a)$$

Prova Pela Definição 5.5.2,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

Se $f(x) = k$ para todo x em $[a, b]$, temos dessa equação

$$\begin{aligned}\int_a^b k\, dx &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\, \Delta_i x \\ &= k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x \qquad \text{(pelo Teorema 5.6.2)} \\ &= k(b - a) \qquad \text{(pelo Teorema 5.6.1)}\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int_{-3}^{5} 4\, dx$$

Solução Aplicamos o Teorema 5.6.3.

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{5} 4\, dx &= 4[5 - (-3)] \\ &= 4(8) \\ &= 32\end{aligned}$$

5.6.4 TEOREMA Se a função f for integrável no intervalo fechado $[a, b]$ e se k for uma constante qualquer, então

$$\int_a^b kf(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

Prova Como f é integrável em $[a, b]$, $\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$ existe; assim, pelo Teorema 5.6.2,

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

Logo,

$$\int_a^b kf(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx \qquad \blacksquare$$

Note a semelhança entre o teorema a seguir e o Teorema 4 (2.2.4), relativo ao limite da soma de duas funções. Note também a semelhança entre as demonstrações de ambos os teoremas.

5.6.5 TEOREMA Se as funções f e g forem integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ será integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

Prova As funções f e g são integráveis em $[a, b]$; seja então

$$\int_a^b f(x)\, dx = M \qquad \text{e} \qquad \int_a^b g(x)\, dx = N$$

Para provar que $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e que $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = M + N$, precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todas as partições Δ e para todo ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$, se $\|\Delta\| < \delta$, então

$$\left| \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\, \Delta_i x - (M + N) \right| < \epsilon$$

Como

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \qquad \text{e} \qquad N = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x$$

segue que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ e um $\delta_2 > 0$ tais que para todas as partições Δ e para qualquer ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$ se $\|\Delta\| < \delta_1$ e $\|\Delta\| < \delta_2$, então

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Logo, se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, então para qualquer $\epsilon > 0$, para todas as partições Δ e para qualquer ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$, se $\|\Delta\| < \delta$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{1}$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right) \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right| \tag{2}$$

Das desigualdades (1) e (2), temos

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta_i x\right) - (M + N)\right| < \epsilon \tag{3}$$

Do Teorema 5.4.4,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\,\Delta_i x$$

Assim, substituindo essa igualdade em (3) podemos concluir que para todo $\epsilon > 0$, para todas as partições Δ e para qualquer ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$, se $\|\Delta\| < \delta$ onde $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, então

$$\left|\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\,\Delta_i x - (M + N)\right| < \epsilon$$

Isso prova que $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e que

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

O sinal mais (+) do enunciado do Teorema 5.6.5 pode ser substituído por um sinal menos (−), como resultado da aplicação do Teorema 5.6.4, onde $k = -1$.

O Teorema 5.6.5 pode ser estendido a qualquer número de funções. Isto é, se as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$ forem todas integráveis em $[a, b]$, então $(f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n)$ será integrável em $[a, b]$ e

$$\boxed{\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)\,dx}$$

EXEMPLO 2 Use o resultado do Exemplo 1, Secção 5.5 e o fato de que $\int_1^3 x\,dx = 4$ para calcular $\int_1^3 (3x^2 - 5x + 2)\,dx$.

Solução No Exemplo 1, Secção 5.5, tínhamos o resultado

$$\int_1^3 x^2\,dx = \tfrac{26}{3}$$

Das propriedades da integral definida,

$$\begin{aligned}\int_1^3 (3x^2 - 5x + 2)\,dx &= \int_1^3 3x^2\,dx - \int_1^3 5x\,dx + \int_1^3 2\,dx\\ &= 3\int_1^3 x^2\,dx - 5\int_1^3 x\,dx + 2(3-1)\\ &= 3(\tfrac{26}{3}) - 5(4) + 4\\ &= 26 - 20 + 4\\ &= 10\end{aligned}$$

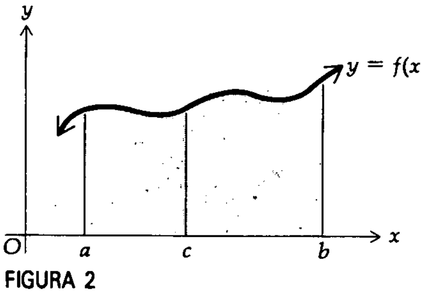


FIGURA 2

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Uma interpretação geométrica do Teorema 5.6.6, a seguir é mostrada na Figura 2, onde $f(x) \geqslant 0$. Para todo x em $[a, b]$, a medida da área da região limitada pela curva $y = f(x)$ e o eixo x de a até b é igual à soma das medidas das áreas das regiões de a até c e de c até b. ◀

5.6.6 TEOREMA Se a função f for integrável nos intervalos fechados $[a, b]$, $[a, c]$ e $[c, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

onde $a < c < b$.

Prova Seja Δ uma partição de $[a, b]$. Vamos formar a partição Δ' de $[a, b]$ como segue. Se c for um dos pontos da partição Δ (isto é, $c = x_i$ para algum i), então Δ' será igual a Δ. Se c não for um dos pontos da partição Δ, mas estiver contido no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, então a partição Δ' terá como pontos todos os pontos da partição Δ e mais o ponto c. Logo, os subintervalos da partição Δ' serão os mesmos de Δ, com exceção do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de Δ que fica dividido em $[x_{i-1}, c]$ e $[c, x_i]$.

Se $\|\Delta'\|$ for a norma de Δ' e se $\|\Delta\|$ for a norma de Δ, então

$$\|\Delta'\| \leqslant \|\Delta\|$$

Se na partição Δ' o intervalo $[a, c]$ for dividido em r subintervalos e o intervalo $[c, b]$ for dividido em $(n - r)$ subintervalos, então a parte da partição Δ' de a até c dará uma soma de Riemann da forma

$$\sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

e a outra parte da partição Δ', de c até b, dá a soma de Riemann da forma

$$\sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

Usando a definição de integral definida e as propriedades da somatória, temos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x \\ &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \left[\sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\,\Delta_i x + \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x\right] \\ &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\,\Delta_i x + \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x\end{aligned}$$

Como $0 < \|\Delta'\| \leqslant \|\Delta\|$, podemos substituir $\|\Delta\| \to 0$ por $\|\Delta'\| \to 0$, dando

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta'\|\to 0} \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\,\Delta_i x + \lim_{\|\Delta'\|\to 0} \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

Aplicando a definição de integral definida ao segundo membro da expressão acima, teremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$ ■

O resultado do Teorema 5.6.6 é verdadeiro para qualquer ordenação dos números a, b e c. Isto será enunciado como um outro teorema.

5.6.7 TEOREMA Se f for integrável num intervalo fechado contendo os números a, b e c, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{4}$$

não importando a ordem de a, b e c.

Prova Se a, b e c forem distintos, existirão seis maneiras possíveis de ordenação desses números: $a < b < c$, $a < c < b$, $b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$, e $c < b < a$. A segunda ordem, $a < c < b$, é o Teorema 5.6.6. Vamos usá-lo para provar que (4) é válida para outras ordenações.

Suponha que $a < b < c$; então, do Teorema 5.6.6, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \tag{5}$$

Da Definição 5.5.5,

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$$

Substituindo-a em (5), obtemos

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

que é o resultado desejado.

As demonstrações para as quatro outras ordenações são semelhantes e serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios de 44 a 47).

Há também a possibilidade de que dois dos três números sejam iguais; por exemplo, $a = c < b$. Então

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx &= \int_a^a f(x)\,dx\\ &= 0 \qquad \text{(pela Definição 5.5.6)}\end{aligned}$$

Também, como $a = c$,

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Logo,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = 0 + \int_a^b f(x)\,dx$$

que é o resultado desejado. ■

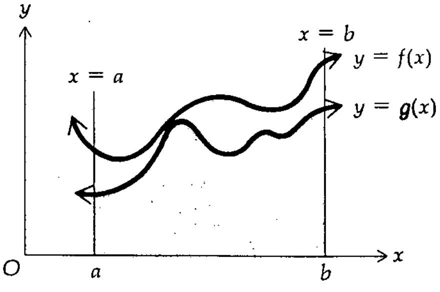


FIGURA 3

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Na Figura 3, $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. A integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ dá a medida da área da região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$; $\int_a^b g(x)\,dx$ dá a medida da área da região limitada pela curva $y = g(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Na figura, vemos que a primeira área é maior do que a segunda. Temos a interpretação geométrica do teorema a seguir, quando $f(x)$ e $g(x)$ são não-negativas em $[a, b]$.

5.6.8 TEOREMA Se as funções f e g forem integráveis no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

Prova Como f e g são integráveis em $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$, ambas existem. Logo,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b [-g(x)]\,dx \quad \text{(pelo Teorema 5.6.4)}$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \quad \text{(pelo Teorema 5.6.5)}$$

Seja h a função definida por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Então $h(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$, pois $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$.

Queremos provar que $\int_a^b h(x) \geqslant 0$. Como

$$\int_a^b h(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x$$

vamos supor que

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x = L < 0 \tag{6}$$

Então, pela Definição 5.5.1, com $\epsilon = -L$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } \|\Delta\| < \delta, \text{ então } \left| \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x - L \right| < -L \tag{7}$$

Mas como

$$\sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x - L \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x - L \right|$$

de (7), temos que

$$\text{se } \|\Delta\| < \delta, \text{ então } \sum_{=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x - L < -L$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{se } \|\Delta\| < \delta, \text{ então } \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x < 0$$

Mas essa afirmativa é impossível, pois $h(\xi_i)$ é sempre não-negativo e $\Delta_i x > 0$; assim, temos uma contradição à nossa hipótese (6). Assim sendo, (6) é falsa e

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\,\Delta_i x \geqslant 0$$

$$\int_a^b h(x) \geqslant 0$$

Como $h(x) = f(x) - g(x)$, segue que

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \geqslant 0$$

$$\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \geqslant 0$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx$$ ■

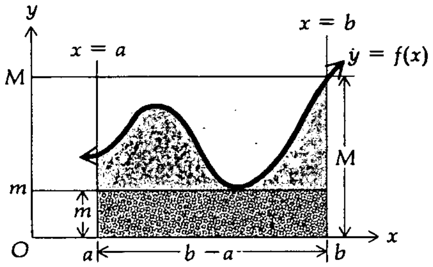


FIGURA 4

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Na Figura 4, $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$, m e M são, respectivamente, os valores mínimo e máximo absolutos de f em $[a, b]$. A integral $\int_a^b f(x)\, dx$ dá a medida da área da região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Essa área é maior do que a do retângulo, cujas dimensões são m e $(b - a)$ e menor do que a do retângulo cujas dimensões são M e $(b - a)$. Assim, temos a interpretação geométrica do próximo teorema se $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. ◀

5.6.9 TEOREMA

Vamos supor que a função f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se m e M forem, respectivamente, os valores mínimo e máximo absolutos de f em $[a, b]$, ou seja

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad \text{para } a \leqslant x \leqslant b$$

então,

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M(b - a)$$

Prova Como f é contínua em $[a, b]$, o teorema do valor extremo garante a existência de m e de M.

Pelo Teorema 5.6.3,

$$\int_a^b m\, dx = m(b - a) \tag{8}$$

e

$$\int_a^b M\, dx = M(b - a) \tag{9}$$

Como f é contínua em $[a, b]$, segue do Teorema 5.5.3 que f é integrável em $[a, b]$. Então, como $f(x) \geqslant m$ para todo x em $[a, b]$, temos do Teorema 5.6.8

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b m\, dx$$

e de (8), segue que

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant m(b - a) \tag{10}$$

Da mesma forma, como $M \geqslant f(x)$ para todo x em $[a, b]$, segue do Teorema 5.6.8 que

$$\int_a^b M\, dx \geqslant \int_a^b f(x)\, dx$$

e de (9), segue que

$$M(b-a) \geqslant \int_a^b f(x)\,dx$$

Combinando essa desigualdade com (10), temos

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$ ■

EXEMPLO 3 Aplique o Teorema 5.6.9 para encontrar um intervalo fechado contendo o valor de $\int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx$. Use os resultados do Exemplo 1, Secção 4.4.

Solução Se

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

do Exemplo 1, Secção 4.4, f tem um valor mínimo relativo de 1 em $x = 3$ e um valor máximo relativo de 5 em $x = 1$. $f(\frac{1}{2}) = \frac{33}{8}$ e $f(4) = 5$. Logo, o valor mínimo de f em $[\frac{1}{2}, 4]$ é 1 e o valor máximo é 5. Tomando $m = 1$ e $M = 5$ no Teorema 5.6.9, segue que

$$1(4 - \tfrac{1}{2}) \leqslant \int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx \leqslant 5(4 - \tfrac{1}{2})$$

$$\tfrac{7}{2} \leqslant \int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx \leqslant \tfrac{35}{2}$$

Logo, o intervalo fechado $[\frac{7}{2}, \frac{35}{2}]$ contém os valores da integral definida. No Exemplo 2, Secção 5.8, mostramos que o valor exato da integral definida é $\frac{679}{64}$.

EXEMPLO 4 Aplique o Teorema 5.6.9 para encontrar um intervalo fechado contendo o valor de $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$.

Solução Se $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, então

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

Para x em $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, $f'(x) = 0$ se $x = \frac{\pi}{2}$. Como $f'(x) > 0$ quando $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ e $f'(x) < 0$ quando $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, segue que f tem um valor máximo relativo em $\frac{\pi}{2}$, e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$. Além disso, $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}/\sqrt{2} \approx 0{,}841$ e $f(\frac{3\pi}{4}) \approx 0{,}841$. Assim, em $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ o valor mínimo absoluto de f é 0,841 e o valor máximo absoluto é 1. Assim, com $m = 0{,}841$ e $M = 1$ no Teorema 5.6.9,

$$0{,}841[\tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{1}{4}\pi] \leqslant \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx \leqslant 1[\tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{1}{4}\pi]$$

$$0{,}420\pi \leqslant \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx \leqslant 0{,}5\pi$$

$$1{,}32 \leqslant \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx \leqslant 1{,}57$$

O valor da integral definida está, portanto, no intervalo fechado [1,32, 1,57].

EXERCÍCIOS 5.6

Nos Exercícios de 1 a 6, calcule a integral definida.

1. $\int_{2}^{5} 4\,dx$ **2.** $\int_{-3}^{4} 7\,dx$ **3.** $\int_{-2}^{2} \sqrt{5}\,dx$

4. $\int_{5}^{-1} 6\,dx$ **5.** $\int_{-5}^{-10} dx$ **6.** $\int_{3}^{3} dx$

Nos Exercícios de 7 a 18, calcule a integral definida usando os resultados:

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = 3 \qquad \int_{-1}^{2} x\,dx = \tfrac{3}{2} \qquad \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 2$$

$$\int_{0}^{\pi} \cos x\,dx = 0 \qquad \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

7. $\int_{-1}^{2} (2x^2 - 4x + 5)\,dx$ **8.** $\int_{-1}^{2} (8 - x^2)\,dx$

9. $\int_{-1}^{2} (2 - 5x + \frac{1}{2}x^2)\,dx$ **10.** $\int_{-1}^{2} (3x^2 - 4x - 1)\,dx$

11. $\int_{2}^{-1} (2x + 1)^2\,dx$ **12.** $\int_{-1}^{2} (5x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2})\,dx$

13. $\int_{-1}^{2} (x - 1)(2x + 3)\,dx$ **14.** $\int_{2}^{-1} 3x(x - 4)\,dx$

15. $\int_{0}^{\pi} (2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x + 1)\,dx$ **16.** $\int_{0}^{\pi} 3 \cos^2 x\,dx$

17. $\int_{0}^{\pi} (\cos x + 4)^2\,dx$ **18.** $\int_{\pi}^{0} (\operatorname{sen} x - 2)^2\,dx$

Nos Exercícios de 19 a 34, aplique o Teorema 5.6.9 para encontrar um intervalo fechado contendo o valor da integral definida dada.

19. $\int_{3}^{7} 2x\,dx$ **20.** $\int_{2}^{5} 3x\,dx$ **21.** $\int_{0}^{4} x^2\,dx$ **22.** $\int_{-2}^{1} x^3\,dx$

23. $\int_{-3}^{6} \sqrt{3 + x}\,dx$ **24.** $\int_{-2}^{1} (x + 1)^{2/3}\,dx$

25. $\int_{-4}^{0} (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx$ **26.** $\int_{-1}^{4} (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx$

27. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen} x\,dx$ **28.** $\int_{-\pi/3}^{2\pi/3} \cos x\,dx$

29. $\int_{1}^{4} |x - 2|\,dx$ **30.** $\int_{-1}^{2} \sqrt{x^2 + 5}\,dx$

31. $\int_{-1}^{2} \frac{x}{x + 2}\,dx$ **32.** $\int_{-5}^{2} \frac{x + 5}{x - 3}\,dx$

33. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4 \cos^3 x - 9 \cos x)\,dx$ **34.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \operatorname{sen}^3 x\,dx$

Nos Exercícios de 35 a 38, use o Teorema 5.6.8 para determinar quais dos símbolos $\geqslant$ ou $\leqslant$ devem ser inseridos onde indicado.

35. $\int_{-1}^{3} (2x^2 - 4)\,dx$ _____ $\int_{-1}^{3} (x^2 - 6)\,dx$

36. $\int_{4}^{5} \sqrt{6 - x}\,dx$ _____ $\int_{4}^{5} \sqrt{x - 2}\,dx$

37. $\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \operatorname{sen}^2 x\,dx$ _____ $\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \cos^2 x\,dx$

38. $\int_{0}^{\pi/4} \cos x\,dx$ _____ $\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{sen} x\,dx$

39. Mostre que se f for contínua em $[-3, 4]$, então

$$\int_{3}^{-1} f(x)\,dx + \int_{4}^{3} f(x)\,dx + \int_{-3}^{4} f(x)\,dx + \int_{-1}^{-3} f(x)\,dx = 0$$

40. Se f for contínua em $[-1, 2]$, então

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{-1} f(x)\,dx = 0$$

41. Mostre que $\int_{0}^{1} x\,dx \geqslant \int_{0}^{1} x^2\,dx$, mas $\int_{1}^{2} x\,dx \leqslant \int_{1}^{2} x^2\,dx$, sem calcular as integrais definidas.

42. Se f for contínua em $[a, b]$, prove que

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx$$

(*Sugestão*: $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.)

43. Prove o teorema 5.6.2.

Nos Exercícios de 44 a 49, prove que o Teorema 5.6.7 é válido para a ordenação dada de a, b e c; em cada caso, use o Teorema 5.6.6.

44. $b < a < c$ **45.** $b < c < a$ **46.** $c < a < b$

47. $c < b < a$ **48.** $a < c = b$ **49.** $a = b < c$

5.7 O TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

Continuaremos a tratar das propriedades da integral definida nesta secção, com o *teorema do valor médio para integrais*. Esse teorema é relevante na prova do primeiro teorema fundamental do Cálculo (Teorema 5.8.1), que é importante, pois leva-nos a um método para avaliar integrais definidas. Começamos com uma ilustração que dá uma interpretação geométrica do teorema do valor médio para integrais.

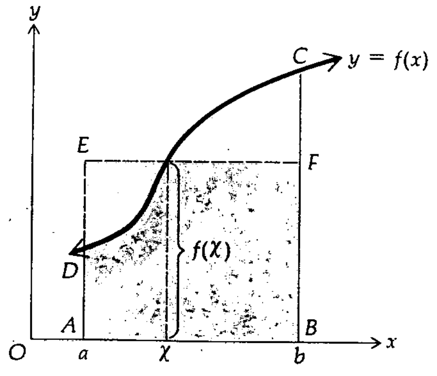


FIGURA 1

► **ILUSTRAÇÃO 1** Considere $f(x) \geqslant 0$ para todos os valores de x em $[a, b]$. Então, $\int_a^b f(x)\,dx$ dá a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Veja a Figura 1. O teorema do valor médio para integrais estabelece que existe um número χ em $[a, b]$ tal que a área do retângulo $AEFB$ com altura $f(\chi)$ unidades e comprimento $(b - a)$ unidades seja igual à área da região $ADCB$. ◄

5.7.1 TEOREMA
Teorema do Valor Médio para Integrais

Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, existe um número χ em $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\chi)(b - a)$$

Prova Como f é contínua em $[a, b]$, do teorema do valor extremo, f tem valores máximo e mínimo absolutos em $[a, b]$.

Seja m o valor mínimo absoluto ocorrendo em $x = x_m$. Assim,

$$f(x_m) = m \qquad a \leqslant x_m \leqslant b \tag{1}$$

Seja M o valor máximo absoluto ocorrendo em $x = x_M$. Assim,

$$f(x_M) = M \qquad a \leqslant x_M \leqslant b \tag{2}$$

Temos, então,

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad \text{para todo } x \text{ em } [a, b]$$

Do Teorema 5.6.9, segue que

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

Dividindo por $(b - a)$ e observando que $b - a$ é positivo, pois $b > a$, obtemos

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \leqslant M$$

Mas de (1) e (2), $m = f(x_m)$ e $M = f(x_M)$, assim temos

$$f(x_m) \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \leqslant f(x_M)$$

Dessa igualdade e do teorema do valor médio existe algum número χ num intervalo fechado contendo x_m e x_M, tal que

$$f(\chi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(\chi)(b - a) \qquad a \leqslant \chi \leqslant b \qquad \blacksquare$$

O valor de χ no Teorema 5.7.1 não é necessariamente único. O teorema não dá um método para o cálculo de χ, mas estabelece que um valor de χ existe e esse fato é usado para provar outros teoremas. Em alguns casos podemos achar o valor de χ garantido pelo teorema, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Ache o valor de χ tal que $\int_1^3 f(x)\,dx = f(\chi)(3 - 1)$ se $f(x) = x^2$. Use o resultado do Exemplo 1 da Secção 5.5.

Solução No Exemplo 1 da Secção 5.5, obtivemos

$$\int_1^3 x^2\,dx = \tfrac{26}{3}$$

Logo, queremos encontrar χ, tal que

$$f(\chi)\cdot(2)=\tfrac{26}{3}$$

Isto é,

$$\chi^2=\tfrac{13}{3}$$

$$\chi=\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{39}$$

Rejeitamos $-\frac{1}{3}\sqrt{39}$, pois não está no intervalo [1, 3], e temos

$$\int_1^3 f(x)\,dx=f(\tfrac{1}{3}\sqrt{39})(3-1)$$

O valor $f(\chi)$ dado pelo Teorema 5.7.1 é chamado de *valor médio* (ou *valor intermediário*) de f no intervalo $[a, b]$. É uma generalização da média aritmética de um conjunto finito de números. Isto é, se $\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ for um conjunto de n números, então a média aritmética será dada por

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

Para generalizar essa definição, consideramos uma partição regular do intervalo fechado $[a, b]$, que é dividido em n subintervalos de igual comprimento $\Delta x=(b-a)/n$. Seja ξ_i qualquer ponto no i-ésimo subintervalo. Formamos a soma:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)}{n} \tag{3}$$

Esse quociente corresponde à média aritmética de n números. Como $\Delta x = (b-a)/n$, temos

$$n=\frac{b-a}{\Delta x} \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3), obtemos

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x}{b-a}$$

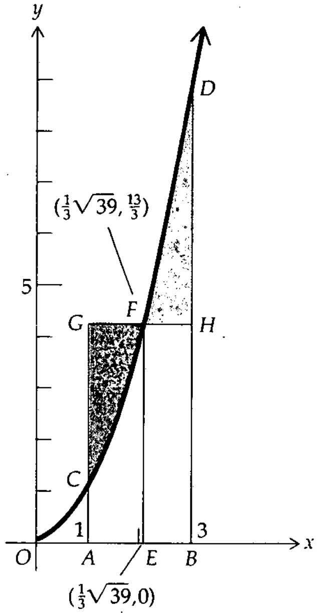
Tomando o limite quando $n\to+\infty$ (ou $\Delta x\to 0$) temos, se o limite existir,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x}{b-a}=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Isso nos leva à definição a seguir.

5.7.2 DEFINIÇÃO Se a função f for integrável no intervalo fechado $[a, b]$, o **valor médio** de f em $[a, b]$ será

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$



y
D
$(\frac{1}{3}\sqrt{39}, \frac{13}{3})$
5
G
F
H
C
1
3
O
A
E
B
x
$(\frac{1}{3}\sqrt{39}, 0)$

FIGURA 2

EXEMPLO 2 (a) Se $f(x) = x^2$, ache o valor médio de f no intervalo $[1, 3]$. (b) Interprete geometricamente o resultado da parte (a).

Solução

(a) No Exemplo 1, Secção 5.5, obtivemos

$$\int_1^3 x^2\,dx = \tfrac{26}{3}$$

Assim, se V.M. for o valor médio de f em $[1, 3]$, teremos

$$\text{V.M.} = \frac{\frac{26}{3}}{3-1} = \tfrac{13}{3}$$

(b) No Exemplo 1 encontramos para essa função

$$f(\tfrac{1}{3}\sqrt{39}) = \tfrac{13}{3}$$

Logo, o valor médio de f ocorre em $\frac{1}{3}\sqrt{39}$. Na Figura 2 há um esboço do gráfico de f em $[1, 3]$ e o segmento de reta do ponto $E(\frac{1}{3}\sqrt{39}, 0)$ sobre o eixo x ao ponto $F(\frac{1}{3}\sqrt{39}, \frac{13}{3})$ no gráfico de f. A área do retângulo *AGHB* tendo altura $\frac{13}{3}$ e comprimento 2 é igual à área da região *ACDB*. Conseqüentemente, a área da região sombreada *CGF* é igual à área da região sombreada *FDH*.

Uma aplicação do valor médio de uma função ocorre em Física e Engenharia, em conexão com o conceito de centro de massa. Esse assunto será discutido no Capítulo 6.

EXERCÍCIOS 5.7

Nos Exercícios de 1 a 8, ache o valor de χ que satisfaz o teorema do valor médio para integrais. Para os valores da integral definida, use o resultado do exercício indicado nos Exercícios 5.5. Faça uma figura ilustrando a aplicação do teorema.

1. $\int_0^2 x^2\,dx$; Exercício 11

2. $\int_2^4 x^2\,dx$; Exercício 12

3. $\int_1^2 x^3\,dx$; Exercício 13

4. $\int_0^5 (x^3-1)\,dx$; Exercício 14

5. $\int_1^4 (x^2+4x+5)\,dx$; Exercício 15

6. $\int_0^4 (x^2+x-6)\,dx$; Exercício 16

7. $\int_{-2}^2 (x^3+1)\,dx$; Exercício 17

8. $\int_{-2}^1 x^4\,dx$; Exercício 18

Nos Exercícios de 9 a 12, use o teorema do valor médio para integrais, para provar a desigualdade.

9. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx \leqslant \frac{1}{2}$

10. $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{1}{x^2+6}\,dx \leqslant 1$

11. $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x^2\,dx \leqslant \frac{\pi}{3}$

12. $\int_0^\pi \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx \leqslant \pi$

Nos Exercícios de 13 a 16, use o teorema do valor médio para integrais e o Teorema 5.6.8 para provar a desigualdade.

13. $\displaystyle 0 \leqslant \int_2^5 \frac{1}{x^3+1}\,dx \leqslant \frac{1}{3}$

14. $\displaystyle 0 \leqslant \int_5^9 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx \leqslant 2$

15. $0 \leqslant \int_0^2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi x\,dx \leqslant 2$

16. $0 \leqslant \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x \leqslant 1$

17. Dado que $\int_{-1}^2 x\,dx = \frac{3}{2}$, ache o valor médio da função identidade no intervalo $[-1, 2]$. Ache também o valor de x no qual ocorre o valor médio. Dê uma interpretação geométrica dos resultados.

18. Ache o valor médio da função f definida por $f(x) = x^2$ no intervalo $[-1, 2]$, dado que $\int_{-1}^2 x^2\,dx = 3$. Ache também o valor de x no qual ocorre o valor médio. Dê uma interpretação geométrica dos resultados.

19. Dado que $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = 2$, ache o valor médio da função seno no intervalo $[0, \pi]$. Ache também o menor valor de x onde ocorre o valor médio. Dê uma interpretação geométrica dos resultados.

20. Ache o valor médio da função f definida por $f(x) = \sec^2 x$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$, dado que $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx = 1$. Ache também o valor de x onde ocorre o valor médio. Dê uma interpretação geométrica dos resultados.

21. Suponha que uma bola saia do repouso e após t s sua velocidade seja v m/s. Desprezando a resistência do ar, expresse v em termos de t como $v = f(t)$ e ache o valor médio de f em $[0, 2]$. (*Sugestão*: ache o valor da integral definida interpretando-a como a medida da área da região contida num triângulo.)

22. Ache o valor médio da função f definida por $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$ no intervalo $[0, 7]$. Faça uma figura. (*Sugestão*: ache o valor da integral definida, interpretando-a como a medida da área da região encerrada por um quarto de círculo.)

23. Ache o valor médio da função f definida por $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ no intervalo $[-4, 4]$. Faça uma figura. (*Sugestão*: ache o valor da integral definida, interpretando-a como a região encerrada por um semicírculo.)

24. Suponha que f seja integrável em $[-4, 7]$. Se o valor médio de f no intervalo $[-4, 7]$ for $\frac{17}{4}$, ache $\int_{-4}^{7} f(x)\, dx$.

25. Se f for contínua em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, prove que existe pelo menos um número c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

26. O seguinte teorema é uma generalização do Teorema do valor médio para integrais: se f e g forem contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e $g(x) > 0$ para todo x no intervalo aberto (a, b), então existirá um número χ em $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\chi) \int_a^b g(x)\, dx$$

Prove esse teorema por um método semelhante ao do Teorema 5.7.1: obtenha a desigualdade $m \leqslant f(x) \leqslant M$ e então conclua que $mg(x) \leqslant f(x)\, g(x) \leqslant Mg(x)$; aplique o Teorema 5.6.8 e prossiga como na demonstração do Teorema 5.7.1.

27. Mostre que se $g(x) = 1$, o teorema do Exercício 26 torna-se o teorema do valor médio para integrais.

Nos Exercícios de 28 a 32, use o teorema do Exercício 26 para provar a desigualdade.

28. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x\, dx}{x^3 + 2} < \int_0^4 x\, dx$

29. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 + 4}} < \int_{-1}^{1} x^2\, dx$

30. $\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\, dx \leqslant \int_0^\pi x\, dx$

31. $\int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sen}^2 \pi x \cos \pi x\, dx \leqslant \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x\, dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \cos x}{x^2 + 1}\, dx \leqslant \int_0^1 x\, dx$

5.8 OS TEOREMAS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO

Historicamente, os conceitos básicos da integral definida foram usados pelos antigos gregos, principalmente Arquimedes (287—212 A.C.), há mais de 2000 anos, muito antes da formulação do cálculo diferencial.

No século dezessete, quase simultaneamente mas trabalhando independentemente, Newton e Leibniz mostraram como o Cálculo poderia ser usado para se encontrar a área de uma região limitada por uma curva ou um conjunto de curvas, determinando uma integral definida por antidiferenciação. O procedimento envolve o que é conhecido como os *teoremas fundamentais do Cálculo*. Antes de enunciar e prová-los, vamos discutir as integrais definidas com um limite superior variável.

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Então o valor da integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ depende somente da função f e dos números a e b, não do símbolo x usado aqui como variável independente. No Exemplo 1, Secção 5.5, encontramos o valor de $\int_1^3 x^2\, dx$, que é $\frac{26}{3}$. Qualquer outro símbolo poderia ter sido usado no lugar de x; por exemplo,

$$\int_1^3 t^2\, dt = \tfrac{26}{3} \qquad \int_1^3 u^2\, du = \tfrac{26}{3} \qquad \int_1^3 r^2\, dr = \tfrac{26}{3}$$

Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então, pelo Teorema 5.5.3 a integral definida $\int_a^b f(t)\, dt$ existe. Vamos primeiramente estabelecer que se uma integral definida existir, então ela será um único número. Se x for um número em $[a, b]$, então f será contínua em $[a, x]$, pois é contínua em $[a, b]$. Conseqüentemente, $\int_a^x f(t)\, dt$ existe e é um número cujo valor depende de x. Logo, $\int_a^x f(t)\, dt$ define uma função F tendo como seu domínio todos os números no intervalo fechado $[a, b]$ e cujo valor funcional em qualquer número x de $[a, b]$ é dado por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{1}$$

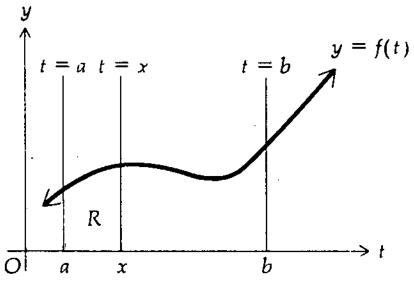


FIGURA 1

Segundo a convenção notacional, se os limites de uma integral definida forem variáveis, deverão ser usados símbolos diferentes para esses limites e para a variável independente no integrando. Assim, em (1), como x é o limite superior, usamos a letra t como a variável independente no integrando.

Se, na expressão (1), $f(t) \geqslant 0$ para todos os valores de t em $[a, b]$, então os valores funcionais de $F(x)$ poderão ser interpretados geometricamente com a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é $y = f(t)$, pelo eixo t e pelas retas $t = a$ e $t = x$. (Veja a Figura 1). Note que $F(a) = \int_a^a f(t)\, dt$, o que pela Definição 5.5.6 é igual a 0.

Vamos agora enunciar e provar um teorema importante que dá a derivada da função F definida como uma integral definida tendo um limite superior variável. Esse teorema é chamado de *primeiro teorema fundamental do Cálculo.*

5.8.1 TEOREMA
Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja x qualquer número em $[a, b]$. Se F for a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

então,

$$F'(x) = f(x) \tag{2}$$

(Se $x = a$, a derivada em (2) pode ser a derivada à direita e se $x = b$, a derivada em (2) pode ser a derivada à esquerda.)

Prova Considere dois números x_1 e $x_1 + \Delta x$ em $[a, b]$. Então

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)\, dt$$

e

$$F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)\, dt$$

então,

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)\, dt - \int_a^{x_1} f(t)\, dt \tag{3}$$

Pelo Teorema 5.6.7,

$$\int_a^{x_1} f(t)\, dt + \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)\, dt = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)\, dt$$

$$\int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)\, dt - \int_a^{x_1} f(t)\, dt = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)\, dt$$

Substituindo essa igualdade em (3), obtemos

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)\, dt \tag{4}$$

Pelo teorema do valor médio para integrais (5.7.1) existe um número χ no intervalo fechado limitado por x_1 e $x_1 + \Delta x$ tal que

$$\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)\, dt = f(\chi)\, \Delta x$$

Dessa relação e de (4), obtemos

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = f(\chi)\,\Delta x$$

$$\frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(\chi)$$

Tomando o limite quando Δx tende a zero, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\chi) \tag{5}$$

O primeiro membro de (5) é $F'(x_1)$. Para determinar $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\chi)$, lembre que χ está no intervalo fechado limitado por x_1 e $x_1 + \Delta x$, e como

$$\lim_{\Delta x \to 0} x_1 = x_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \to 0} (x_1 + \Delta x) = x_1$$

segue do teorema do "Sanduíche" (2.8.1) que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \chi = x_1$. Assim, temos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\chi) = \lim\limits_{\chi \to x_1} f(\chi)$. Como f é contínua em x_1, $\lim\limits_{\chi \to x_1} f(\chi) = f(x_1)$; assim $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\chi) = f(x_1)$ e de (5) temos que

$$F'(x_1) = f(x_1) \tag{6}$$

Se a função f não estiver definida para valores de x menores do que a, mas for contínua à direita de a, então na argumentação acima, se $x_1 = a$ em (5), Δx precisa tender a 0 pela direita. Assim, o primeiro membro de (6) será $F'_+(x_1)$. Analogamente, se f não estiver definida para valores de x maiores do que b, mas for contínua à esquerda de b, então se $x_1 = b$ em (5), Δx deve tender a zero pela esquerda. Logo, teremos $F'_-(x_1)$ no primeiro membro de (6).

Como x_1 é um número qualquer em $[a, b]$, a igualdade (6) estabelece o que queríamos provar.

O Teorema 5.8.1 estabelece que a integral definida $\int_a^x f(t)\,dt$, com limite superior variável x, é uma antiderivada de f.

A equação (2) do teorema pode ser escrita da seguinte forma, substituindo $F'(x)$ por $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)} \tag{7}$$

EXEMPLO 1 Calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\,dt$ (b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\,dt$

Solução

(a) De (7) com $f(t) = \dfrac{1}{t^3 + 1}$, temos

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\,dt = \frac{1}{x^3 + 1}$$

(b) Usamos a regra da cadeia com $u = x^2$, e temos

$$\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\, dt = \frac{d}{du}\int_3^{u} \sqrt{\cos t}\, dt \cdot \frac{du}{dx}$$

De (7) com $f(t) = \sqrt{\cos t}$ e como $\dfrac{du}{dx} = 2x$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\, dt &= \sqrt{\cos u}\,(2x)\\ &= 2x\sqrt{\cos x^2}\end{aligned}$$

Vamos usar agora o Teorema 5.8.1 para provar o *segundo teorema fundamental do Cálculo.*

5.8.2 TEOREMA Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja g uma função tal que

$$g'(x) = f(x) \tag{8}$$

para todo x em $[a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(t)\, dt = g(b) - g(a)$$

(Se $x = a$, a derivada em (8) pode ser uma derivada à direita, e se $x = b$, a derivada em (8) pode ser uma derivada à esquerda.)

Prova Se f for contínua em todos os números em $[a, b]$, sabemos do Teorema 5.8.1 que a integral definida $\int_a^x f(t)\, dt$, com o limite superior variável x, define uma função F cuja derivada em $[a, b]$ é f. Como, por hipótese, $g'(x) = f(x)$, segue do Teorema 5.1.2 que

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt + k$$

onde k é uma constante. Tomando $x = b$ e $x = a$, sucessivamente, nessa equação, obtemos

$$g(b) = \int_a^b f(t)\, dt + k \tag{9}$$

e

$$g(a) = \int_a^a f(t)\, dt + k \tag{10}$$

De (9) e (10),

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt$$

Mas, pela Definição 5.5.6, $\int_a^a f(t)\, dt = 0$; assim

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\, dt$$

que é o que queríamos provar.

Se f não estiver definida para valores de x maiores do que b, mas for contínua à esquerda de b, a derivada em (8) será a derivada à esquerda, e teremos $g'_-(b) = F'_-(b)$, de onde segue (9). Da mesma forma, se f não estiver definida para valores de x menores do que a, mas for contínua à direita de a, então a derivada em (8) será a derivada à direita e teremos $g'_+(a) = F'_+(a)$, de onde segue (10). ■

Estamos agora em posição de encontrar o valor exato de uma integral definida, aplicando o Teorema 5.8.2. Quando aplicarmos esse teorema, usaremos a notação

$$[g(b) - g(a)] \quad \text{por} \quad g(x)\Big]_a^b$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos aplicar o segundo teorema fundamental do Cálculo para determinar

$$\int_1^3 x^2\,dx$$

Aqui $f(x) = x^2$. Uma antiderivada de x^2 é $\frac{1}{3}x^3$. Daí escolhemos

$$g(x) = \frac{x^3}{3}$$

Logo, do Teorema 5.8.2,

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2\,dx &= \frac{x^3}{3}\Big]_1^3\\ &= 9 - \tfrac{1}{3}\\ &= \tfrac{26}{3}\end{aligned}$$

Compare esse resultado com o do Exemplo 1, Secção 5.5. ◀

Devido à conexão entre integrais definidas e antiderivadas, usamos o sinal de integral $\int$ para a notação $\int f(x)\,dx$ de antiderivada. Vamos dispensar agora a terminologia de antiderivadas e antidiferenciação e começaremos a chamar $\int f(x)\,dx$ de **integral indefinida**. O processo de cálculo de uma integral indefinida ou definida é chamado de **integração**.

Deve ser enfatizada a diferença entre uma integral indefinida e definida. A primeira, $\int f(x)\,dx$, foi estabelecida como sendo uma função g tal que sua derivada $D_x[g(x)] = f(x)$. Por outro lado, a segunda $\int_a^b f(x)\,dx$, é um número cujo valor depende da função f e dos números a e b e foi definida como o limite de uma soma de Riemann. A definição de integral definida não faz nenhuma referência à diferenciação.

A integral indefinida envolve uma constante arbitrária; por exemplo,

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

A constante arbitrária C é chamada de **constante de integração**. Ao aplicar o segundo teorema fundamental do Cálculo não é preciso incluir a constante arbitrária C na expressão de $g(x)$, pois o teorema permite-nos escolher *qualquer* antiderivada, inclusive aquela para a qual $C = 0$.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\, dx &= \int_{1/2}^{4} x^3\, dx - 6\int_{1/2}^{4} x^2\, dx + 9\int_{1/2}^{4} x\, dx + \int_{1/2}^{4} dx\\ &= \frac{x^4}{4} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 9\cdot\frac{x^2}{2} + x\Big]_{1/2}^{4}\\ &= (64 - 128 + 72 + 4) - (\tfrac{1}{64} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{8} + \tfrac{1}{2})\\ &= \tfrac{679}{64}\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int_{-1}^{1} (x^{4/3} + 4x^{1/3})\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (x^{4/3} + 4x^{1/3})\, dx &= \tfrac{3}{7}x^{7/3} + 4\cdot\tfrac{3}{4}x^{4/3}\Big]_{-1}^{1}\\ &= \tfrac{3}{7} + 3 - (-\tfrac{3}{7} + 3)\\ &= \tfrac{6}{7}\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int_{0}^{2} 2x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2} 2x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx &= \frac{2}{3}\int_{0}^{2} \sqrt{x^3 + 1}\,(3x^2\, dx)\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{(x^3 + 1)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_{0}^{2}\\ &= \tfrac{4}{9}(8 + 1)^{3/2} - \tfrac{4}{9}(0 + 1)^{3/2}\\ &= \tfrac{4}{9}(27 - 1)\\ &= \tfrac{104}{9}\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int_{0}^{3} x\sqrt{1 + x}\, dx$$

Solução Para calcular a integral indefinida $\int x\sqrt{1 + x}\, dx$, seja

$$u = \sqrt{1 + x} \qquad u^2 = 1 + x \qquad x = u^2 - 1 \qquad dx = 2u\, du$$

Substituindo, teremos

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x}\,dx &= \int (u^2-1)u(2u\,du)\\ &= 2\int (u^4-u^2)\,du\\ &= \tfrac{2}{5}u^5 - \tfrac{2}{3}u^3 + C\\ &= \tfrac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Logo, a integral definida

$$\begin{aligned}\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx &= \tfrac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big]_0^3\\ &= \tfrac{2}{5}(4)^{5/2} - \tfrac{2}{3}(4)^{3/2} - \tfrac{2}{5}(1)^{5/2} + \tfrac{2}{3}(1)^{3/2}\\ &= \tfrac{64}{5} - \tfrac{16}{3} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{3}\\ &= \tfrac{116}{15}\end{aligned}$$

Outro método para calcular a integral definida do Exemplo 5 é o fornecido por uma fórmula que decorre dos Teoremas 5.8.2 e 5.2.1 (a regra da cadeia para antidiferenciação). Desses teoremas, se F for uma antiderivada de f,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

Assim,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du} \qquad (11)$$

Para aplicar (11), mude as variáveis na integral dada, tomando $u = g(x)$. Logo, $du = g'(x)\,dx$. Mude, então, os limites em x de integração a e b pelos limites de integração em u, que são $g(a)$ e $g(b)$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Para calcular a integral do Exemplo 5, seja $u = \sqrt{1+x}$, $x = u^2 - 1$ e $dx = 2u\,du$. Além disso, quando $x = 0$, $u = 1$ e quando $x = 3$, $u = 2$. Assim, de (11), temos

$$\begin{aligned}\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx &= 2\int_1^2 (u^4-u^2)\,du\\ &= \tfrac{2}{5}u^5 - \tfrac{2}{3}u^3\Big]_1^2\\ &= \tfrac{64}{5} - \tfrac{16}{3} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{3}\\ &= \tfrac{116}{15}\end{aligned}$$

◀

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos x\,dx$$

Solução Seja

$u = \operatorname{sen} x \qquad du = \cos x\,dx$

Quando $x = 0$, $u = 0$; quando $x = \frac{\pi}{2}$, $u = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx &= \int_0^1 u^3 \, du \\ &= \frac{u^4}{4}\bigg]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{4}\end{aligned}$$

EXEMPLO 7 Calcule

$$\int_{-3}^{4} |x + 2| \, dx$$

Solução

$$|x+2| = \begin{cases} -x-2 & \text{se} \quad x \leqslant -2 \\ x+2 & \text{se} \ -2 \leqslant x \end{cases}$$

Do Teorema 5.6.7,

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{4} |x + 2| \, dx &= \int_{-3}^{-2} (-x-2)\, dx + \int_{-2}^{4} (x+2)\, dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{4} \\ &= [(-2+4) - (-\tfrac{9}{2} + 6)] + [(8+8) - (2-4)] \\ &= \tfrac{1}{2} + 18 \\ &= \tfrac{37}{2}\end{aligned}$$

EXEMPLO 8 Dada $f(x) = \sec^2 x$. Ache o valor médio de f no intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Solução Seja V.M. o valor médio de f em $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Da Definição 5.7.2,

$$\begin{aligned}\text{V.M.} &= \frac{1}{\frac{1}{4}\pi - (-\frac{1}{4}\pi)} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x \, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[\operatorname{tg} x\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \frac{2}{\pi}[1 - (-1)] \\ &= \frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 5.8

Nos Exercícios de 1 a 36, calcule a integral definida.

1. $\int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)\, dx$
2. $\int_0^4 (x^3 - x^2 + 1)\, dx$
3. $\int_3^6 (x^2 - 2x)\, dx$
4. $\int_{-1}^{3} (3x^2 + 5x - 1)\, dx$
5. $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2}\, dx$
6. $\int_{-3}^{5} (y^3 - 4y)\, dy$

7. $\int_0^1 \frac{z}{(z^2+1)^3}\,dz$

8. $\int_1^4 \sqrt{x}(2+x)\,dx$

9. $\int_1^{10} \sqrt{5x-1}\,dx$

10. $\int_0^{\sqrt{5}} t\sqrt{t^2+1}\,dt$

11. $\int_{-2}^0 3w\sqrt{4-w^2}\,dw$

12. $\int_{-1}^3 \frac{dy}{(y+2)^3}$

13. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\,dx$

14. $\int_0^{\pi} \cos \tfrac{1}{2}x\,dx$

15. $\int_1^2 t^2\sqrt{t^3+1}\,dx$

16. $\int_1^3 \frac{x\,dx}{(3x^2-1)^3}$

17. $\int_0^1 \frac{(y^2+2y)\,dy}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}}$

18. $\int_2^4 \frac{w^4-w}{w^3}\,dw$

19. $\int_0^{15} \frac{w\,dw}{(1+w)^{3/4}}$

20. $\int_4^5 x^2\sqrt{x-4}\,dx$

21. $\int_{-2}^5 |x-3|\,dx$

22. $\int_{-4}^4 |x-2|\,dx$

23. $\int_{-1}^1 \sqrt{|x|-x}\,dx$

24. $\int_{-3}^3 \sqrt{3+|x|}\,dx$

25. $\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}\,dx$

26. $\int_{-2}^1 (x+1)\sqrt{x+3}\,dx$

27. $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}\,dx$

(*Sugestão*: divida o numerador pelo denominador.)

28. $\int_1^4 \frac{x^5-x}{3x^3}\,dx$

29. $\int_1^{64} \left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt[3]{t}\right)dt$

30. $\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+x\sqrt{x}}\,dx$

31. $\int_1^2 \frac{x^3+2x^2+x+2}{(x+1)^2}\,dx$

32. $\int_{-3}^2 \frac{3x^3-24x^2+48x+5}{x^2-8x+16}\,dx$

(*Sugestão*: nos Exercícios 31 e 32, divida o numerador pelo denominador.)

33. $\int_0^1 \operatorname{sen} \pi x \cos \pi x\,dx$

34. $\int_0^{1/2} \sec^2 \tfrac{1}{2}\pi t \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\pi t\,dt$

35. $\int_{\pi/8}^{\pi/4} 3\operatorname{cosec}^2 2x\,dx$

36. $\int_0^{\pi/6} (\operatorname{sen} 2x + \cos 3x)\,dx$

Nos Exercícios de 37 a 46, calcule a derivada.

37. $\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{4+t^6}\,dt$

38. $\frac{d}{dx}\int_2^x \frac{1}{t^4+4}\,dt$

39. $\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{\operatorname{sen} t}\,dt$

40. $\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{1+t^4}\,dt$

41. $\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \frac{1}{3+t^2}\,dt$

42. $\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \cos(t^2+1)\,dt$

43. $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt$

44. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$

45. $\frac{d}{dx}\int_2^{\operatorname{tg} x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

46. $\frac{d}{dx}\int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}\,dt$

Nos Exercícios de 47 a 50, ache o valor médio da função f no intervalo [a, b]. Nos Exercícios 47 e 48, ache o valor de x onde ocorre o valor médio de f e faça um esboço.

47. $f(x) = 9 - x^2$; $[a, b] = [0, 3]$

48. $f(x) = 8x - x^2$; $[a, b] = [0, 4]$

49. $f(x) = 3x\sqrt{x^2-16}$; $[a, b] = [4, 5]$

50. $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$; $[a, b] = [7, 12]$

51. Num circuito elétrico, suponha que a força eletromotriz seja E volts em t s e que $E = 2 \operatorname{sen} 3t$. Ache o valor médio de E de $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{3}$.

52. Para o circuito elétrico do Exercício 51, ache a raiz quadrada do valor médio de E^2 de $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{3}$. (*Sugestão*: use a identidade $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.)

53. Uma bola cai do repouso e após t s sua velocidade é v m/s. Desprezando a resistência do ar, mostre que a velocidade média durante o primeiro $\frac{1}{2}T$ s é um terço da velocidade durante o $\frac{1}{2}T$ s seguinte.

54. Uma pedra é atirada para baixo com uma velocidade inicial de v_0 m/s. Despreze a resistência do ar. (a) Mostre que se v m/s for a velocidade da pedra após cair s m, então $v = \sqrt{v_0^2 + 2gs}$. (b) Ache a velocidade média nos primeiros 30 m de queda, se a velocidade inicial for 15 m/s.(Tome $g = 10$ e a direção positiva para baixo.)

55. Ache $\int_4^{16}\left[D_x \int_5^x (2\sqrt{t} - 1)\,dt\right]dx$.

56. Seja f uma função cuja derivada f' é contínua em $[a, b]$. Ache o valor médio da inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $[a, b]$ e dê uma interpretação geométrica do resultado.

5.9 ÁREA DE UMA REGIÃO PLANA

Na Secção 5.4 definimos a área de uma região plana como o limite de uma soma de Riemann, e na Secção 5.5 aprendemos que tal limite é uma integral definida. Agora que dispomos de técnicas para calcular integrais definidas, consideraremos mais problemas envolvendo áreas de regiões planas.

Nos exemplos a seguir expresse primeiro a medida da área procurada como o limite de uma soma de Riemann para reforçar o procedimento de construção dessas somas, pensando em futuras aplicações.

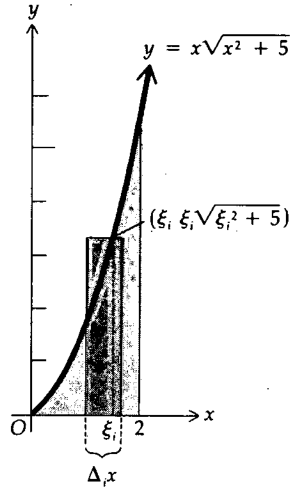


FIGURA 1

EXEMPLO 1 Ache a área da região no primeiro quadrante, limitada pela curva

$$y = x\sqrt{x^2 + 5}$$

pelo eixo x e pela reta $x = 2$. Faça um esboço.

Solução Veja a Figura 1, que mostra a região, bem como um dos elementos de área retangular.

Tomamos uma partição do intervalo $[0, 2]$. O comprimento do i-ésimo retângulo é $\Delta_i x$ e a altura é $\xi_i\sqrt{\xi_i^2 + 5}$ unidades, onde ξ_i é qualquer número no i-ésimo subintervalo. Logo, a medida da área do elemento retangular é $\xi_i\sqrt{\xi_i^2 + 5}\ \Delta_i x$. A soma das medidas das áreas de n de tais retângulos é

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i\sqrt{\xi_i^2 + 5}\ \Delta_i x$$

que é uma soma de Riemann. O limite dessa soma quando $\|\Delta\|$ tende a zero dá a medida procurada da área. O limite de uma soma de Riemann é uma integral definida que calculamos pelo segundo teorema fundamental do Cálculo. Seja A unidades quadradas a área da região. Então,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\sqrt{\xi_i^2 + 5}\ \Delta_i x \\ &= \int_0^2 x\sqrt{x^2 + 5}\ dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{x^2 + 5}\ (2x\ dx) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}(x^2 + 5)^{3/2}\Big]_0^2 \\ &= \tfrac{1}{3}[(9)^{3/2} - (5)^{3/2}] \\ &= \tfrac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5}) \\ &\approx 5{,}27 \end{aligned}$$

Assim sendo, a área é $\frac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5})$ unidades quadradas ou, aproximadamente, 5,27 unidades quadradas.

Até então consideramos a área de uma região para a qual os valores funcionais são não-negativos em $[a, b]$. Suponhamos agora que $f(x) < 0$ para todo x em $[a, b]$. Então, cada $f(\xi_i)$ é um número negativo; assim, definimos o número de unidades quadradas da região limitada por $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ como

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [-f(\xi_i)]\ \Delta_i x$$

o que é igual a

$$-\int_a^b f(x)\ dx$$

EXEMPLO 2 Ache a área da região limitada pela curva

$$y = x^2 - 4x$$

pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 3$.

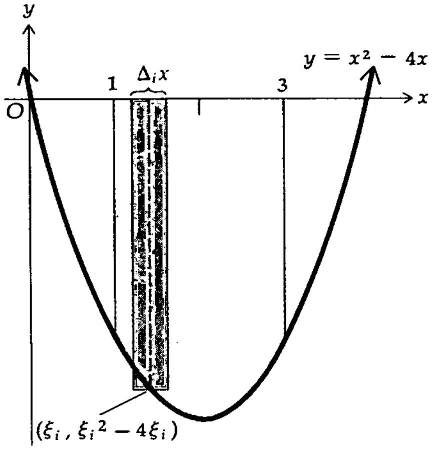


FIGURA 2

Solução A Figura 2 ilustra a região e um elemento de área retangular.*

Vamos tomar uma partição do intervalo [1, 3]; o comprimento do i-ésimo retângulo é $\Delta_i x$. Como $x^2 - 4x < 0$ em [1, 3], a altura do i-ésimo retângulo é $-(\xi_i^2 - 4\xi_i) = 4\xi_i - \xi_i^2$. Logo, a soma das medidas das áreas de n retângulos é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} (4\xi_i - \xi_i^2)\,\Delta_i x$$

A medida desejada da área é dada pelo limite dessa soma quando $\|\Delta\|$ tende a 0; assim, se A unidades quadradas for a área da região,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (4\xi_i - \xi_i^2)\,\Delta_i x \\ &= \int_1^3 (4x - x^2)\,dx \\ &= 2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 \Big]_1^3 \\ &= \tfrac{22}{3} \end{aligned}$$

Então, a área da região é $\frac{22}{3}$ unidades quadradas.

EXEMPLO 3 Ache a área da região limitada pela curva

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 2$.

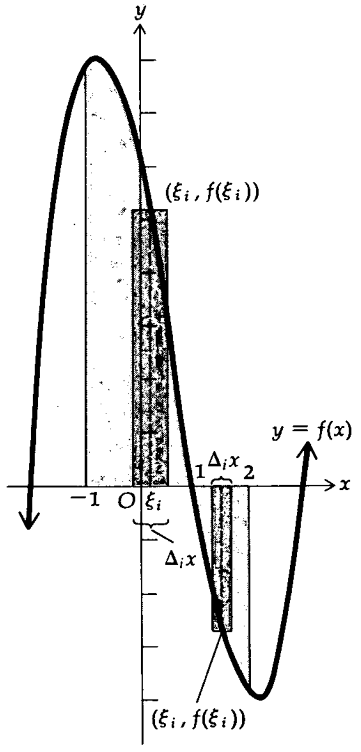


FIGURA 3

Solução A região está na Figura 3. Seja

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Como $f(x) \geqslant 0$ quando x está no intervalo fechado $[-1, 1]$ e $f(x) \leqslant 0$ quando x está no intervalo fechado [1, 2], separamos a região em duas partes. Seja A_1 o número de unidades quadradas na área da região quando x estiver em $[-1, 1]$ e seja A_2 o número de unidades quadradas na área da região quando x estiver em [1, 2]. Então,

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [-f(\xi_i)]\,\Delta_i x \\ &= \int_1^2 -(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,dx \end{aligned}$$

Se A unidades quadradas forem a área de toda a região, então

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 \\
&= \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,dx \\
&= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{-1}^{1} - \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 6x\right]_{1}^{2} \\
&= [(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{2} + 6) - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{2} - 6)] - [(4 - \tfrac{16}{3} - 10 + 12) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{2} + 6)] \\
&= \tfrac{32}{3} - (-\tfrac{29}{12}) \\
&= \tfrac{157}{12}
\end{aligned}$$

A área da região é, portanto, $\frac{157}{12}$ unidades quadradas.

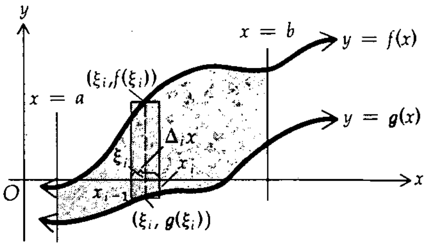


FIGURA 4

Consideremos duas funções f e g contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e tais que $f(x) \geqslant g(x)$ para todos x em $[a, b]$. Queremos encontrar a área da região limitada por duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Tal situação está mostrada na Figura 4.

Tome uma partição do intervalo $[a, b]$, com o i-ésimo subintervalo tendo um comprimento $\Delta_i x$. Em cada subintervalo, escolha um ponto ξ_i. Considere o retângulo tendo altura $[f(\xi_i) - g(\xi_i)]$ unidades e comprimento $\Delta_i x$ unidades. Um retângulo é mostrado na Figura 4. Há n de tais retângulos, cada um associado a um subintervalo. A soma das medidas das áreas desses n retângulos é dada pela seguinte soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\,\Delta_i x$$

Esta soma é uma aproximação do que intuitivamente pensamos ser o número representando a "medida da área" da região. Quanto menor o valor de $\|\Delta\|$, melhor será a aproximação. Se A unidades quadradas for a área da região, definimos

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\,\Delta_i x \qquad (1)$$

Como f e g são contínuas em $[a, b]$, assim também será $f - g$; logo, o limite em (1) existe e é igual à integral definida.

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

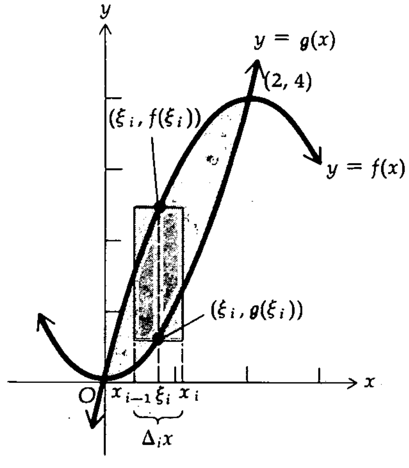


FIGURA 5

EXEMPLO 4 Ache a área da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

Solução Para encontrar os pontos de intersecção das duas curvas resolvemos simultaneamente as equações e obtemos os pontos (0, 0) e (2, 4). A região está na Figura 5.

Seja

$$f(x) = -x^2 + 4x \qquad g(x) = x^2$$

Logo, no intervalo [0, 2] a curva $y = f(x)$ está acima da curva $y = g(x)$. Traçamos um elemento de área retangular tendo $[f(\xi_i) - g(\xi_i)]$ unidades de altura e $\Delta_i x$ unidades de comprimento. Então, a medida da área desse retângulo é dada por $[f(\xi_i) - g(\xi_i)]\,\Delta_i x$. A soma das medidas das áreas de n desses retângulos é dada pela soma de Riemann.

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\,\Delta_i x$$

Se A unidades quadradas for a área da região, então

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\,\Delta_i x$$

e o limite da soma de Riemann será uma integral definida. Logo,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx \\ &= \int_0^2 [(-x^2 + 4x) - x^2]\,dx \\ &= \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\,dx \\ &= \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 \\ &= -\tfrac{16}{3} + 8 - 0 \\ &= \tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

A área da região é $\frac{8}{3}$ unidades quadradas.

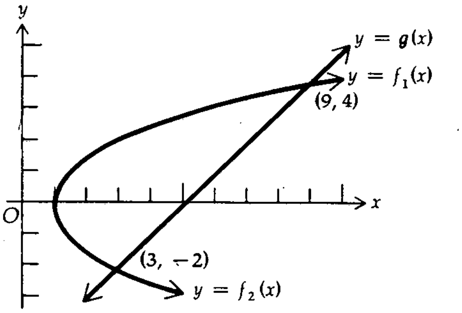


FIGURA 6

EXEMPLO 5 Ache a área da região limitada pela parábola $y^2 = 2x - 2$ e pela reta $y = x - 5$.

Solução As duas curvas interceptam-se nos pontos (3, −2) e (9, 4). A região está mostrada na Figura 6.

A equação $y^2 = 2x - 2$ é equivalente às equações

$$y = \sqrt{2x - 2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{2x - 2}$$

e da primeira equação obtemos a metade superior da parábola, enquanto que da segunda equação resulta a outra metade da parábola. Se pusermos $f_1(x) = \sqrt{2x - 2}$ e $f_2(x) = -\sqrt{2x - 2}$, a equação da metade superior da parábola será $y = f_1(x)$, enquanto que $y = f_2(x)$ é a equação da outra parte. Se pusermos $g(x) = x - 5$, a equação da reta será $y = g(x)$.

Na Figura 7 vemos dois elementos retangulares de área. Cada retângulo tem a base superior na curva $y = f_1(x)$. Como a base inferior do primeiro retângulo está na curva $y = f_2(x)$, a altura será $[f_1(\xi_i) - f_2(\xi_i)]$ unidades. Como a base inferior do segundo retângulo está sobre a curva $y = g(x)$, sua altura será $[f_1(\xi_i) - g(\xi_i)]$ unidades. Se desejarmos resolver esse problema usando elementos verticais e retangulares de área, precisamos dividir a região em duas regiões separadas, por exemplo, R_1 e R_2 onde R_1 é a região limitada pelas curvas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ e pela reta $x = 3$, onde R_2 é a região limitada pelas curvas $y = f_1(x)$ e $y = g(x)$ e pela reta $x = 3$ (veja a Figura 8).

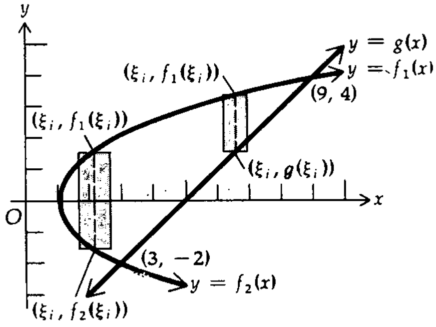


FIGURA 7

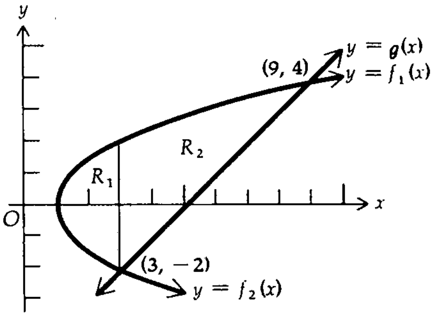


FIGURA 8

Se A_1 for o número de unidades quadradas da área da região R_1, temos

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) - f_2(\xi_i)]\, \Delta_i x \\ &= \int_1^3 [f_1(x) - f_2(x)]\, dx \\ &= \int_1^3 [\sqrt{2x-2} + \sqrt{2x-2}]\, dx \\ &= 2\int_1^3 \sqrt{2x-2}\, dx \\ &= \tfrac{2}{3}(2x-2)^{3/2}\Big]_1^3 \\ &= \tfrac{16}{3} \end{aligned}$$

Se A_2 for o número de unidades quadradas da área da região R_2, temos

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) - g(\xi_i)]\, \Delta_i x \\ &= \int_3^9 [f_1(x) - g(x)]\, dx \\ &= \int_3^9 [\sqrt{2x-2} - (x-5)]\, dx \\ &= \left[\tfrac{1}{3}(2x-2)^{3/2} - \tfrac{1}{2}x^2 + 5x\right]_3^9 \\ &= [\tfrac{64}{3} - \tfrac{81}{2} + 45] - [\tfrac{8}{3} - \tfrac{9}{2} + 15] \\ &= \tfrac{38}{3} \end{aligned}$$

Logo, $A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{38}{3}$. Assim, a área de toda a região é 18 unidades quadradas.

EXEMPLO 6 Ache a área da região do Exemplo 5, tomando elementos de área retangulares horizontais.

Solução A Figura 9 ilustra a região com um elemento de área retangular horizontal.

Se nas equações da parábola e da reta resolvermos em x,

$$x = \tfrac{1}{2}(y^2 + 2) \qquad x = y + 5$$

Tomando $\phi(y) = \frac{1}{2}(y^2 + 2)$ e $\lambda(y) = y + 5$, a equação da parábola pode ser escrita como $x = \phi(y)$ e a da reta como $x = \lambda(y)$. Considere o intervalo fechado $[-2, 4]$ no eixo y e tome a partição desse intervalo. O i-ésimo subintervalo terá um comprimento de $\Delta_i y$. No i-ésimo subintervalo $[y_i - 1, y_i]$, escolha um ponto ξ_i. Então, o comprimento do i-ésimo elemento retangular é $[\lambda(\xi_i) - \phi(\xi_i)]$ unidades e a largura é $\Delta_i y$ unidades. A medida da área da região pode ser aproximada pela soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [\lambda(\xi_i) - \phi(\xi_i)]\, \Delta_i y$$

Se A unidades quadradas for a área da região, então

$$A = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [\lambda(\xi_i) - \phi(\xi_i)]\, \Delta_i y$$

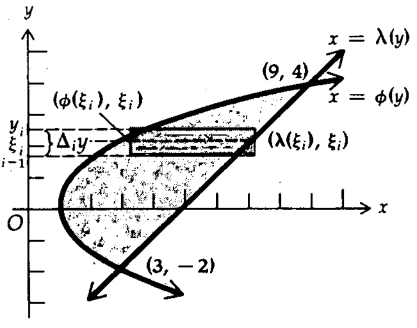


FIGURA 9

Como λ e ϕ são contínuas em $[-2, 4]$, então $\lambda - \phi$ também será, e o limite da soma de Riemann é uma integral definida:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{4} [\lambda(y) - \phi(y)]\,dy \\
&= \int_{-2}^{4} [(y+5) - \tfrac{1}{2}(y^2+2)]\,dy \\
&= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{4} (-y^2 + 2y + 8)\,dy \\
&= \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{3}y^3 + y^2 + 8y\Big]_{-2}^{4} \\
&= \tfrac{1}{2}[(-\tfrac{64}{3} + 16 + 32) - (\tfrac{8}{3} + 4 - 16)] \\
&= 18
\end{aligned}$$

Comparando as soluções nos Exemplos 5 e 6, vemos que no primeiro caso temos que calcular duas integrais definidas, enquanto que no segundo caso há somente uma. Em geral, se possível, devemos escolher elementos de área retangulares de forma a obter uma única integral definida. O seguinte exemplo ilustra uma situação onde são necessárias duas integrais definidas.

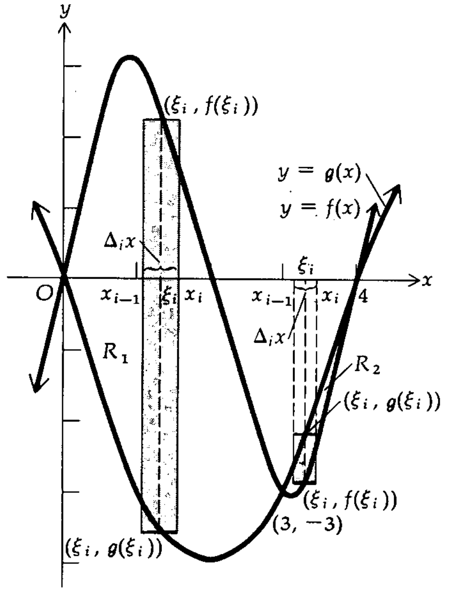


FIGURA 10

EXEMPLO 7 Ache a área da região limitada pelas curvas $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e $y = x^2 - 4x$.

Solução Os pontos de intersecção das duas curvas são $(0, 0)$, $(3, -3)$ e $(4, 0)$. A região está na Figura 10.

Seja

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \qquad g(x) = x^2 - 4x$$

No intervalo $[0, 3]$, a curva $y = f(x)$ está acima da curva $y = g(x)$, e no intervalo $[3, 4]$, a curva $y = g(x)$ está acima da curva $y = f(x)$. Dessa forma, a região precisa ser dividida em duas regiões separadas R_1 e R_2, onde R_1 é a região limitada pelas curvas no intervalo $[0, 3]$ e R_2 é a região limitada pelas curvas no intervalo $[3, 4]$. Se A_1 unidades quadradas for a área de R_1 e A_2 unidades quadradas for a área de R_2,

$$A_1 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\,\Delta_i x \qquad A_2 = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [g(\xi_i) - f(\xi_i)]\,\Delta_i x$$

assim sendo,

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 &= \int_0^3 [(x^3 - 6x^2 + 8x) - (x^2 - 4x)]\,dx + \int_3^4 [(x^2 - 4x) - (x^3 - 6x^2 + 8x)]\,dx \\
&= \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x)\,dx + \int_3^4 (-x^3 + 7x^2 - 12x)\,dx \\
&= \Big[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{7}{3}x^3 + 6x^2\Big]_0^3 + \Big[-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{7}{3}x^3 - 6x^2\Big]_3^4 \\
&= \tfrac{45}{4} + \tfrac{7}{12} \\
&= \tfrac{71}{6}
\end{aligned}$$

Logo, a área pedida é $\frac{71}{6}$ unidades quadradas.

EXERCÍCIOS 5.9

Nos Exercícios de 1 a 38 ache a área limitada pelas curvas dadas. Em cada problema, faça o seguinte: (a) desenhe uma figura mostrando a região e um elemento de área retangular; (b) expresse a área da região como o limite de uma soma de Riemann; (c) ache o limite na parte (b), calculando uma integral definida pelo segundo teorema fundamental do Cálculo.

1. $y = 4 - x^2$; eixo x

2. $y = x^2 - 2x + 3$; eixo x; $x = -2$; $x = 1$

3. $y = 4x - x^2$; eixo x; $x = 1$; $x = 3$

4. $y = 6 - x - x^2$; eixo x

5. $y = \sqrt{x+1}$; eixo x; eixo y; $x = 8$

6. $y = \dfrac{1}{x^2} - x$; eixo x; $x = 2$; $x = 3$

7. $y = x^2 + x - 12$; eixo x

8. $y = x^2 - 6x + 5$; eixo x

9. $y = \operatorname{sen} x$; eixo x; $x = \frac{1}{3}\pi$; $x = \frac{2}{3}\pi$

10. $y = \cos x$; eixo x; eixo y; $x = \frac{1}{6}\pi$

11. $y = \sec^2 x$; eixo x; eixo y; $x = \frac{1}{4}\pi$

12. $y = \operatorname{cosec}^2 x$; eixo x; $x = \frac{1}{4}\pi$; $x = \frac{1}{3}\pi$

13. $x^2 = -y$; $y = -4$

14. $y^2 = -x$; $x = -2$; $x = -4$

15. $x^2 + y + 4 = 0$; $y = -8$. Tome os elementos de área perpendiculares ao eixo y.

16. A mesma região do Exercício 15. Tome os elementos de área paralelos ao eixo y.

17. $x^2 - y + 1 = 0$; $x - y + 1 = 0$. Tome os elementos de área perpendiculares ao eixo x.

18. A mesma região do Exercício 17. Tome os elementos de área paralelos ao eixo x.

19. $x^3 = 2y^2$; $x = 0$; $y = -2$

20. $y^3 = 4x$; $x = 0$; $y = -2$

21. $y = 2 - x^2$; $y = -x$

22. $y = x^2$; $y = x^4$

23. $y^2 = x - 1$; $x = 3$

24. $y = x^2$; $x^2 = 18 - y$

25. $y = \sqrt{x}$; $y = x^3$

26. $x = 4 - y^2$; $x = 4 - 4y$

27. $y^3 = x^2$; $x - 3y + 4 = 0$

28. $xy^2 = y^2 - 1$; $x = 1$; $y = 1$; $y = 4$

29. $x = y^2 - 2$; $x = 6 - y^2$

30. $x = y^2 - y$; $x = y - y^2$

31. $y = 2x^3 - 3x^2 - 9x$; $y = x^3 - 2x^2 - 3x$

32. $3y = x^3 - 2x^2 - 15x$; $y = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

33. $y = x^3 + 3x^2 + 2x$; $y = 2x^2 + 4x$

34. $y = |x - 1| + 3$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 4$

35. $y = \cos x - \operatorname{sen} x$; $x = 0$; $y = 0$

36. $y = \operatorname{sen} x$; $y = -\operatorname{sen} x$; $x = -\frac{1}{2}\pi$; $x = \frac{1}{2}\pi$

37. $y = |x|$; $y = x^2 - 1$; $x = -1$; $x = 1$

38. $y = |x + 1| + |x|$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 3$

39. Ache, por integração, a área do triângulo tendo vértices (5, 1), (1, 3), e (−1, −2).

40. Ache, por integração, a área do triângulo tendo vértices (3, 4), (2, 0), e (0,1).

41. Ache a área da região limitada pela reta $x = 4$ e pela curva $x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$. (*Sugestão*: resolva a equação cúbica em y em termos de x e expresse y como duas funções de x.)

42. Ache a área da região limitada pelas três curvas $y = x^2$, $x = y^3$, e $x + y = 2$.

43. Ache a área da região limitada pelas três curvas $y = x^2$, $y = 8 - x^2$, e $4x - y + 12 = 0$.

44. Ache, por integração, a área do trapézio tendo vértices (−1, −1), (2, 2), (6, 2) e (7, −1).

45. Ache a área da região limitada pela curva $y = \operatorname{sen} x$, pela reta $y = 1$, e pelo eixo y à direita do eixo y.

46. Ache a área da região limitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ entre dois pontos de intersecção consecutivos.

47. Ache a área da região limitada pela curva $y = \operatorname{tg}^2 x$, pelo eixo x e pela reta $x = \frac{1}{4}\pi$.

48. Ache a área da região acima da parábola $x^2 = 4py$ e dentro do triângulo formado pelo eixo x e pelas retas $y = x + 8p$ e $y = -x + 8p$.

49. Ache a área da região limitada pelas parábolas $y^2 = 4px$ e $x^2 = 4py$.

50. Ache a taxa de variação da medida da área do Exercício 48 em relação a p quando $p = \frac{3}{8}$.

51. Ache a taxa de variação da medida da área do Exercício 49 em relação a p quando $p = 3$.

52. Determine m de tal forma que a região acima da reta $y = mx$ e abaixo da parábola $y = 2x - x^2$ tenha uma área de 36 unidades quadradas.

53. Determine m de tal forma que a região acima da curva $y = mx^2 (m > 0)$, à direita do eixo y e abaixo da reta $y = m$ tenha uma área de K unidades quadradas, onde $K > 0$.

54. Se A unidades quadradas for a área da região limitada pela parábola $y^2 = 4x$ e pela reta $y = mx (m > 0)$, ache a taxa de variação de A em relação a m.

5.10 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Quando aplicamos o segundo teorema fundamental do Cálculo para avaliar uma integral definida, é necessário obter uma integral indefinida. Na Secção 5.8 calculamos a integral indefinida com as técnicas apresentadas nas Secções 5.1 e 5.2. Embora você vá aprender métodos adicionais para a obtenção de integrais indefinidas no Capítulo 9, ainda restarão algumas funções para as quais uma integral definida não pode ser calculada com exatidão, se forem usadas funções elementares. Exemplos de tais integrais definidas são

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx \qquad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x^2\, dx$$

Outros exemplos encontram-se nos exercícios. Nessa Secção vamos aprender dois métodos para calcular um valor aproximado de uma integral definida de uma função que é contínua num intervalo fechado. Esses métodos freqüentemente dão uma precisão razoavelmente boa e variações deles são usadas para o cálculo de integrais definidas em computadores e calculadoras programáveis. O primeiro método é conhecido como *regra do trapézio.*

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. A integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ é o limite de uma soma de Riemann; isto é

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

A interpretação geométrica da soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

é que ela é igual à soma das medidas das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x, mais o negativo da medida das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x (veja a Figura 3 da Secção 5.5).

Para aproximar a medida da área de uma região usaremos trapézios em vez de retângulos. Vamos também usar partições regulares e valores funcionais em pontos igualmente espaçados.

Assim, para a integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos cada um com comprimento $\Delta x = (b - a)/n$. Obtemos os seguintes pontos $(n + 1)$: $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$, ..., $x_i = a + i\Delta x$, ..., $x_{n-1} = a + (n - 1)\Delta x$, $x_n = b$. Então, a integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ pode ser expressa como a soma de n integrais definidas da seguinte maneira:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\, dx \qquad (1)$$

Para interpretar (1) geometricamente, consulte a Figura 1, na qual $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$; contudo, (1) é válida para toda função contínua em $[a, b]$.

Então, a integral $\int_a^{x_1} f(x)\, dx$ é a medida da área da região limitada pelo eixo x, pelas retas $x = a$ e $x = x_1$, e pela parte da curva de P_0 a P_1. Esta integral

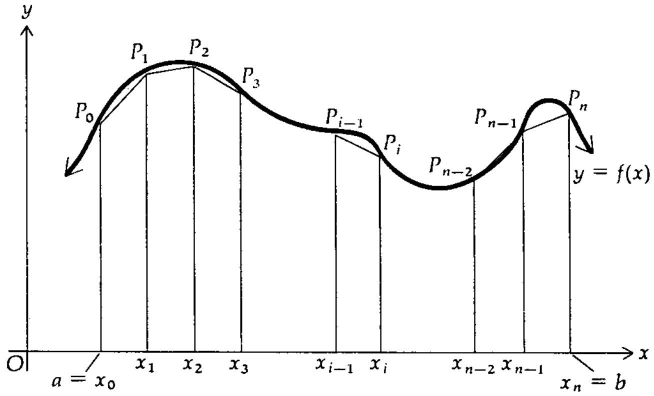


FIGURA 1

pode ser aproximada pela medida da área do trapézio formado pelas retas $x = a$, $x = x_1$, P_0P_1 e pelo eixo x. Por uma fórmula da Geometria, a medida da área desse trapézio é

$$\tfrac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)]\,\Delta x$$

Analogamente, as demais integrais do segundo membro de (1) podem ser aproximadas pela medida da área de um trapézio. Para a i-ésima integral,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\,\Delta x$$

Assim sendo, se usarmos essa expressão para cada uma das integrais do segundo membro de (1), teremos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{2}[f(x_0) + f(x_1)]\,\Delta x + \tfrac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]\,\Delta x + \ldots + \tfrac{1}{2}[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})]\,\Delta x + \tfrac{1}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,\Delta x$$

Logo,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{2}\Delta x[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Essa fórmula é conhecida como a *regra do trapézio* e vamos enunciá-la formalmente no teorema a seguir.

5.10.1 TEOREMA
A Regra do Trapézio

Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e os números $a = x_0$, $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ formarem uma partição regular de $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

EXEMPLO 1 Ache uma aproximação para

$$\int_0^3 \frac{dx}{16 + x^2}$$

usando a regra do trapézio com $n = 6$. Expresse o resultado com três casas decimais.

Solução Como $[a, b] = [0, 3]$ e $n = 6$,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = 0{,}5 \qquad \frac{b-a}{2n} = \frac{3-0}{12} = 0{,}25$$

Logo,

$$\int_0^3 \frac{dx}{16 + x^2} \approx 0{,}25[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)]$$

onde $f(x) = 1/(16 + x^2)$. O cálculo da soma entre colchetes acima está na Tabela 1, cujos valores podem ser obtidos usando uma calculadora. Assim,

$$\int_0^3 \frac{dx}{16 + x^2} \approx (0{,}25)(0{,}6427) \approx 0{,}1607 \approx 0{,}161$$

Tabela 1

i	x_i	$f(x_i)$	k_i	$k_i \cdot f(x_i)$
0	0	0,0625	1	0,0625
1	0,5	0,0615	2	0,1230
2	1	0,0588	2	0,1176
3	1,5	0,0548	2	0,1096
4	2	0,0500	2	0,1000
5	2,5	0,0450	2	0,0900
6	3	0,0400	1	0,0400

$$\sum_{i=0}^{6} k_i f(x_i) = 0{,}6427$$

Para obter um valor exato dessa integral definida é necessária uma técnica que você aprenderá na Secção 8.3. O valor exato até quatro casas decimais é 0,1609.

Para considerar a precisão da aproximação de uma integral definida pela regra do trapézio, devemos ter em mente dois tipos de erros. Um deles é cometido quando aproximamos o gráfico da função por segmentos de retas. O termo **erro de truncamento** é usado para denominá-lo. O outro tipo de erro, que é inevitável, é o chamado **erro de arredondamento**. Ele surge porque números com finitas casas decimais são usados para aproximar números reais. À medida que o valor de n (número de subintervalos) aumenta, a precisão de aproximação da área da região por áreas de trapézios é maior, assim o erro de truncamento é reduzido. Porém, à medida que aumenta n, são necessários mais cálculos, o que acarreta um aumento no erro de arredondamento. Através de métodos de *análise numérica* é possível, num dado problema, determinar o valor de n que minimiza os erros combinados. Obviamente, o erro de arredondamento é afetado pela maneira como são realizados os cálculos. O erro de truncamento pode ser estimado por um teorema. Provamos primeiro que quando Δx tende a zero e n aumenta indefinidamente, o limite da aproximação pela regra do trapézio é o valor exato da integral definida. Seja

$$T = \tfrac{1}{2}\,\Delta x[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Então,

$$T = [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]\,\Delta x + \tfrac{1}{2}[f(x_0) - f(x_n)]\,\Delta x$$

$$\Leftrightarrow \quad T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \tfrac{1}{2}[f(a) - f(b)]\,\Delta x$$

Logo, se $n \to +\infty$ e $\Delta x \to 0$,

$$\lim_{\Delta x\to 0} T = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{1}{2}[f(a) - f(b)]\,\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + 0$$

Assim, podemos tornar a diferença entre T e o valor da integral definida tão pequena quanto desejarmos, tomando n suficientemente grande (e, em conseqüência Δx suficientemente pequeno).

O teorema a seguir, provado em análise numérica, fornece um método para estimar o erro de truncamento cometido quando usamos a regra do trapézio. Vamos denotar o erro de truncamento por ϵ_T.

5.10.2 TEOREMA Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e f' e f'' ambas existem em $[a, b]$. Se

$$\epsilon_T = \int_a^b f(x)\,dx - T$$

onde T é o valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$ encontrado pela regra do trapézio, então existe algum número η em $[a, b]$ tal que

$$\epsilon_T = -\tfrac{1}{12}(b - a)\,f''(\eta)\,(\Delta x)^2 \qquad (2)$$

EXEMPLO 2 Ache um intervalo em que se situa o erro de truncamento no resultado do Exemplo 1.

Solução Encontramos primeiro os valores máximo e mínimo absolutos de $f''(x)$ em $[0, 3]$.

$$f(x) = (16 + x^2)^{-1}$$

$$f'(x) = -2x(16 + x^2)^{-2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^2(16 + x^2)^{-3} - 2(16 + x^2)^{-2} \\ &= (6x^2 - 32)(16 + x^2)^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -6x(6x^2 - 32)(16 + x^2)^{-4} + 12x(16 + x^2)^{-3} \\ &= 24x(16 - x^2)(16 + x^2)^{-4} \end{aligned}$$

Como $f'''(x) > 0$ para todo x no intervalo aberto $(0, 3)$, então f'' é crescente no intervalo aberto $(0, 3)$. Logo, o valor mínimo absoluto de f'' em $[0, 3]$ é $f''(0)$, e o valor máximo absoluto de f'' em $[0, 3]$ é $f''(3)$.

$$f''(0) = -\frac{1}{128} \qquad f''(3) = \frac{22}{15.625}$$

Tomando $\eta = 0$ no segundo membro de (2), obtemos

$$-\frac{3}{12}\left(-\frac{1}{128}\right)\frac{1}{4} = \frac{1}{2.048}$$

Tomando $\eta = 3$ no segundo membro de (2), obtemos

$$-\frac{3}{12}\left(\frac{22}{15.625}\right)\frac{1}{4} = -\frac{11}{125.000}$$

Assim, sendo ϵ_T o erro de truncamento no resultado do Exemplo 1, encontramos

$$-\frac{11}{125.000} \leqslant \epsilon_T \leqslant \frac{1}{2.048}$$

$$-0{,}0001 \leqslant \epsilon_T \leqslant 0{,}0005$$

Se no Teorema 5.10.2 $f(x) = mx + b$, então $f''(x) = 0$ para todo x. Logo $\epsilon_T = 0$; assim, pela regra do trapézio temos o valor exato da integral definida de uma função linear.

Outro método para aproximar o valor de uma integral definida é dado pela **regra de Simpson** (chamada algumas vezes de *regra parabólica*), em homenagem ao matemático britânico Thomas Simpson (1710-1761). Para uma dada partição do intervalo fechado $[a, b]$, a regra de Simpson dá usualmente uma melhor aproximação do que a regra do trapézio. Na regra do trapézio, pontos sucessivos no gráfico de $y = f(x)$ são conectados por segmentos de reta, enquanto que na regra de Simpson os pontos são conectados por segmentos de parábolas. Antes de desenvolver a regra de Simpson, vamos enunciar e demonstrar um teorema que será necessário.

5.10.3 TEOREMA Se $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ forem três pontos não-colineares sobre a parábola com a equação $y = Ax^2 + Bx + C$, onde $y_0 \geqslant 0$, $y_1 \geqslant 0$ e $y_2 \geqslant 0$, $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h$, então a medida da área da região limitada pela parábola, pelo eixo x e pelas retas $x = x_0$ e $x = x_2$ será dada por

$$\tfrac{1}{3}h\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

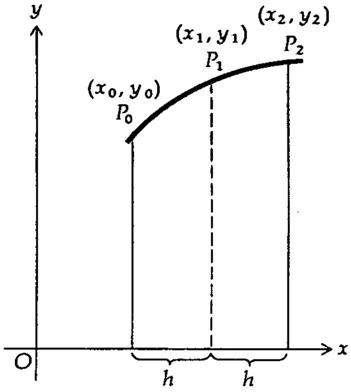


FIGURA 2

Prova A parábola cuja equação é $y = Ax^2 + Bx + C$ tem um eixo vertical. Veja a Figura 2, que mostra a região limitada pela parábola, pelo eixo x e pelas retas $x = x_0$ e $x = x_2$.

Como P_0, P_1 e P_2 são pontos sobre a parábola, suas coordenadas satisfazem a equação da parábola. Assim, quando substituímos x_1 por $x_0 + h$ e x_2 por $x_0 + 2h$, temos

$$\begin{aligned} y_0 &= A{x_0}^2 + Bx_0 + C \\ y_1 &= A(x_0 + h)^2 + B(x_0 + h) + C \\ &= A({x_0}^2 + 2hx_0 + h^2) + B(x_0 + h) + C \\ y_2 &= A(x_0 + 2h)^2 + B(x_0 + 2h) + C \\ &= A({x_0}^2 + 4hx_0 + 4h^2) + B(x_0 + 2h) + C \end{aligned}$$

Logo,

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = A(6{x_0}^2 + 12hx_0 + 8h^2) + B(6x_0 + 6h) + 6C \tag{3}$$

Agora, se K unidades quadradas for a área da região, então K poderá ser calculado como o limite de uma soma de Riemann e teremos

$$\begin{aligned} K &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (A{\xi_i}^2 + B\xi_i + C)\,\Delta x \\ &= \int_{x_0}^{x_0 + 2h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx \\ &= \tfrac{1}{3}Ax^3 + \tfrac{1}{2}Bx^2 + Cx\Big]_{x_0}^{x_0 + 2h} \\ &= \tfrac{1}{3}A(x_0 + 2h)^3 + \tfrac{1}{2}B(x_0 + 2h)^2 + C(x_0 + 2h) - (\tfrac{1}{3}A{x_0}^3 + \tfrac{1}{2}B{x_0}^2 + Cx_0) \\ &= \tfrac{1}{3}h[A(6{x_0}^2 + 12hx_0 + 8h^2) + B(6x_0 + 6h) + 6C] \end{aligned}$$

Substituindo, de (3), nessa expressão, para K obtemos

$$K = \tfrac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad \blacksquare$$

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Consideremos uma partição regular do intervalo $[a, b]$ com n subintervalos, onde n é par. O comprimento de cada subintervalo é dado por $\Delta x = (b - a)/n$. Vamos denotar os pontos sobre a curva $y = f(x)$, cujas abscissas são os pontos da partição $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1), \ldots, P_n(x_n, y_n)$; veja a Figura 3, onde $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$.

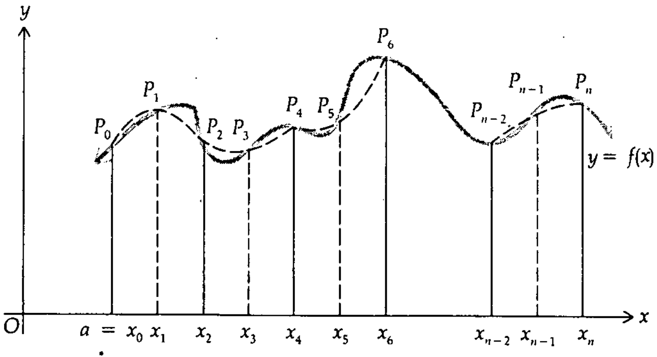


FIGURA 3

Aproximamos o segmento da curva $y = f(x)$ de P_0 a P_2 pelo segmento da parábola com eixo vertical e passando pelos pontos P_0, P_1 e P_2. Então, pelo Teorema 5.10.3, a medida da área da região limitada por essa parábola, pelo eixo x e pelas retas $x = x_0$ e $x = x_2$ com $h = \Delta x$, é dada por

$$\tfrac{1}{3}\Delta x(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Analogamente, aproximamos o segmento da curva $y = f(x)$ de P_2 a P_4 pelo segmento da parábola com eixo vertical e que passa pelos pontos P_2, P_3 e P_4. A medida da área da região limitada por essa parábola, pelo eixo x e pelas retas $x = x_2$ e $x = x_4$ é dada por

$$\tfrac{1}{3}\Delta x(y_2 + 4y_3 + y_4) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

Esse processo continua até que se obtenha $\frac{1}{2}n$ de tais regiões e que a medida da área da última região seja dada por

$$\tfrac{1}{3}\Delta x(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

A soma das medidas das áreas dessas regiões aproxima a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A medida da área dessa região é dada pela integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. Então, temos uma aproximação da integral definida.

$$\tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \dots$$
$$+ \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})] + \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{3}\Delta x[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde $\Delta x = (b - a)/n$.

Essa fórmula é conhecida como *regra de Simpson*. Seu enunciado formal será dado no próximo teorema.

5.10.4 TEOREMA
Regra de Simpson

Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, n for um inteiro par e os números $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ formarem uma partição regular de $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots$$
$$+ 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1} + f(x_n)]$$

EXEMPLO 3 Use a regra de Simpson com $n = 4$ para aproximar o valor de

$$\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$$

Solução Aplicando a regra de Simpson com $n = 4$, temos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \frac{b-a}{3n} = \frac{1-0}{3(4)}$$
$$= \frac{1-0}{4} \qquad = \tfrac{1}{12}$$
$$= \tfrac{1}{4}$$

Tabela 2

i	x_i	$f(x_i)$	k_i	$k_i \cdot f(x_i)$
0	0	1,00000	1	1,00000
1	0,25	0,80000	4	3,20000
2	0,5	0,66667	2	1,33334
3	0,75	0,57143	4	2,28572
4	1	0,50000	1	0,50000
				$\sum_{i=0}^{4} k_i f(x_i) = 8{,}31906$

Logo, se $f(x) = 1/(x + 1)$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \tfrac{1}{12}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

Os resultados da expressão entre colchetes no segundo membro, obtidos com uma calculadora, estão na Tabela 2. Portanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{1}{12}(8{,}31906)$$

$$\approx 0{,}69325^+$$

Arredondando o resultado para quatro decimais, obtemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx 0{,}6933$$

Na Secção 7.1 você aprenderá a calcular o valor exato dessa integral definida com aproximação de até quatro casas decimais, que é 0,6931. Nossa aproximação coincide com o valor exato nas primeiras três casas e o erro de aproximação é $-0{,}0002$.

Ao aplicar a regra de Simpson, quanto maior tomarmos o valor de n, menor será o valor de Δx e assim, geometricamente parece evidente que menor será o erro de truncamento da aproximação, pois a parábola, passando por três pontos de uma curva que estão próximos um do outro, está próxima da curva em todo subintervalo de comprimento $2\Delta x$.

O teorema a seguir provado em análise numérica, apresenta um método para determinar o erro de truncamento ao aplicar a regra de Simpson. Esse erro será denotado por ϵ_S.

5.10.5 TEOREMA

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e f', f'', f''' e $f^{(iv)}$ todas existem em $[a, b]$. Se

$$\epsilon_S = \int_a^b f(x)\,dx - S$$

onde S é o valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$ encontrado pela regra de Simpson, então existe algum número η em $[a, b]$ tal que

$$\epsilon_S = -\tfrac{1}{180}(b - a)\,f^{(iv)}(\eta)(\Delta x)^4 \qquad (4)$$

EXEMPLO 4 Ache um intervalo em que se situa o erro de truncamento no Exemplo 3.

Solução

$$f(x) = (x + 1)^{-1}$$

$$f'(x) = -1(x + 1)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(x + 1)^{-3}$$

$$f'''(x) = -6(x + 1)^{-4}$$

$$f^{(iv)}(x) = 24(x + 1)^{-5}$$

$$f^{(v)}(x) = -120(x + 1)^{-6}$$

Como $f^{(v)}(x) < 0$ para todo x em $[0, 1]$, $f^{(iv)}$ é decrescente em $[0, 1]$. Assim o valor mínimo absoluto de $f^{(iv)}$ está no extremo direito 1, e o valor máximo absoluto de $f^{(iv)}$ em $[0, 1]$ está no extremo esquerdo 0.

$$f^{(iv)}(0) = 24 \qquad \text{e} \qquad f^{(iv)}(1) = \tfrac{3}{4}$$

Substituindo no segundo membro de (4) η por 0, obtemos

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{180}(b-a)f^{(iv)}(0)(\Delta x)^4 &= -\tfrac{1}{180}(24)(\tfrac{1}{4})^4 \\ &\approx -0{,}00052 \end{aligned}$$

Substituindo no segundo membro de (4) η por 1, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{180}(b-a)f^{(iv)}(1)(\Delta x)^4 &= -\frac{1}{180}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4 \\ &\approx -0{,}00002 \end{aligned}$$

Assim,

$$-0{,}00052 \leqslant \epsilon_S \leqslant -0{,}00002$$

Essa desigualdade está de acordo com a discussão do Exemplo 3, com respeito ao erro na aproximação de $\int_0^1 dx/(x+1)$ pela regra de Simpson, pois $-0{,}00052 < -0{,}002 < -0{,}00002$.

Se $f(x)$ for um polinômio de grau três ou menos, então $f^{(iv)}(x) \equiv 0$ e, portanto, $\epsilon_S = 0$. Em outras palavras, a regra de Simpson dá um resultado exato para um polinômio do terceiro grau ou menor. Essa afirmativa é geometricamente óbvia se $f(x)$ for do segundo ou do primeiro grau, pois no primeiro caso o gráfico de $y = f(x)$ é uma parábola e no segundo, é uma reta.

Os métodos numéricos podem ser aplicados para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$, mesmo quando não conhecemos uma fórmula para $f(x)$, contanto que, é claro, tenhamos acesso a alguns valores de função. Tais valores são, muitas vezes, obtidos experimentalmente. O exemplo a seguir envolve essa situação.

EXEMPLO 5 Uma partícula movendo-se ao longo de uma reta horizontal tem uma velocidade de $v(t)$ m/s em t s. A Tabela 3 apresenta valores de $v(t)$ para intervalos de tempo de $\frac{1}{2}$ s, num período de 4 s. Use esses valores e a regra de Simpson para determinar a distância aproximada que a partícula percorre durante 4 s.

Tabela 3

t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$v(t)$	0	0,15	0,35	0,55	0,78	1,02	1,27	1,57	1,90

Solução O número de metros que a partícula viaja durante 4 s é $\int_0^4 v(t)dt$. Da regra de Simpson com $n = 8$, temos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \frac{b-a}{3n} = \frac{4-0}{24}$$

$$= \frac{4-0}{8} \qquad = \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^4 v(t)\,dt &\approx \tfrac{1}{6}[v(0)+4v(1)+2v(2)+4v(3)+2v(4)+4v(5)+2v(6)+4v(7)+v(8)]\\ &= \tfrac{1}{6}[0+4(0{,}15)+2(0{,}35)+4(0{,}55)+2(0{,}78)+4(1{,}02)+2(1{,}27)+4(1{,}57)+1{,}90]\\ &\approx \tfrac{1}{6}[19{,}86]\\ &= 3{,}31\end{aligned}$$

Assim, a partícula percorre aproximadamente 3,31 m durante 4 s.

EXERCÍCIOS 5.10

Nos Exercícios de 1 a 12, calcule o valor aproximado da integral definida dada pela regra do trapézio com o valor de n indicado. Expresse o resultado com três casas decimais. Nos Exercícios de 1 a 4, ache o valor exato da integral definida e compare-o com a aproximação.

1. $\int_0^2 x^3\,dx;\ n = 4$

2. $\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\,dx;\ n = 8$

3. $\int_0^{\pi} \cos x\,dx;\ n = 4$

4. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx;\ n = 6$

5. $\int_1^2 \frac{dx}{x};\ n = 5$

6. $\int_2^{10} \frac{dx}{1 + x};\ n = 8$

7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}};\ n = 5$

8. $\int_2^3 \sqrt{1 + x^2}\,dx;\ n = 6$

9. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx;\ n = 6$

10. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx;\ n = 4$

11. $\int_0^2 \sqrt{1 + x^4}\,dx;\ n = 6$

12. $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x}\,dx;\ n = 6$

Nos Exercícios de 13 a 18, ache um intervalo em que se situa o erro de truncamento na aproximação do exercício indicado.

13. Exercício 1
14. Exercício 4
15. Exercício 3
16. Exercício 6
17. Exercício 5
18. Exercício 8

19. Aproxime $\int_0^2 x^3\,dx$ com três casas decimais pela regra de Simpson, com $n = 4$. Compare o resultado com aquele obtido no Exercício 1, e observe que a regra de Simpson leva a resultados mais precisos do que a regra do trapézio com o mesmo número de subintervalos.

20. Aproxime $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ com três casas decimais pela regra de Simpson, com $n = 6$. Compare o resultado com aquele obtido no Exercício 4 e observe que a regra de Simpson leva a resultados mais precisos do que a regra do trapézio com o mesmo número de subintervalos.

Nos Exercícios de 21 a 24, aproxime a integral definida pela regra de Simpson com o valor indicado de n. Expresse o resultado com três casas decimais.

21. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{1 - x};\ n = 4$

22. $\int_{-1/2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};\ n = 4$

23. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1};\ n = 4$

24. $\int_1^2 \frac{dx}{x + 1};\ n = 8$

Nos Exercícios de 25 a 28, ache limitantes para o erro de truncamento na aproximação do exercício indicado.

25. Exercício 19
26. Exercício 20
27. Exercício 21
28. Exercício 24

Cada uma das integrais definidas nos Exercícios de 29 a 34 não pode ser calculada exatamente em termos das funções elementares. Use a regra de Simpson com o valor indicado de n, para encontrar um valor aproximado da integral definida dada. Expresse o resultado com três casas decimais.

29. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx;\ n = 6$

30. $\int_0^2 \sqrt{1 + x^4}\,dx;\ n = 6$

31. $\int_1^{1,8} \sqrt{1 + x^3}\,dx;\ n = 4$

32. $\int_0^1 \sqrt[3]{1 - x^2}\,dx;\ n = 4$

33. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}};\ n = 8$

34. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx;\ n = 6$

35. Mostre que o valor exato da integral $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$ é π, interpretando-a como a medida da área de uma região. Aproxime a área integral definida pela regra do trapézio com $n = 8$. Dê o resultado com três casas decimais e compare o valor assim obtido com o valor exato.

36. Mostre que o valor exato da integral $\int_0^1 4\sqrt{1 - x^2}\,dx$ é π interpretando-a como a medida da área de uma região. Use a regra de Simpson com $n = 6$ para obter uma aproximação do valor da integral definida com três casas decimais. Compare os resultados.

Nos Exercícios 37 e 38, os valores das funções f(x) foram obtidos experimentalmente. Com a hipótese de que f é contínua em [0, 4], *aproxime* $\int_0^4 f(x)\,dx$ *por (a) a regra do trapézio e (b) a regra de Simpson.*

37.

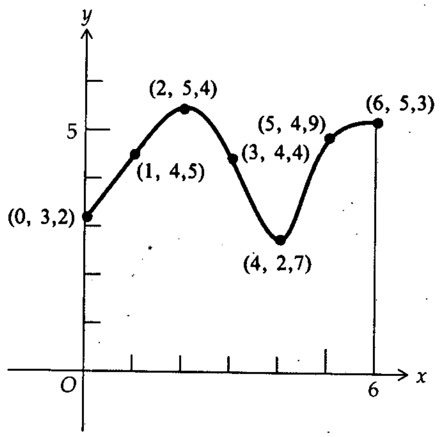
x	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
$f(x)$	3,25	4,17	4,60	3,84	3,59	4,23	4,01	3,96	3,75

38.

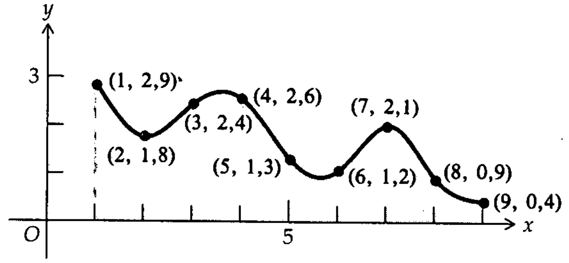
x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0
$f(x)$	8,4	8,1	7,9	7,5	7,6	7,2	6,8	6,3	6,5	6,0	5,7

Nos Exercícios 39 e 40, use a regra de Simpson para aproximar a área da região sombreada na figura.

39.



40.



41. Uma mulher levou 10 min para dirigir de sua casa ao supermercado. A cada intervalo de 1 min ela olhava o velocímetro, e suas leituras são dadas na tabela a seguir, onde $v(t)$ quilômetros por hora foi a leitura t min depois que ela saiu de casa. Use a regra de Simpson para aproximar a distância da casa da mulher até o supermercado.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v(t)$	0	30	33	41	38	32	42	45	41	37	22

42. A forma de um estacionamento é irregular e o comprimento do terreno de oeste a leste é 240 m. No extremo oeste do terreno a largura é de 150 m e no extremo leste é de 175 m. Em 40, 80, 120, 160 e 200 m do extremo oeste, as larguras são 154, 158, 165, 163 e 172 m, respectivamente. Use a regra de Simpson para aproximar a área do estacionamento.

43. Ache a área da região limitada pelo laço da curva cuja equação é $y^2 = 8x^2 - x^5$. Calcule a integral definida pela regra de Simpson com $n = 8$ e expresse o resultado com três casas decimais.

44. Aplique a regra de Simpson para a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, onde $f(x)$ é um polinômio de terceiro grau, para provar a **fórmula prismoidal:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Nos Exercícios de 45 a 48, calcule a integral definida por dois métodos: (a) use a fórmula prismoidal dada no Exercício 44; (b) use o segundo teorema fundamental do Cálculo.

45. $\int_1^3 (4x^3 - 3x^2 + 1)\,dx$

46. $\int_2^6 (2x^3 - 2x - 3)\,dx$

47. $\int_{-1}^5 (x^3 + 3x^2 - 2x - 6)\,dx$

48. $\int_{-2}^2 (x^3 + x^2 - 4x - 2)\,dx$

49. Suponha que f seja uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Sejam T e S os valores aproximados de $\int_a^b f(x)\,dx$ pelas regras do trapézio e de Simpson, respectivamente, usando para ambas a mesma partição do intervalo $[a, b]$. Mostre que

$$S = \tfrac{2}{3}[T + \Delta x(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \ldots + f(x_{n-1}))]$$

onde n é par.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 5

Nos Exercícios de 1 a 24, execute a antidiferenciação, isto é, calcule a integral indefinida.

1. $\int (2x^3 - x^2 + 3)\,dx$

2. $\int (5x^4 + 3x - 1)\,dx$

3. $\int (4y + 6\sqrt{y})\,dy$

4. $\int 3z^{-2}\,dz$

5. $\int \operatorname{sen} 3t\,dt$

6. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{w}}{\sqrt{w}}\,dw$

7. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$

8. $\int \sqrt{x}(1 + x^2)\,dx$

9. $\int \left(\frac{2}{x^4} - \frac{5}{x^2}\right)dx$

10. $\int \left(\sqrt[3]{t} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)dt$

11. $\int 5x(2 + 3x^2)^8\,dx$

12. $\int x^4\sqrt{x^5 - 1}\,dx$

13. $\int \left(\sqrt{3x} + \frac{1}{\sqrt{5x}}\right)dx$

14. $\int \sqrt[3]{7w + 3}\,dw$

15. $\int \frac{x^3 + x}{(x^4 + 2x^2)^7}\,dx$

16. $\int (x^3 + x)\sqrt{x^2 + 3}\,dx$

17. $\int \frac{s}{\sqrt{2s + 3}}\,ds$

18. $\int t \sec^2 t^2\,dt$

19. $\int \operatorname{tg}^2 3\theta\,d\theta$

20. $\int (3\operatorname{cotg}^2 2x - 2\operatorname{cosec}^2 3x)\,dx$

21. $\int \frac{5\cos^2 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos x}\,dx$

22. $\int \operatorname{sen}^3 2\theta \operatorname{cotg} 2\theta\,d\theta$

23. $\int \sqrt{4x + 3}\,(x^2 + 1)\,dx$

24. $\int \left(\frac{x^3 + 2}{x^3}\right)\sqrt{x - \frac{1}{x^2}}\,dx$

Nos Exercícios de 25 a 28, ache o valor exato da integral definida usando a definição; não use o teorema fundamental do Cálculo.

25. $\int_0^2 (3x^2 - 1)\,dx$

26. $\int_0^1 (2x^2 + 4x + 1)\,dx$

27. $\int_{-2}^1 (x^3 + 2x)\,dx$

28. $\int_{-1}^3 (x^2 - 1)^2\,dx$

Nos Exercícios de 29 a 38, calcule a integral definida, usando o segundo teorema fundamental do Cálculo.

29. $\int_{-2}^2 (t^3 - 3t)\,dt$

30. $\int_1^5 \frac{dy}{\sqrt{2y - 1}}$

31. $\int_2^3 \frac{12x\,dx}{(x^2 - 1)^2}$

32. $\int_{-5}^5 2x\sqrt[3]{x^2 + 2}\,dx$

33. $\int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen} 2\theta\,d\theta}{\cos^2 2\theta}$

34. $\int_{\pi/3}^{\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t \cos \frac{1}{2}t\,dt$

35. $\int_{-1}^7 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x + 2}}$

36. $\int_1^2 \frac{y\,dy}{\sqrt{5 - y}}$

37. $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x + \sec^2 \frac{1}{2}x)\,dx$

38. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \cos\theta)\operatorname{cosec}^2\theta\,d\theta$

Nos Exercícios de 39 a 42, ache a solução completa da equação diferencial dada.

39. $x^2 y \frac{dy}{dx} = (y^2 - 1)^2$

40. $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 30x$

41. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{2x - 1}$

42. $\frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{1 - y^2}}{y\sqrt{2x^2 + 1}}$

43. Calcule $\int (x^3 + 1)^2 x^2\,dx$ por dois métodos: (a) tome $u = x^3 + 1$; (b) calcule primeiro $(x^3 + 1)^2$. Compare os resultados e explique a diferença na aparência das respostas obtidas em (a) e (b).

44. Calcule $\int (x^4)^6 4x^3\,dx$ como $\int u^6\,du$ e como $\int 4x^{27}\,dx$, e compare os resultados.

45. A inclinação da reta tangente num ponto (x, y) de uma curva é $10 - 4x$ e o ponto $(1, -1)$ está na curva. Ache uma equação da curva.

46. A função custo marginal para determinada mercadoria é dada por $C'(x) = 6x - 17$. Se o custo de produção de 2 unidades for \$25, ache a função custo total.

47. A função rendimento marginal para certo artigo é dada por $R'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 10x + 12$. Ache (a) a função rendimento total e (b) uma equação envolvendo p e x (a equação de demanda) onde x unidades são demandadas quando p for o preço por unidade.

48. A matrícula em certa universidade vem crescendo a uma taxa de $1.000\,(t + 1)^{-1/2}$ estudantes por ano desde 1985. Se a matrícula em 1988 foi de 10.000, (a) qual foi a matrícula em 1985 e (b) qual será a matrícula em 1993 se é esperado que ela cresça à mesma taxa?

49. O volume de um balão está crescendo de acordo com a fórmula $\frac{dV}{dt} = \sqrt{t + 1} + \frac{2}{3}t$, onde V cm³ é o volume do balão em t s. Se $V = 33$ quando $t = 3$, ache (a) a fórmula para V em termos de t; (b) o volume do balão em 8 s.

50. Suponha que determinada empresa estime o crescimento de sua receita devido às vendas pela fórmula $\frac{dS}{dt} = 2(t - 1)^{2/3}$, onde S milhões é a receita bruta das vendas daqui a t anos. Se a receita bruta das vendas do ano corrente for de 8 milhões, qual deverá ser a receita bruta esperada daqui a 2 anos?

51. É 31 de julho e um tumor vem crescendo dentro do corpo de uma pessoa de tal forma que t dias desde 1º de julho o volume do tumor estará aumentando a uma taxa de $\frac{1}{100}(t + 6)^{1/2}$ cm³ por dia. Se o volume do tumor em 4 de julho era de 0,20 cm³, qual será o volume hoje?

52. Depois de pesquisar, certo fabricante determinou que se x unidades de um dado artigo forem produzidas por dia, o custo marginal será dado por $C'(x) = 0{,}3x - 11$ onde $C(x)$ é o custo total da produção de x unidades. Se o preço de venda do artigo for fixado em \$19 por unidade e o custo geral for \$100 por dia, ache o lucro máximo diário que poderá ser obtido.

53. Um fabricante de brinquedos tem um novo brinquedo para lançar no mercado e deseja determinar o preço de venda para o brinquedo, tal que o lucro total seja máximo. Pela análise do preço e da demanda de outro brinquedo similar, ele previu que se x brinquedos forem demandados quando p for preço unitário, então $\frac{dp}{dx} = -\frac{p^2}{30.000}$, e a demanda deverá ser 1.800 quando o preço for \$10. Se $C(x)$ for o custo total da produção de x brinquedos, então $C(x) = x + 7.500$. Ache o preço que deverá ser fixado para que o lucro do fabricante seja máximo.

Nos Exercícios 54 e 55 uma partícula move-se em linha reta, s cm é a distância orientada da partícula à origem em t s, v cm/s é a velocidade da partícula em t s e a cm/s² é a sua aceleração em t s.

54. $a = 3t + 4$; $v = 5$ e $s = 0$, quando $t = 0$. Expresse v e s em termos de t.

55. $a = 6\cos 2t$; $v = 3$ e $s = 4$, quando $t = \frac{\pi}{2}$. Expresse v e s em termos de t.

56. Desprezando a resistência do ar, se um objeto cai de um avião a uma altura de 9.000 m acima do nível do mar, quanto tempo levará para o objeto atingir a água?

57. Suponha que uma bala seja disparada verticalmente para baixo pelo avião mencionado no Exercício 56, com uma velocidade na boca da arma de 750 m/s. Desprezando a resistência do ar, quanto tempo levará para a bala atingir a água?

58. Uma bola é atirada verticalmente para cima do telhado de uma casa, 19 m acima do solo, com uma velocidade inicial de 14 m/s. (a) Quanto tempo levará para a bola atingir a altura máxima, e (b) qual será a altura máxima? (c) Quanto tempo levará para a bola atingir o solo e (d) com que velocidade ela o atingirá?

59. Suponha que a bola do Exercício 58 seja atirada para baixo com uma velocidade inicial de 14 m/s. (a) Quanto tempo irá decorrer até a bola atingir o solo e (b) com que velocidade ela o atingirá?

60. Suponha que a bola do Exercício 58 caia de cima da casa. (a) Quanto tempo irá decorrer até ela atingir o solo e (b) com que velocidade ela o atingirá?

Nos Exercícios 61 e 62, ache as somas.

61. $\sum_{i=1}^{100} 2i(i^3 - 1)$ **62.** $\sum_{i=1}^{41} (\sqrt[3]{3i - 1} - \sqrt[3]{3i + 2})$

63. Prove que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$, e verifique a fórmula para $n = 1, 2$ e 3.

64. Expresse como uma integral definida e calcule:

$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} (8\sqrt{i}/n^{3/2})$ (*Sugestão:* considere a função f tal que $f(x) = \sqrt{x}$).

65. Mostre que cada uma das desigualdades é válida:

(a) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x - 3} \geqslant \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$; (b) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x} \geqslant \int_{1}^{2} \frac{dx}{x - 3}$;

(c) $\int_{4}^{5} \frac{dx}{x - 3} \geqslant \int_{4}^{5} \frac{dx}{x}$.

66. Se

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leqslant x < c \\ k & \text{se } x = c \\ 1 & \text{se } c < x \leqslant b \end{cases}$$

prove que f é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)\, dx = b - c$, não importando o valor de k.

Nos Exercícios 67 e 68, aplique o Teorema 5.6.9 para achar um intervalo fechado contendo o valor da integral definida dada.

67. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos t}\, dt$ **68.** $\int_{-2}^{1} \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 + 1}\, dx$

Nos Exercícios 69 e 70, calcule a integral definida.

69. $\int_{-3}^{3} |x - 2|^3\, dx$ **70.** $\int_{-2}^{2} x|x - 3|\, dx$

Nos Exercícios de 71 a 74, calcule a derivada.

71. $\frac{d}{dx} \int_x^4 (3t^2 - 4)^{3/2}\, dt$ **72.** $\frac{d}{dx} \int_{-x}^{x} \frac{4}{1 + t^2}\, dt$

73. $\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \frac{1}{t}\, dt \qquad x > 0$

74. $\frac{d}{dx} \int_1^{\sec x} \sqrt{t^2 - 1}\, dt \qquad 0 < x < \frac{1}{2}\pi$

75. Ache o valor médio da função co-seno no intervalo fechado $[a, a + 2\pi]$.

76. Interprete o teorema do valor médio para integrais (5.7.1), em termos do valor de uma função média.

77. Se $f(x) = x^2\sqrt{x - 3}$, ache o valor médio de f em [7, 12].

78. (a) Ache o valor médio da função f definida por $f(x) = 1/x^2$ no intervalo $[1, r]$. (b) Se A for o valor médio encontrado na parte (a), ache $\lim_{r \to +\infty} A$.

79. Um corpo cai do repouso e percorre uma distância de s m antes de atingir o solo. Se a única força agindo sobre ele é a da gravidade, o que lhe dá uma aceleração de g m/s^2 em direção ao solo, mostre que o valor médio da velocidade expresso como uma função da distância, enquanto ele percorre essa distância, é $\frac{2}{3}\sqrt{2gs}$ m/s e que essa velocidade média é dois terços da velocidade final.

80. Suponha que uma bola caia do repouso e que t s depois, sua distância orientada do ponto de partida seja s m e sua velocidade seja v m/s. Desprezando a resistência do ar, quando $t = t_1$, $s = s_1$ e $v = v_1$, (a) expresse v como uma função de t quando $v = f(t)$ e ache o valor médio de f em $[0, t_1]$. (b) Expresse v como uma função de s quando $v = h(s)$ e ache o valor médio de h em $[0, s_1]$. (c) Escreva os resultados das partes (a) e (b) em termos de t_1 e determine qual velocidade média é maior.

Nos Exercícios de 81 a 88, ache a área da região limitada pelas curvas e retas dadas. Faça uma figura mostrando a região e um elemento retangular da área. Expresse a medida da área como o limite de uma soma de Riemann e depois com a notação de integral definida. Calcule a integral definida pelo segundo teorema fundamental do Cálculo.

81. $y = 9 - x^2$; eixo x; eixo y; $x = 3$

82. $y = 3 \cos \frac{1}{2}x$; eixo x; $x = -\frac{1}{2}\pi$; $x = \frac{1}{2}\pi$

83. $y = 2\sqrt{x - 1}$; *eixo* x; $x = 5$; $x = 17$

84. $y = 16 - x^2$; eixo x

85. $y = x\sqrt{x + 5}$; eixo x, $x = -1$; $x = 4$

86. $y = \frac{4}{x^2} - x$; eixo x; $x = -2$; $x = -1$

87. $x^2 + y - 5 = 0$; $y = -4$.

88. $y = x^2 - 7x$; eixo x; $x = 2$; $x = 4$

89. Ache a área da região limitada pelas curvas $x = y^2$ e $x = y^3$.

90. Ache a área da região limitada pelas curvas $y = \text{sen } 2x$ e $y = \text{sen } x$ de $x = 0$ até $x = \frac{\pi}{3}$.

91. Ache a área da região limitada pelas curvas $y = \cos x$ e $y = \text{sen } x$ de $x = \frac{1}{4}\pi$ até $x = \frac{5}{4}\pi$.

92. Ache a área da região limitada pelo laço da curva $y^2 = x^2(4 - x)$.

93. Ache a área da região no primeiro quadrante limitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \sec^2 x$ e $y = 2 \text{ tg}^2 x$.

94. Um automóvel rodando a uma velocidade constante de 80 km/h por uma estrada reta não obedece a um sinal de parada. Se 3 s mais tarde o carro da polícia rodoviária estacionado no sinal de parada parte com uma aceleração constante de 3 m/s^2, quanto tempo irá levar para alcançar o automóvel e a que distância isto irá ocorrer? Determine também a velocidade do carro da polícia quando ele ultrapassar o automóvel.

95. Suponha que num dado dia, numa certa cidade, a temperatura fahrenheit seja $f(t)$ graus, t horas depois da meia-noite e

$$f(t) = 60 - 15 \text{ sen } \tfrac{1}{12}\pi(8 - t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 24$$

(a) Faça um esboço do gráfico de f. Ache a temperatura à (b) meia-noite; (c) 8 da manhã; (d) meio-dia; (e) 2 da tarde e (f) 6 da tarde. (g) Ache a temperatura média entre 8 da manhã e 6 da tarde. (Para reduzir graus fahrenheit a centígrados subtraia 32 e multiplique por 5/9. (N.T).)

96. Se n for um inteiro positivo, prove que $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx \, dx = \frac{1}{2}\pi$.

Nos Exercícios 97 e 98, ache um valor aproximado para a integral, usando a regra do trapézio com n = 4. Expresse o resultado até três casas decimais.

97. $\int_0^2 \sqrt{1 + x^2} \, dx$ **98.** $\int_1^{9/5} \sqrt{1 + x^3} \, dx$

Nos Exercícios 99 e 100, ache um valor aproximado para a integral do exercício indicado, usando a regra de Simpson com n = 4. Expresse o resultado até três casas decimais.

99. Exercício 97 **100.** Exercício 98

101. Ache um valor aproximado da seguinte integral, até três casas decimais, por dois métodos: (a) use a regra do trapézio com $n = 4$; (b) use a regra de Simpson com $n = 4$:

$$\int_{1/10}^{1/2} \frac{\cos x}{x} \, dx$$

102. Os fatores funcionais de $f(x)$ na tabela a seguir foram obtidos experimentalmente com a hipótese de que f é contínua em $[1, 3]$, aproxime $\int_1^3 f(x) \, dx$ pela (a) regra do trapézio e (b) regra de Simpson.

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$f(x)$	5,2	5,7	5,8	6,3	6,1	6,4	6,0	6,5	6,8	6,7	6,4

103. Calcule $\int_0^{\pi} \left|\cos x + \frac{1}{2}\right| dx$.

104. Formule um exemplo de uma função descontínua para a qual o teorema do valor médio para integrais (a) não se aplica e (b) se aplica.

Nos Exercícios 105 e 106, use o segundo teorema fundamental do Cálculo para calcular a integral definida. Então, encontre o valor de χ que satisfaça o teorema do valor médio para integrais.

105. $\int_0^3 (x^2 + 1) \, dx$ **106.** $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx$

107. Seja f contínua em $[a, b]$ e $\int_a^b f(t) \, dt \neq 0$. Mostre que para qualquer k em $(0, 1)$ haverá um número c em (a, b) tal que $\int_a^c f(t) \, dx = k \int_a^b f(t) \, dt$. (*Sugestão:* considere a função F para a qual $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt \Big/ \int_a^b f(t) \, dt$, e aplique o teorema do valor intermediário.)

108. Dada $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} \, dt$ e $x > 0$. Prove que F é uma função constante, mostrando que $F'(x) = 0$. (*Sugestão:* use o primeiro teorema fundamental do Cálculo (5.9.1) após escrever a integral dada como a diferença de duas integrais.)

109. Se $f(x) = x + |x - 1|$ e

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

mostre que F é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$.

110. Seja f e g duas funções tais que para todo x em $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$. Depois, suponha que $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$. Prove que

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$$

(*Sugestão:* considere as funções F e G onde $F(x) = [f(x)]^2$ e $G(x) = -[g(x)]^2$, e mostre que $F'(x) = G'(x)$ para todo x.)

111. Dada a integral $\int_d^{d+6} (x^2 + bx + c) \, dx$, onde b, c e d são constantes. Suponha que essa integral seja aproximada pela regra do trapézio com $n = k$. (a) Mostre que o erro na aproximação é exatamente $-36/k^2$. (b) Qual é o menor valor de k tal que a aproximação seja exata até uma casa decimal?

SEIS

Aplicações da Integral Definida

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$W = 9810\pi \int_{0,5}^{1,5} [f(x)]^2 x\, dx$$

As possibilidades de aplicação do Cálculo Integral em Geometria, Física e Engenharia são demonstradas neste Capítulo.

Nas Secções 6.1 e 6.2 aplicamos a integral definida para calcular os volumes de vários tipos de sólidos. Usamos *cortes*, *discos* e *anéis circulares* na Secção 6.1 e *invólucros cilíndricos* na Secção 6.2. Mostramos na Secção 6.3 como a integral definida pode ser usada para calcular o *comprimento de arco* do gráfico de uma função entre dois pontos.

As aplicações físicas de integração aparecem nas outras quatro secções. Determinamos *centros de massa de barras* na Secção 6.4 e *centros de massa de regiões planas* na Secção 6.5. O *trabalho* realizado por uma força variável atuando sobre um objeto é calculado na Secção 6.6. A Secção Suplementar 6.7 trata da aplicação de integrais definidas para determinar a força causada pela *pressão líquida*, tal como a pressão da água contra o lado de um recipiente.

6.1 VOLUMES DE SÓLIDOS POR CORTES, DISCOS E ANÉIS CIRCULARES

A definição de área de uma região plana nos levou à definição da integral definida. No desenvolvimento, usamos a fórmula para a área de um retângulo, da Geometria Plana. Usamos um processo similar para obter volumes de determinados tipos de sólidos. Um deles é um *cilindro reto*. Note que neste capítulo um cilindro é considerado sólido, enquanto que mais adiante, no Capítulo 15, definimos um cilindro como uma superfície.

Um sólido será um **cilindro reto** se for limitado por duas regiões planas congruentes R_1 e R_2, situadas em planos paralelos e por uma superfície lateral gerada por um segmento de reta, tendo seus extremos sobre os limites de R_1 e R_2, que se move de modo que seja sempre perpendicular aos planos de R_1 e R_2. A Figura 1 mostra um cilindro reto. A altura do cilindro é a distância perpendicular entre os planos de R_1 e R_2 e a base é R_1 ou R_2. Se a base do cilindro reto for uma região encerrada por um retângulo, teremos um **paralelepípedo retangular**, que aparece na Figura 2, e se a base for uma região encerrada por um círculo, temos um **cilindro circular reto**, como mostra a Figura 3.

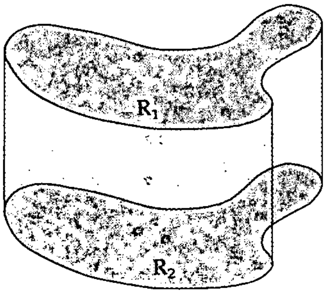


FIGURA 1

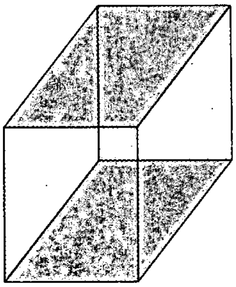


FIGURA 2

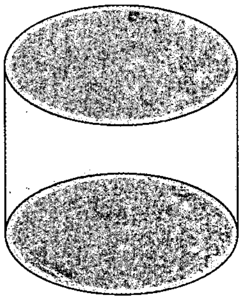


FIGURA 3

Se a área da base de um cilindro reto for A unidades quadradas e a altura for h unidades, então, da geometria dos sólidos, se V unidades cúbicas for o volume

$$V = Ah$$

Usaremos essa fórmula para obter um método de calcular a medida do volume de um sólido para o qual a área de qualquer secção plana (uma região plana formada pela intersecção de um plano com o sólido) que é perpendicular a um eixo, seja uma função da distância perpendicular da secção plana de um ponto fixo sobre o eixo. A Figura 4 mostra tal sólido S que se situa entre planos perpendiculares ao eixo x em a e b. Seja $A(x)$ unidades quadradas a área da secção plana de S que é perpendicular ao eixo x em x. Exigimos que A seja contínua em $[a, b]$.

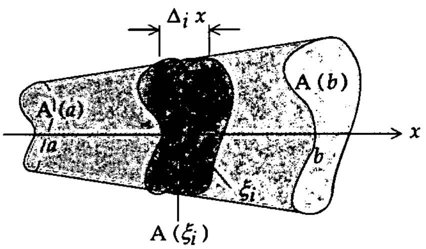


FIGURA 4

Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$, dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Existem, então, n subintervalos da forma $[x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1, 2, \ldots, n$, sendo $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do i-ésimo subintervalo. Escolhemos qualquer número ξ_i com $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, em cada subintervalo, e construímos os cilindros retos com $\Delta_i x$ unidades de altura e a área das secções planas igual a $A(\xi_i)$ unidades quadradas. A Figura 5 mostra o i-ésimo cilindro reto, que cha-

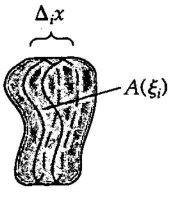


FIGURA 5

maremos de elemento de volume. Se $\Delta_i V$ unidades cúbicas for o volume do i-ésimo elemento, então

$$\Delta_i V = A(\xi_i)\,\Delta_i x$$

A soma das medidas dos volumes de n elementos é

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,\Delta_i x \tag{1}$$

que é a soma de Riemann. Essa soma é uma aproximação do que intuitivamente pensamos ser o número de unidades cúbicas no volume do sólido. Quanto menor tomarmos a norma $\|\Delta\|$ da partição, maior será n e mais perto estaremos da aproximação do número V que queremos designar para a medida do volume. Portanto, definimos V como o limite da soma de Riemann em (1) quando $\|\Delta\|$ aproxima-se de zero. Esse limite existe, pois A é contínua em $[a, b]$. Temos, então, a definição a seguir.

6.1.1 DEFINIÇÃO

Seja S um sólido tal que S esteja entre planos perpendiculares ao eixo x em a e b. Se a medida da área da secção plana de S no plano perpendicular ao eixo x em x for dada por $A(x)$, onde A é contínua em $[a, b]$, então a medida do volume de S será dada por

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,\Delta_i x \\ &= \int_a^b A(x)\,dx \end{aligned}$$

A terminologia **corte** é usada quando aplicamos a Definição 6.1.1 para encontrar o volume de um sólido. O processo é similar a cortar um pão em fatias bem finas, de modo que todas elas juntas componham um pão inteiro. Na ilustração a seguir mostramos que a Definição 6.1.1 é consistente com a fórmula da geometria dos sólidos para o volume de um cilindro circular reto.

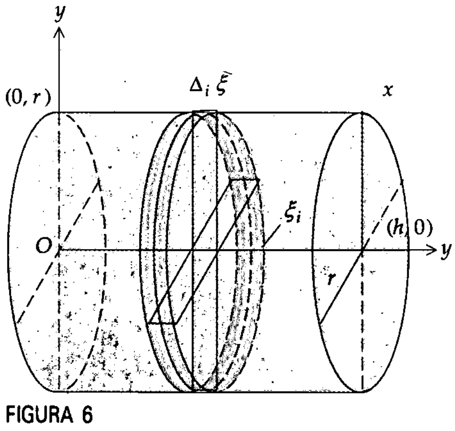


FIGURA 6

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Na Figura 6 há um cilindro circular reto que tem h unidades de altura e r unidades de raio da base, sendo os eixos coordenados escolhidos de modo que a origem esteja no centro de uma base e a altura seja medida ao longo do eixo positivo x. Uma secção plana a uma distância de x unidades a partir da origem tem uma área de $A(x)$ unidades quadradas, onde

$$A(x) = \pi r^2$$

Um elemento de volume, mostrado na Figura 6, é um cilindro reto cuja área da base é $A(\xi_i)$ unidades quadradas e uma espessura de $\Delta_i x$ unidades. Assim, se V unidades cúbicas for o volume do cilindro circular reto.

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,\Delta_i x \\ &= \int_0^h A(x)\,dx \\ &= \int_0^h \pi r^2\,dx \\ &= \pi r^2 x \Big]_0^h \\ &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

◀

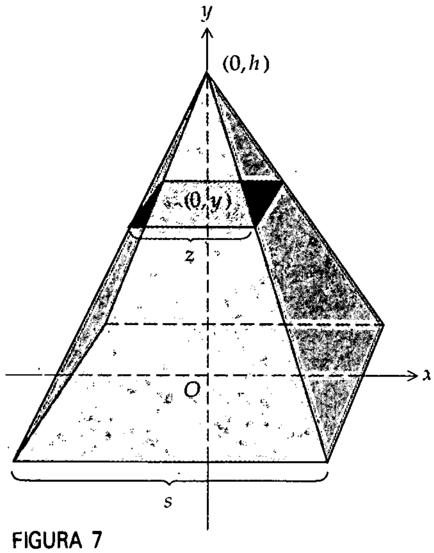


FIGURA 7

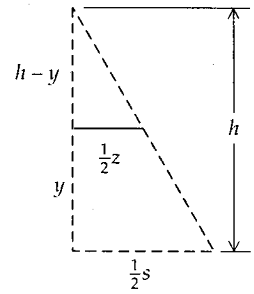


FIGURA 8

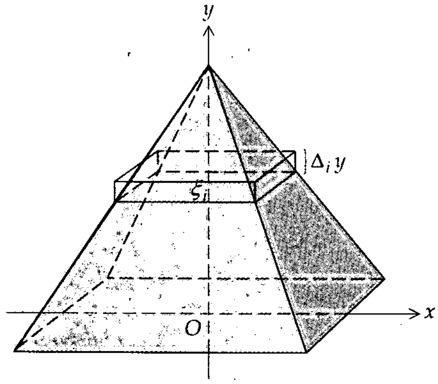


FIGURA 9

Na Definição 6.1.1 substituímos x por y. Em tal situação, S é um sólido situado entre planos desenhados perpendicularmente ao eixo y em c e d, e a medida da área da secção plana de S, traçada perpendicularmente ao eixo y em y é dada por $A(y)$, onde A é contínua em $[c, d]$. Então, a medida do volume de S é dada por

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i y \\ &= \int_c^d A(y)\, dy \end{aligned}$$

EXEMPLO 1 Use um corte para achar o volume de uma pirâmide reta cuja altura é h unidades e cuja base é um quadrado com s unidades de lado.

Solução A Figura 7 mostra uma pirâmide reta e os eixos coordenados escolhidos, de modo que o centro da base esteja na origem e a altura seja medida ao longo do lado positivo do eixo y. A secção plana da pirâmide traçada perpendicularmente ao eixo y em $(0, y)$ é um quadrado. Se o comprimento de um lado desse quadrado for z unidades, então, pelos triângulos similares (veja a Figura 8)

$$\frac{\frac{1}{2}z}{h - y} = \frac{\frac{1}{2}s}{h}$$

$$z = \frac{s}{h}(h - y)$$

Portanto, se $A(y)$ unidades quadradas for a área da secção plana

$$A(y) = \frac{s^2}{h^2}(h - y)^2$$

A Figura 9 mostra um elemento de volume que é um cilindro reto de área $A(\xi_i)$ unidades quadradas e uma espessura de $\Delta_i y$ unidades. Assim, se V unidades cúbicas for o volume da pirâmide reta

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i y \\ &= \int_0^h A(y)\, dy \\ &= \int_0^h \frac{s^2}{h^2}(h - y)^2\, dy \\ &= \frac{s^2}{h^2}\left[-\frac{(h - y)^3}{3}\right]_0^h \\ &= \frac{s^2}{h^2}\left[0 + \frac{h^3}{3}\right] \\ &= \tfrac{1}{3}s^2 h \end{aligned}$$

Agora mostramos como a Definição 6.1.1 pode ser aplicada para encontrarmos o volume de um **sólido de revolução** que é um sólido obtido com a rotação de uma região num plano em torno de uma reta no plano, chamada de **eixo de revolução,** o qual pode ou não interceptar a região. Por exemplo, se a região

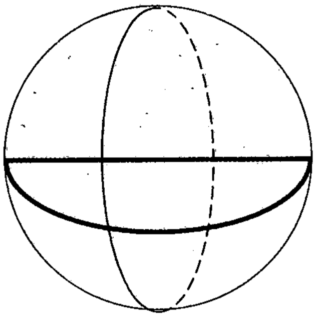


FIGURA 10

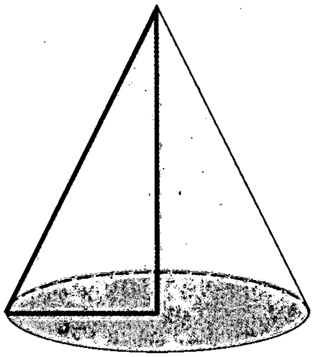


FIGURA 11

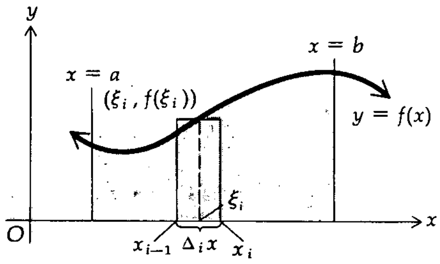


FIGURA 12

limitada por um semi-círculo e seu diâmetro for girada em torno do diâmetro, uma esfera será descrita (veja a Figura 10). Um cone circular reto é gerado se a região limitada por um triângulo retângulo for girada em torno de um de seus catetos (veja a Figura 11).

Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que o eixo de revolução é uma fronteira da região que gira. Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A Figura 12 mostra a região R e o i-ésimo retângulo. Quando o i-ésimo retângulo é girado em torno do eixo x, obtemos um elemento de volume que é um disco cuja base é um círculo de raio $f(\xi_1)$ unidades e cuja altura é $\Delta_i x$ unidades, como é mostrado na Figura 13. Se $\Delta_i V$ unidades cúbicas for o volume desse disco,

$$\Delta_i V = \pi[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i x$$

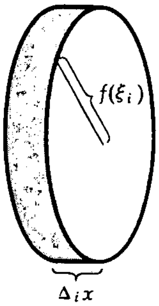


FIGURA 13

Como temos n retângulos, iremos obter n discos circulares dessa forma, e a soma das medidas dos volumes desses n discos circulares será

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i x$$

Essa é uma soma de Riemann da forma (1) onde $A(\xi_i) = \pi[f(\xi_i)]^2$. Portanto, se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução, segue da Definição 6.1.1 que V será o limite dessa soma de Riemann quando $\|\Delta\|$ aproximar-se de zero. Esse limite existe, pois f^2 é contínua em $[a, b]$, já que supusemos que f seja contínua nesse número. Temos então o teorema a seguir.

6.1.2 TEOREMA Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Se S for o sólido de revolução obtido pela rotação efetuada, em torno do eixo x, da região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, e se V for o número de unidades cúbicas no volume de S, então

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i x \\ &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \end{aligned}$$

► **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos encontrar o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$

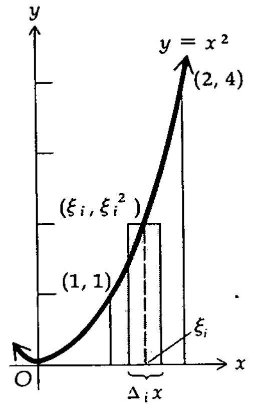


FIGURA 14

e $x = 2$ for rotacionada em torno do eixo x. Consulte a Figura 14, que mostra a região e um elemento retangular de área. A Figura 15 mostra um elemento de volume e o sólido de revolução. A medida do volume do disco circular é dada por

$$\begin{aligned}\Delta_i V &= \pi(\xi_i{}^2)^2\, \Delta_i x\\ &= \pi\xi_i{}^4\, \Delta_i x\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\xi_i{}^4\, \Delta_i x\\ &= \pi \int_1^2 x^4\, dx\\ &= \pi(\tfrac{1}{5}x^5)\Big]_1^2\\ &= \tfrac{31}{5}\pi\end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido de revolução é $\frac{31}{5}\pi$ unidades cúbicas. ◀

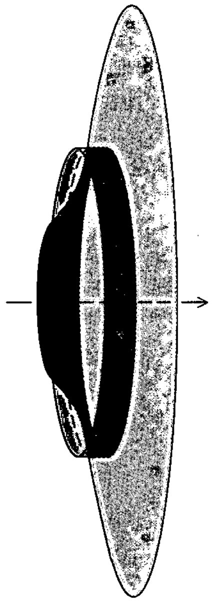


FIGURA 15

Um teorema analógo ao Teorema 6.1.2 aplica-se quando tanto o eixo de revolução quanto o limite de uma região rotacionada forem o eixo y ou qualquer reta paralela ao eixo x ou ao eixo y.

EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $x = 1$, da região limitada pela curva

$$(x - 1)^2 = 20 - 4y$$

e pelas retas $x = 1$, $y = 1$ e $y = 3$ e à direita de $x = 1$.

Solução A região, bem como um elemento retangular de área, estão na Figura 16. Um elemento de volume e o sólido de revolução aparecem na Figura 17.

Vamos resolver em x a equação da curva, obtendo

$$x = \sqrt{20 - 4y} + 1$$

Seja $g(y) = \sqrt{20 - 4y} + 1$. Tomamos uma partição do intervalo [1, 3] no eixo y.

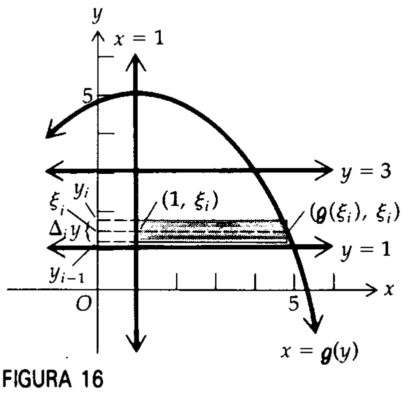


FIGURA 16

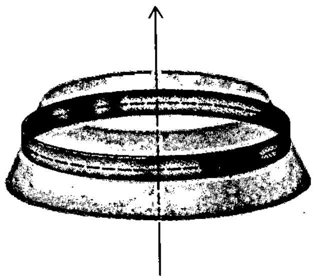


FIGURA 17

Então, se $\Delta_i V$ unidades cúbicas for o volume do i-ésimo disco circular,

$$\begin{aligned}\Delta_i V &= \pi[g(\xi_i) - 1]^2\,\Delta_i y\\ &= \pi[(\sqrt{20 - 4\xi_1} + 1) - 1]^2\,\Delta_i y\\ &= \pi(20 - 4\xi_i)\,\Delta_i y\end{aligned}$$

Se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução,

$$\begin{aligned}V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi(20 - 4\xi_i)\,\Delta_i y\\ &= \pi\int_1^3 (20 - 4y)\,dy\\ &= \pi\Big[20y - 2y^2\Big]_1^3\\ &= \pi[(60 - 18) - (20 - 2)]\\ &= 24\pi\end{aligned}$$

O volume do sólido de revolução é, portanto, 24π unidades cúbicas.

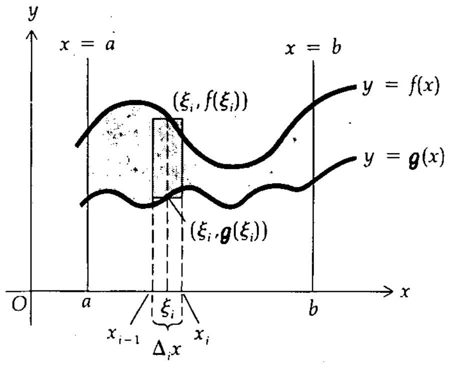


FIGURA 18

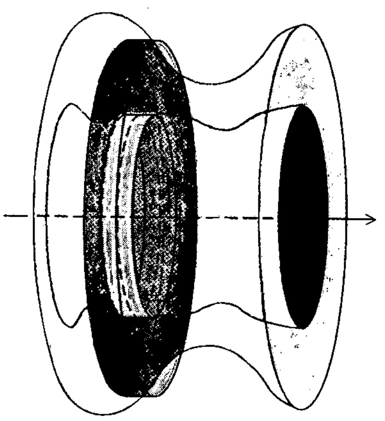


FIGURA 19

Suponha, agora, que o eixo de revolução não esteja na fronteira da região a ser rotacionada. Sejam f e g duas funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A região R e o i-ésimo retângulo são mostrados na Figura 18, e o sólido de revolução aparece na Figura 19. Quando o i-ésimo retângulo gira em torno do eixo x, um anel circular (ou arruela) é obtido, conforme mostra a Figura 20. O número que dá a diferença das medidas das áreas das duas regiões circulares é $\pi[f(\xi_i)]^2 - \pi[g(\xi_i)]^2$ e a espessura é $\Delta_i x$ unidades. Logo, a medida do volume do anel circular é dada por:

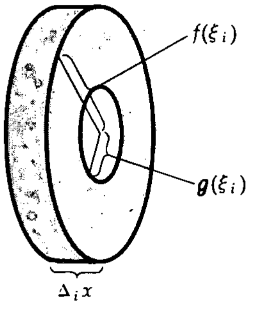


FIGURA 20

$$\Delta_i V = \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i x$$

A soma das medidas dos volumes dos n anéis circulares formados pela rotação dos n elementos retangulares de área em torno do eixo x é

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i V = \sum_{i=1}^{n}\pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i x$$

Essa é a soma de Riemann da forma (1) onde $A(\xi_i) = \pi[f(\xi_i)]^2 - \pi[g(\xi_i)]^2$. Da Definição 6.1.1, o número de unidades cúbicas no volume do sólido de revolução é definido como sendo o limite dessa soma de Riemann, quando $\|\Delta\|$ tende a zero. O limite existe desde que $f^2 - g^2$ seja contínua em $[a, b]$, pois f e g são contínuas nesse intervalo. Temos, então, o teorema a seguir.

6.1.3 TEOREMA Sejam f e g funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Então, se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução gerado com a rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$,

$$\begin{aligned}V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i x\\ &= \pi\int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2\,dx\end{aligned}$$

Como antes, uma definição similar aplica-se quando o eixo de revolução for o eixo y ou qualquer reta paralela aos eixos x ou y.

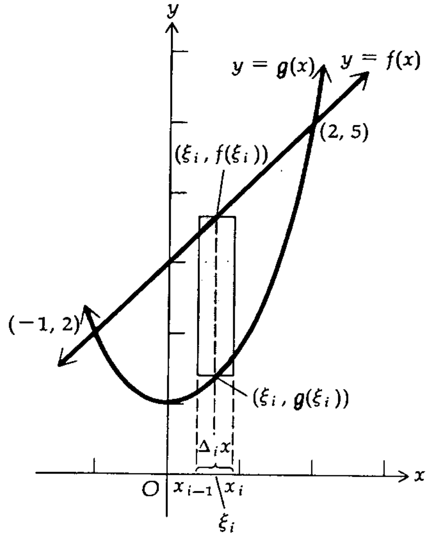


FIGURA 21

EXEMPLO 3 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y = x^2 + 1$ e pela reta $y = x + 3$.

Solução Os pontos de intersecção são $(-1, 2)$ e $(2, 5)$. A Figura 21 mostra a região e um elemento de área retangular. Um elemento de volume e o sólido de revolução estão na Figura 22.

Se $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x^2 + 1$, a medida do volume do anel circular é

$$\Delta_i V = \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i x$$

Se V unidades cúbicas for o volume do sólido, então

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i x \\
&= \pi \int_{-1}^{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} [(x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2]\,dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} [-x^4 - x^2 + 6x + 8]\,dx \\
&= \pi\Big[-\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x\Big]_{-1}^{2} \\
&= [(-\tfrac{32}{5} - \tfrac{8}{3} + 12 + 16) - (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3} + 3 - 8)] \\
&= \tfrac{117}{5}\pi
\end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido de revolução é $\frac{117}{5}\pi$ unidades cúbicas.

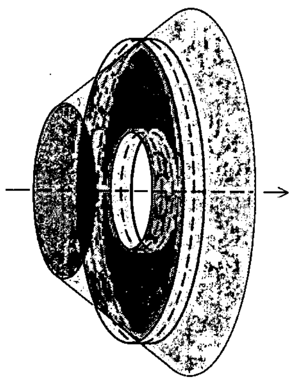


FIGURA 22

EXEMPLO 4 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada pelas parábolas $x = y - y^2$ e $x = y^2 - 3$.

Solução As curvas interceptam-se nos pontos $(-2, -1)$ e $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$. A região, bem como um elemento de área retangular, estão na Figura 23. A Figura 24 mostra o sólido de revolução, e também um elemento de volume, que é um anel circular.

Seja $F(y) = y - y^2$ e $G(y) = y^2 - 3$. O número de unidades cúbicas no volume do anel circular é

$$\Delta_i V = \pi([4 + F(\xi_i)]^2 - [4 + G(\xi_i)]^2)\,\Delta_i y$$

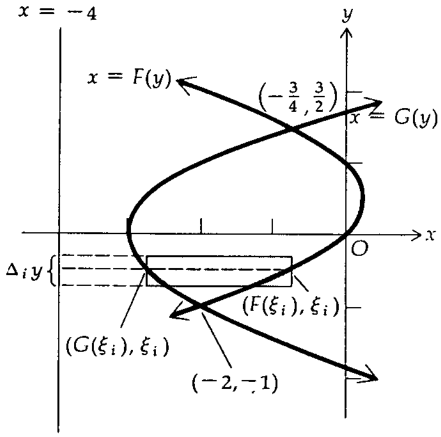


FIGURA 23

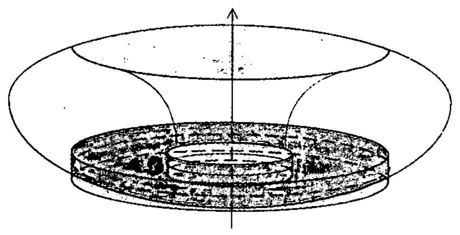


FIGURA 24

Assim,

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([4 + F(\xi_i)]^2 - [4 + G(\xi_i)]^2)\, \Delta_i y \\
&= \pi \int_{-1}^{3/2} [(4 + y - y^2)^2 - (4 + y^2 - 3)^2]\, dy \\
&= \pi \int_{-1}^{3/2} (-2y^3 - 9y^2 + 8y + 15)\, dy \\
&= \pi \left[-\tfrac{1}{2}y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 15y \right]_{-1}^{3/2} \\
&= \tfrac{875}{32}\pi
\end{aligned}
$$

O volume do sólido de revolução é, então, $\frac{875}{32}\pi$ unidades cúbicas.

Como vimos, o cálculo de volumes por discos e anéis circulares constitui um caso particular do cálculo de volumes por corte. Agora daremos outro exemplo para achar um volume, através de um corte.

EXEMPLO 5 Uma cunha é tirada de um cilindro circular reto com um raio de r cm por dois planos, um perpendicular ao eixo x do cilindro e o outro interceptando o primeiro ao longo de um diâmetro da secção plana circular, a um ângulo cuja medida é 60°. Ache o volume da cunha.

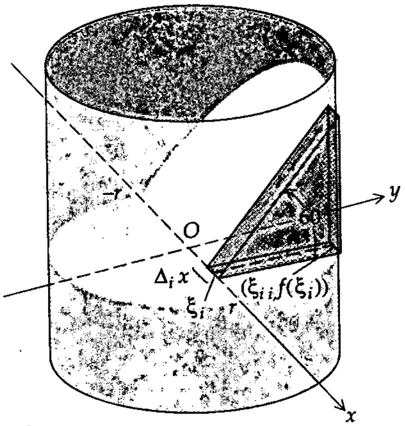


FIGURA 25

Solução A cunha está na Figura 25. O plano xy é tomado como o plano perpendicular ao eixo do cilindro, e a origem está no ponto de perpendicularidade. Uma equação da secção plana circular é, então, $x^2 + y^2 = r^2$. Toda secção plana da cunha perpendicular ao eixo x é um triângulo retângulo. Um elemento de volume é um cilindro reto, com $\Delta_i x$ cm de altura e a área da base dada por $\frac{1}{2}\sqrt{3}[f(\xi_i)]^2$ cm², onde $f(x)$ é obtido ao resolvermos a equação do círculo em y, tomando $y = f(x)$. Logo, temos $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Assim, se V cm³ for o volume da cunha,

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(r^2 - \xi_i^2)\, \Delta_i x \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \left[r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3 \right]_{-r}^{r} \\
&= \tfrac{2}{3}\sqrt{3}r^3
\end{aligned}
$$

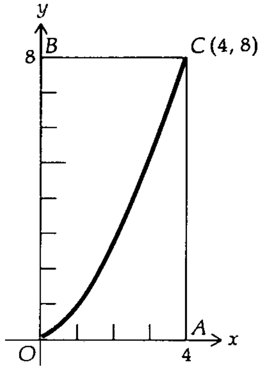
Logo, o volume da cunha é $\frac{2}{3}\sqrt{3}r^3$ cm³.

EXERCÍCIOS 6.1

1. Deduza a fórmula para o volume de uma esfera de raio r unidades por meio de um corte.
2. Deduza a fórmula para o volume de um cone circular reto com h unidades de altura e a unidades de raio da base, usando um corte.
3. Ache o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 2$ é rotacionada em torno do eixo x.
4. Ache o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = x^2 + 1$, pelo eixo x e pelas retas $x = 2$ e $x = 3$ for rotacionada em torno do eixo x.

Nos Exercícios de 5 a 12, ache o volume do sólido de revolução descrito quando a região dada da figura for rotacionada em torno da reta indicada. Uma equação da curva na figura é $y^2 = x^3$.

5. OAC em torno do eixo x.
6. OAC em torno da reta AC.
7. OAC em torno da reta BC.
8. OAC em torno do eixo y.
9. OBC em torno do eixo y.
10. OBC em torno da reta BC.
11. OBC em torno da reta AC.
12. OBC em torno do eixo x.



Nos Exercícios de 13 a 16, ache o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno da reta indicada, da região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$, pelo eixo x e pela reta $x = 4$.

13. a reta $x = 4$
14. o eixo x
15. o eixo y
16. a reta $y = 2$

17. Deduza a fórmula para o volume de uma esfera, rotacionando a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ e pelo eixo x em torno do eixo x.

18. Deduza a fórmula para o volume de um cone circular reto com h unidades de altura e a unidades de raio da base, rotacionando a região limitada pelo triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.

19. Deduza a fórmula para o volume do tronco de um cone circular reto, rotacionando o segmento de reta de $(0, b)$ a (h, a) em torno do eixo x.

20. Ache, por meio de um corte, o volume do tetraedro com três faces mutuamente perpendiculares e três arestas mutuamente perpendiculares, cujos comprimentos são 3, 4 e 7 cm.

21. A região limitada pela curva $y = \sec x$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = \frac{\pi}{4}$ gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.

22. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = \operatorname{cosec} x$, pelo eixo x, e pelas retas $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{\pi}{3}$ em torno do eixo x.

23. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada por um arco da curva do seno em torno do eixo x. (*Sugestão*: use a identidade $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.)

24. A região limitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ é girada em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado. (*Sugestão*: use as seguintes identidades: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.)

25. Ache o volume do sólido gerado se a região do Exercício 23 girar em torno da reta $y = 1$.

26. Ache o volume do sólido gerado se a região do Exercício 24 girar em torno da reta $y = 1$.

27. A região limitada pela curva $y = \operatorname{cotg} x$, pela reta $x = \frac{1}{6}\pi$, e pelo eixo x é girada em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.

28. A região limitada pela curva $y = \operatorname{tg} x$, a reta $x = \frac{1}{3}\pi$ e o eixo x é rotacionada em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.

29. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada por aquela reta e pela parábola $x = 4 + 6y + 2y^2$.

30. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y^2 = 4x$ e pela reta $y = x$.

31. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = 4$, da região do Exercício 30.

32. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pela reta que passa por $(1, 3)$ e $(3, 7)$ e pelas retas $y = 3$, $y = 7$ e $x = 0$.

33. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = -3$, da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 1 + x - x^2$.

34. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo laço da curva cuja equação é $2y^2 = x(x^2 - 4)$.

35. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo laço da curva cuja equação é $x^2y^2 = (x^2 - 9)(1 - x^2)$.

36. Um tanque de óleo na forma de uma esfera tem um diâmetro de 18 m. Quanto óleo o tanque contém se a profundidade do óleo é de 7 m?

37. Um parabolóide de revolução é obtido fazendo girar a parábola $y^2 = 4px$ em torno do eixo x. Ache o volume limitado por um parabolóide de revolução e um plano perpendicular a seu eixo, se o plano estiver a 10 cm do vértice e se a secção plana de intersecção for um círculo com um raio de 6 cm.

38. A região do primeiro quadrante, limitada pela curva $y = \sec x$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$ faz uma rotação em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.

39. A região limitada pela curva $y = \operatorname{cosec} x$ e pelas retas $y = 2$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$ é girada em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.

40. A região no primeiro quadrante, limitada pelos eixos coordenados, pela reta $y = 1$ e pela curva $y = \operatorname{cotg} x$, faz uma rotação em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.

41. Um sólido de revolução é formado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela curva $y = \sqrt{2x + 4}$, pelo eixo x, pelo eixo y, e pela reta $x = c$ $(c > 0)$. Para que valor de c o volume será de 12π unidades cúbicas?

42. A base de um sólido é a região encerrada por um círculo com 2 unidades de raio. Ache o volume do sólido se todas as secções planas perpendiculares a um diâmetro fixo da base forem quadrados.

43. A base de um sólido é a região encerrada por um círculo com 7 cm de raio. Ache o volume do sólido, se todas as secções planas perpendiculares a um diâmetro fixo da base forem triângulos eqüiláteros.

44. A base de um sólido é a região encerrada por um círculo com um raio de 4 cm, e cada secção plana perpendicular a um diâmetro fixo da base é um triângulo isósceles com 10 cm de altura e uma corda do círculo como base. Ache o volume do sólido.

45. A base de um sólido é a região do Exercício 43. Ache o volume do sólido se todas as secções planas perpendiculares a um diâmetro fixo da base forem triângulos isósceles de altura igual à distância da secção plana do centro do círculo. O lado do triângulo situado na base do sólido não é um dos lados de igual comprimento.

46. A base de um sólido é a região encerrada por um círculo com um raio de r unidades, e todas as secções planas perpendiculares a um diâmetro fixo da base são triângulos retângulos isósceles, com a hipotenusa no plano da base. Ache o volume do sólido.

47. Resolva o Exercício 46, se os triângulos retângulos isósceles tiverem um dos catetos no plano da base.

48. Dois cilindros circulares retos, cada um tendo um raio de r unidades, têm seus eixos interceptando-se em ângulos retos. Ache o volume do sólido comum aos dois cilindros.

49. Uma cunha é cortada de um sólido com a forma e um cilindro circular reto, o qual tem um raio de r cm, por um plano através de um diâmetro da base e inclinado em relação ao plano da base segundo um ângulo cuja medida é 45°. Ache o volume da cunha.

50. Uma cunha é cortada de um sólido com a forma de um cone circular reto tendo um raio da base com 5 cm e uma altura de 20 cm, por dois planos contendo o eixo do cone. O ângulo entre os planos tem uma medida de 30°. Ache o volume da cunha.

6.2 VOLUMES DE SÓLIDOS POR INVÓLUCROS CILÍNDRICOS

Na secção precedente encontramos o volume de um sólido de revolução, tomando elementos retangulares de área perpendiculares ao eixo de revolução e o elemento de volume era um disco circular ou um anel circular. Para alguns sólidos de revolução esse método pode não ser viável. Por exemplo, suponha que desejemos encontrar o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico de $y = 3x - x^3$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$. A Figura 1 mostra a região. Se um elemento de área for perpendicular ao eixo y, como mostra a figura, o elemento de volume será um disco circular e para determinar o volume do sólido de revolução usamos uma integral da forma $\int_0^2 A(y)\,dy$. Mas para obter uma fórmula para $A(y)$ é necessário resolver a equação cúbica $y = 3x - x^3$ para x em termos de y, a qual é muito trabalhosa. Logo, discutiremos agora um procedimento alternativo para calcular o volume de um sólido de revolução, que é mais fácil de aplicar nesta e em outras situações.

O método envolve tomar elementos retangulares de área, paralelos ao eixo de revolução. Então, quando um elemento de área for rotacionado em torno do eixo de revolução, obteremos um **invólucro cilíndrico**, ou seja, um sólido contido entre dois cilindros, com o mesmo centro e eixo. Tal invólucro cilíndrico está na Figura 2.

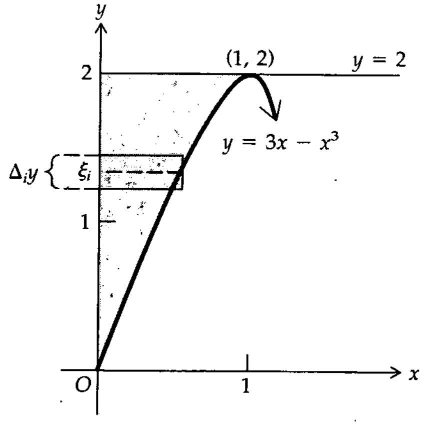


FIGURA 1

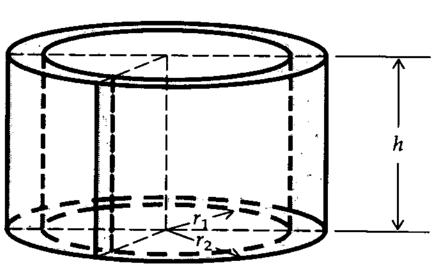


FIGURA 2

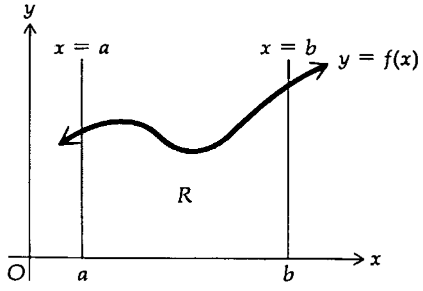


FIGURA 3

Se o invólucro cilíndrico tiver um raio interno com r_1 unidades, um raio externo com r_2 unidades e uma altura com h unidades, então o seu volume de V unidades cúbicas será dado por

$$V = \pi r_2{}^2 h - \pi r_1{}^2 h \tag{1}$$

Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Além disso, suponha que $a \geqslant 0$. Tal região é ilustrada na Figura 3. Se R girar em torno do eixo y, um sólido de revolução S será gerado. Tal sólido é mostrado na Figura 4. Para encontrar o volume S quando os elementos de área são tomados paralelamente ao eixo y, prosseguimos da seguinte maneira:

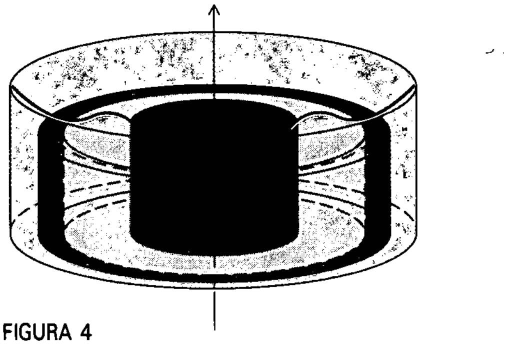


FIGURA 4

Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$, dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Seja m_i o ponto médio do i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Temos, então, que $m_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. Considere o retângulo tendo altura $f(m_i)$ unidades e comprimento $\Delta_i x$ unidades. Se esse retângulo girar em torno do eixo y, um invólucro cilíndrico será obtido. A Figura 4 mostra o invólucro cilíndrico gerado pelo elemento retangular de área.

Se $\Delta_i V$ der a medida do volume desse invólucro cilíndrico, temos, da fórmula (1), onde $r_1 = x_{i-1}$, $r_2 = x_i$ e $h = f(m_i)$,

$$\Delta_i V = \pi x_i{}^2 f(m_i) - \pi x_{i-1}{}^2 f(m_i)$$

$$\Delta_i V = \pi(x_i{}^2 - x_{i-1}{}^2) f(m_i)$$

$$\Delta_i V = \pi(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) f(m_i)$$

Como $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ e como $x_i + x_{i-1} = 2m_i$, então dessa equação,

$$\Delta_i V = 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x$$

Se n elementos retangulares de área girarem em torno do eixo y, serão obtidos n invólucros cilíndricos. A soma das medidas dos volumes é

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x$$

que é uma soma de Riemann. O limite dessa soma quando $\|\Delta\|$ aproxima-se de zero existe, pois se f for contínua em $[a, b]$, então, a função com valores $2\pi x f(x)$ também será. O limite é a integral definida $\int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$, e dá o volume do sólido de revolução. Esse resultado é resumido no teorema a seguir.

6.2.1 TEOREMA

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, onde $a \geqslant 0$. Suponha que $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Se R for a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, se S for o sólido de revolução obtido pela sua rotação R em torno do eixo y e se V unidades cúbicas for o volume de S, então

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)\, \Delta_i x \\ &= 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx \end{aligned}$$

Enquanto a validade do Teorema 6.2.1 deveria parecer plausível, tendo em vista a discussão que precedeu o seu enunciado; uma prova requer que mostremos que o mesmo volume seja obtido pelo método do disco do Teorema 6.1.2. No artigo de fevereiro de 1984 da *American Mathematical Monthly* (Vol. 91, nº 2) Charles A. Cable da Allegheny College apresentou uma prova usando a integração por partes (discutida na Secção 9.1).

A fórmula para a medida do volume do invólucro cilíndrico é facilmente lembrada, notando que $2\pi m_i$, $f(m_i)$ e $\Delta_i x$ são, respectivamente, os números que dão as medidas da circunferência do círculo tendo por raio a média entre os raios interno e externo do invólucro, a altura e a espessura do invólucro. Assim, o volume do invólucro é

$$2\pi(\text{raio médio})\,(\text{altura})\,(\text{espessura})$$

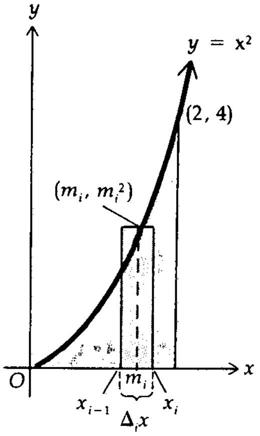


FIGURA 5

EXEMPLO 1 A região limitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$ gira em torno do eixo y. Ache o volume do sólido gerado. Tome os elementos de área paralelos ao eixo de revolução.

Solução A Figura 5 mostra a região e um elemento de área retangular. A Figura 6 mostra o sólido de revolução e o invólucro cilíndrico obtido, ao girar o elemento de área retangular em torno do eixo y.

O elemento de volume é um invólucro cilíndrico cuja medida de volume é

$$\begin{aligned} \Delta_i V &= 2\pi m_i (m_i^2)\, \Delta_i x \\ &= 2\pi m_i^3\, \Delta_i x \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i^3\, \Delta_i x \\ &= 2\pi \int_0^2 x^3\, dx \\ &= 2\pi\left(\tfrac{1}{4}x^4\right)\Big]_0^2 \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido de revolução é 8π unidades cúbicas.

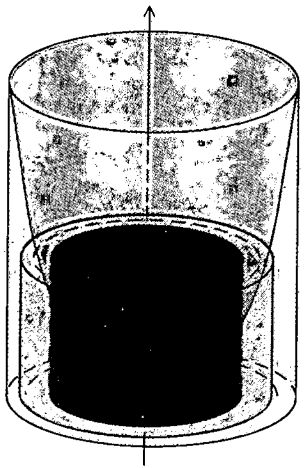


FIGURA 6

No exemplo a seguir, calculamos o volume do sólido de revolução discutido no início desta secção.

EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico de $y = 3x - x^3$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$.

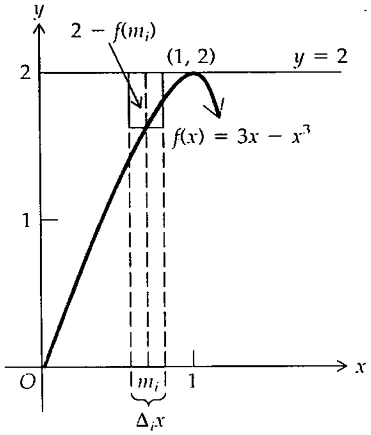


FIGURA 7

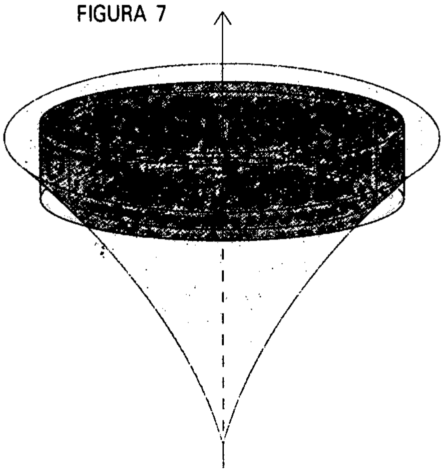


FIGURA 8

Solução Seja $f(x) = 3x - x^3$. A Figura 7 mostra a região e um elemento retangular de área paralelo ao eixo y. O sólido de revolução e um elemento de volume do invólucro cilíndrico aparecem na Figura 8. O raio médio do invólucro cilíndrico é m_i unidades, a altura é $[2 - f(m_i)]$ unidades e a espessura é $\Delta_i x$ unidades. Portanto, se $\Delta_i V$ unidades cúbicas for o volume do invólucro,

$$\Delta_i V = 2\pi m_i[2 - f(m_i)]\,\Delta_i x$$

Assim, se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução,

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i[2 - f(m_i)]\,\Delta_i x \\
&= 2\pi \int_0^1 x[2 - f(x)]\,dx \\
&= 2\pi \int_0^1 x(2 - 3x + x^3)\,dx \\
&= 2\pi \int_0^1 (2x - 3x^2 + x^4)\,dx \\
&= 2\pi \left[x^2 - x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\
&= 2\pi(1 - 1 + \tfrac{1}{5}) \\
&= \tfrac{2}{5}\pi
\end{aligned}$$

Portanto, o volume é $\frac{2}{5}\pi$ unidades cúbicas.

EXEMPLO 3 A região limitada pela curva $y = x^2$ e pelas retas $y = 1, x = 2$ gira em torno da reta $y = -3$. Ache o volume do sólido gerado, tomando elementos de área retangulares, paralelos ao eixo de revolução.

Solução A região e um elemento retangular de área são ilustrados na Figura 9.

A equação da curva é $y = x^2$. Resolvendo em x obtemos $x = \pm\sqrt{y}$. Como $x > 0$ para a região dada, $x = \sqrt{y}$.

O sólido de revolução, bem como um elemento de volume do invólucro cilíndrico, são mostrados na Figura 10. O raio externo do invólucro cilíndrico é $(y_i + 3)$ unidades e o raio interno é $(y_{i-1} + 3)$ unidades. Assim, a média entre o raio interno e o externo é $(m_i + 3)$ unidades. Como a altura e a espessura do invólucro cilíndrico são, respectivamente, $(2 - \sqrt{m_i})$ e $\Delta_i y$ unidades,

$$\Delta_i V = 2\pi(m_i + 3)(2 - \sqrt{m_i})\,\Delta_i y$$

Logo, se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução,

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(m_i + 3)(2 - \sqrt{m_i})\,\Delta_i y \\
&= \int_1^4 2\pi(y + 3)(2 - \sqrt{y})\,dy \\
&= 2\pi \int_1^4 (-y^{3/2} + 2y - 3y^{1/2} + 6)\,dy \\
&= 2\pi\left[-\tfrac{2}{5}y^{5/2} + y^2 - 2y^{3/2} + 6y\right]_1^4 \\
&= \tfrac{66}{5}\pi
\end{aligned}$$

Portanto, o volume é $\frac{66}{5}\pi$ unidades cúbicas.

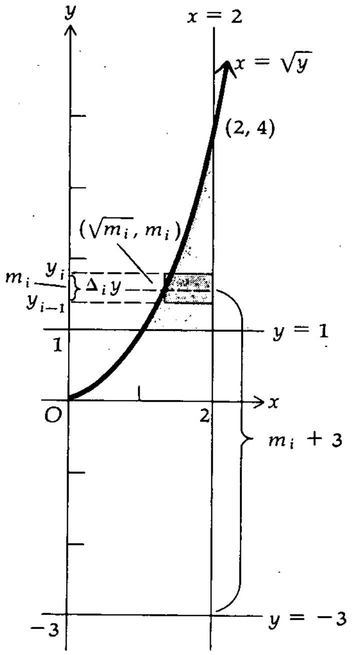


FIGURA 9

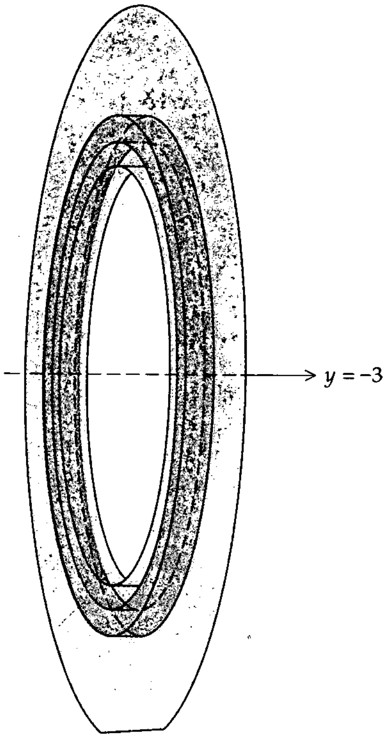
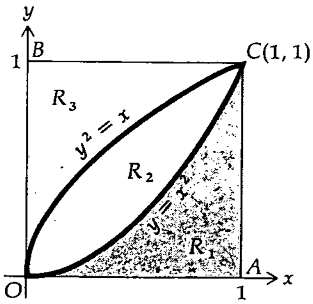


FIGURA 10

EXERCÍCIOS 6.2

1 — 12. Resolva os Exercícios de 5 a 16 da Secção 6.1 pelo método do invólucro cilíndrico.

Na Figura abaixo, a região limitada pelo eixo x, pela reta x = 1 e pela curva $y = x^2$ *é denotada por* R_1*; a região limitada pelas curvas* $y = x^2$ *e* $y^2 = x$ *é denotada por* R_2*; a região limitada pelo eixo y, pela reta y = 1 e pela curva* $y^2 = x$ *é denotada por* R_3*. Nos Exercícios de 13 a 20, ache o volume do sólido gerado pela rotação da região indicada em torno da reta dada.*



13. R_1 gira em torno do eixo y; os elementos retangulares são paralelos ao eixo de revolução.

14. Igual ao Exercício 13, mas os elementos retangulares são perpendiculares ao eixo de revolução.

15. R_2 gira em torno do eixo x; os elementos retangulares são paralelos ao eixo de revolução.

16. O mesmo que o Exercício 15, mas os elementos retangulares são perpendiculares ao eixo de revolução.

17. R_3 gira em torno da reta $y = 2$; os elementos retangulares são paralelos ao eixo de revolução.

18. O mesmo que o Exercício 17, mas os elementos retangulares são perpendiculares ao eixo de revolução.

19. R_2 gira em torno da reta $x = -2$; os elementos retangulares são paralelos ao eixo de revolução.

20. O mesmo que o Exercício 19, mas os elementos retangulares são perpendiculares ao eixo de revolução.

Nos Exercícios de 21 a 24, a região é limitada pelas curvas $x = y^2 - 2$ *e* $x = 6 - y^2$ *gira em torno do eixo indicado. Ache o volume do sólido gerado.*

21. o eixo x

22. o eixo y

23. a reta $x = 2$

24. a reta $y = 2$

25. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela parábola $y^2 = 4px$ $(p > 0)$ e pela reta $x = p$ em torno do eixo $x = p$.

26. Ache o volume do sólido gerado se a região do Exercício 25 for rotacionada em torno do eixo y.

27. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico de $y = 3x - x^3$, pelo eixo x e pela reta $x = 1$.

28. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 27 em torno da reta $x = 1$.

29. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exemplo 2 em torno da reta $x = 1$.

30. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico de $y = 4x - \frac{1}{8}x^4$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$.

31. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 30 em torno da reta $x = 2$.

32. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pelo gráfico de $y = 4x - \frac{1}{8}x^4$, pelo eixo y e pela reta $y = 6$ em torno da reta $x = 2$.

33. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 32 em torno do eixo y.

34. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $x = y^3$ em torno do eixo x. Tome os elementos retangulares de área paralelos ao eixo de revolução.

35. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada por aquela reta e pela parábola $x^2 = 4y$ em torno da reta $y = 1$. Tome os elementos retangulares de área paralelos ao eixo de revolução.

36. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ em torno do eixo y.

37. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = \operatorname{sen} x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ e $x = \sqrt{\pi}$ em torno do eixo y.

38. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região no primeiro quadrante limitada pela curva $y = \cos x^2$ e pelos eixos coordenados, em torno do eixo y.

39. A região no primeiro quadrante, limitada pela curva $x = \cos y^2$, pelo eixo y, e pelo eixo x, onde $0 \leqslant x \leqslant 1$ gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.

40. Um buraco com 2 cm de raio é feito através de um sólido esférico com 6 cm de raio e o eixo do buraco é um diâmetro da esfera. Ache o volume da parte que sobra da esfera.

41. Um buraco com $2\sqrt{3}$ cm de raio é feito através do centro de um sólido esférico com 4 cm de raio. Ache o volume da parte do sólido que foi cortada fora.

42. Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico de $y = |x - 3|$, e pelas retas $x = 1$, $x = 5$ e $y = 0$. Tome os elementos de área retangulares paralelos ao eixo de revolução.

43. Um sólido de revolução é formado quando a região limitada pela curva $y = \sqrt[3]{x}$, pelo eixo x e pela reta $x = c$ $(c > 0)$ gira em torno do eixo y. Tome os elementos de área retangulares paralelos ao eixo de revolução e determine o valor de c que irá dar um volume de 12π unidades cúbicas.

44. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região fora da curva $y = x^2$ e entre as retas $y = 2x - 1$ e $y = x + 2$ em torno do eixo y.

6.3 COMPRIMENTO DE ARCO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Outra aplicação geométrica da integral definida é feita no cálculo do comprimento de arco do gráfico de uma função. Quando tratamos de áreas e volumes, usamos as expressões "medidas da área" e "medidas do volume" para indicar um número sem quaisquer unidades de medida incluídas. Em nossa discussão sobre comprimento do arco usaremos a palavra "comprimento", em vez de "medida do comprimento". Deve ser entendido, então, que o comprimento de um arco é um número puro, isto é, sem unidades de medidas.

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Considere o gráfico dessa função definida pela relação $y = f(x)$, cujo esboço está na Figura 1. A parte da curva do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$ é chamada de *arco*. Queremos atribuir ao arco um número o qual pensamos intuitivamente ser o seu comprimento. Se o arco for um segmento de reta do ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2), da fórmula da distância entre dois pontos sabemos que seu comprimento será dado por $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Vamos usar essa fórmula para definir, em geral, o comprimento de um arco. Lembre-se, da Geometria, que a circunferência de um círculo é definida como o limite dos perímetros de polígonos regulares inscritos no círculo. Para outras curvas, procedemos de forma análoga.

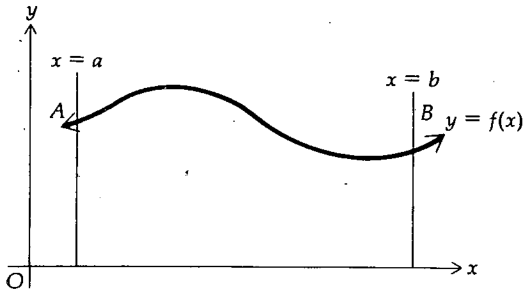


FIGURA 1

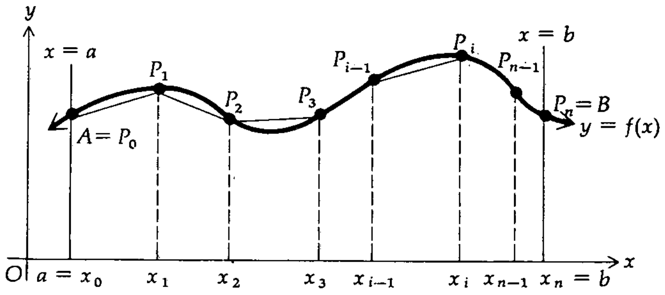


FIGURA 2

Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$ formada ao dividirmos o intervalo em n subintervalos, escolhendo $(n - 1)$ números intermediários entre a e b. Sejam $x_0 = a$ e $x_n = b$ e $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ números intermediários, de tal forma que $x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n$. Então, o i-ésimo subintervalo será $[x_{i-1}, x_i]$; seu comprimento denotado por $\Delta_i x$ será $x_i - x_{i-1}$, onde $i = 1, 2, \ldots, n$. Então, se $\|\Delta\|$ for a norma da partição Δ, cada $\Delta_i x \leqslant \|\Delta\|$.

Associado a cada ponto $(x_i, 0)$ no eixo x está um ponto $P_i(x_i, f(x_i))$ sobre a curva. Trace um segmento de reta de cada ponto P_{i-1} ao próximo ponto P_i, conforme mostra a Figura 2. O comprimento do segmento de reta de P_{i-1} a P_i é denotado por $|\overline{P_{i-1}P_i}\|$, sendo dado pela fórmula

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \tag{1}$$

A soma dos comprimentos desses segmentos de reta é

$$|\overline{P_0P_1}| + |\overline{P_1P_2}| + |\overline{P_2P_3}| + \ldots + |\overline{P_{i-1}P_i}| + \ldots + |\overline{P_{n-1}P_n}|$$

que pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| \tag{2}$$

Parece plausível que se n for suficientemente grande, a soma em (2) estará "próxima" do que intuitivamente pensamos ser o comprimento do arco AB. Assim, definimos o comprimento do arco como sendo o limite da soma (2) quando a norma de Δ tende a zero, e nesse caso n cresce sem limitação. Temos, então, a definição a seguir.

6.3.1 DEFINIÇÃO

Suponhamos que a função f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Além disso, suponhamos que exista um número L tendo as seguintes propriedades: Para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para toda partição Δ do intervalo $[a, b]$ seja verdade que

$$\text{se } \|\Delta\| < \delta \text{ então } \left| \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| - L \right| < \epsilon$$

Assim, escrevemos

$$L = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| \tag{3}$$

e L é chamado de **comprimento do arco** da curva $y = f(x)$ do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$.

Se o limite em (3) existir, dizemos que o arco é **retificável.**

Vamos deduzir uma fórmula para encontrar o comprimento L de um arco retificável. A dedução exige que a derivada de f seja contínua em $[a, b]$; dizemos que tal função é **suave** em $[a, b]$.

Consulte a Figura 3. Se P_{i-1}, tiver coordenadas (x_{i-1}, y_{i-1}) e P_i tiver coordenadas (x_i, y_i), então o comprimento da corda $P_{i-1}P_i$ será dado pela fórmula (1).

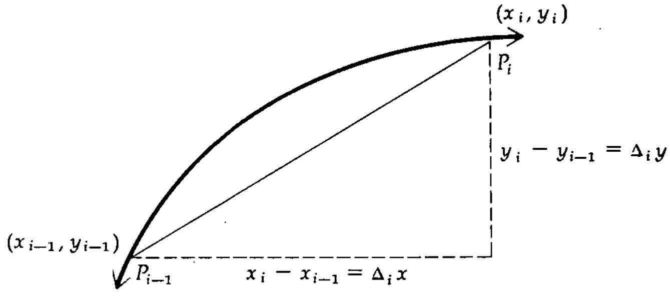


FIGURA 3

Tomando $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ e $y_i - y_{i-1} = \Delta_i y$, temos

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$$

ou, equivalentemente, como $\Delta_i x \neq 0$,

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2}\,(\Delta_i x) \tag{4}$$

Como exigimos que f' seja contínua em $[a, b]$, as hipóteses do teorema do valor médio (4.3.2) estão satisfeitas por f; assim, existe um número z_i no intervalo aberto (x_{i-1}, x_i) tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

Como $\Delta_i y = f(x_i) - f(x_{i-1})$ e $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, da equação acima, teremos

$$\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} = f'(z_i)$$

Substituindo essa equação em (4), obtemos

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2}\,\Delta_i x$$

Para cada i de 1 até n, existe uma expressão dessa forma, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2}\,\Delta_i x$$

Tomando o limite de ambos os membros dessa expressão quando $\|\Delta\|$ tende a zero, obtemos

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2}\,\Delta_i x \tag{5}$$

se o limite existir.

Para mostrar que o limite do segundo membro de (5) existe, seja F a função definida por

$$F(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

Como estamos impondo que f' seja contínua em $[a, b]$, F será contínua em $[a, b]$. Como $x_{i-1} < z_i < x_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, no lado direito de (5), temos o limite de uma soma de Riemann que é uma integral definida. Portanto, de (5)

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

De (3), o primeiro membro é L; portanto

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Dessa forma, provamos o teorema a seguir.

6.3.2 TEOREMA Se a função f e sua derivada f' forem contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, então o comprimento do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ será dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Temos também o teorema a seguir, que dá o comprimento do arco de uma curva quando x é expressa como uma função de y.

6.3.3 TEOREMA Se a função g e sua derivada g' forem contínuas no intervalo fechado $[c, d]$, então o comprimento do arco da curva $x = g(y)$ do ponto $(g(c), c)$ ao ponto $(g(d), d)$ será dado por

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

A demonstração do Teorema 6.3.3 é idêntica àquela do Teorema 6.3.2; basta trocarmos x por y e f por g.

A integral definida obtida quando aplicamos os Teoremas 6.3.2 ou 6.3.3, é freqüentemente difícil de calcular. Como nossas técnicas de integração limitam-se à integração de potências e a algumas funções trigonométricas, encontraremos apenas as equações de curvas para as quais podemos calcular as integrais definidas resultantes e achar o comprimento de um arco.

EXEMPLO 1 Ache o comprimento do arco da curva $y = x^{2/3}$ do ponto (1, 1) a (8, 4), usando o Teorema 6.3.2.

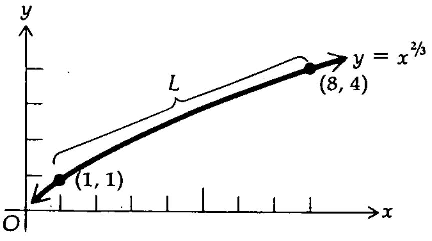


FIGURA 4

Solução Veja a Figura 4. Como $f(x) = x^{2/3}$, $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Do Teorema 6.3.2,

$$\begin{aligned} L &= \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}}\, dx \\ &= \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{x^{1/3}}\, dx \end{aligned}$$

Para calcular essa integral definida, seja $u = 9x^{2/3} + 4$; então, $du = 6x^{-1/3}\,dx$. Quando $x = 1$, $u = 13$ e quando $x = 8$, $u = 40$. Logo,

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{18}\int_{13}^{40} u^{1/2}\,du \\ &= \tfrac{1}{18}\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_{13}^{40} \\ &= \tfrac{1}{27}(40^{3/2} - 13^{3/2}) \\ &\approx 7{,}6 \end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Ache o comprimento de arco no Exemplo 1, usando o Teorema 6.3.3.

Solução Como $y = x^{2/3}$ e $x > 0$, resolvemos em x obtendo $x = y^{3/2}$. Vamos tomar $g(y) = y^{3/2}$ e teremos $g'(y) = \frac{3}{2}y^{1/2}$. Então, do Teorema 6.3.3,

$$\begin{aligned} L &= \int_1^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}y}\,dy \\ &= \tfrac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{4 + 9y}\,dy \\ &= \tfrac{1}{18}\left[\tfrac{2}{3}(4 + 9y)^{3/2}\right]_1^4 \\ &= \tfrac{1}{27}(40^{3/2} - 13^{3/2}) \\ &\approx 7{,}6 \end{aligned}$$

Usando a notação de Leibniz para derivadas, as fórmulas dos Teoremas 6.3.2 e 6.3.3 podem ser escritas como

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \text{ e } L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy} \tag{6}$$

Introduziremos agora a *função comprimento de arco* e a diferencial do comprimento de arco, a qual fornece um recurso mnemônico para que essas fórmulas sejam lembradas.

Se f' for contínua em $[a, b]$, a integral definida $\int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,dt$ será uma função de x, e ela dará o comprimento do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(x, f(x))$, onde x é qualquer número no intervalo fechado $[a, b]$. Seja $s(x)$ o comprimento desse arco; assim, s é uma **função comprimento de arco** e

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,dt$$

Do Teorema 5.8.1,

$$s'(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

ou, como $s'(x) = ds/dx$ e $f'(x) = dy/dx$,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Multiplicando a equação por dx, obtemos

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{7}$$

Da mesma forma, para o comprimento do arco da curva $x = g(y)$ de $(g(c), c)$ a $(g(y), y)$,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \tag{8}$$

Observe que ds (a diferencial do comprimento de arco) é o integrando nas fórmulas (6). Elevando os dois membros ao quadrado de (7) ou de (8) resulta

$$\boxed{(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2} \tag{9}$$

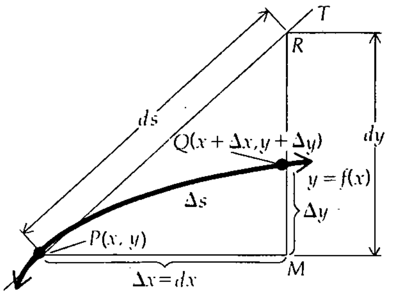


FIGURA 5

Dessa equação temos a interpretação geométrica de ds, que está na Figura 5. Na figura, a reta T é tangente à curva $y = f(x)$ no ponto P. $|\overline{PM}| = \Delta x = dx$; $|\overline{MQ}| = \Delta y$; $|\overline{MR}| = dy$; $|\overline{PR}| = ds$; o comprimento do arco PQ é Δs. A Figura 5 fornece uma maneira fácil de lembrarmos (9), da qual as fórmulas (6) podem ser obtidas.

EXERCÍCIOS 6.3

1. Calcule o comprimento do segmento da reta $y = 3x$ do ponto $(1, 3)$ ao ponto $(2, 6)$ por três métodos: (a) use a fórmula da distância; (b) use o Teorema 6.3.2; (c) use o Teorema 6.3.3.
2. Calcule o comprimento do segmento da reta $x + 3y = 4$ do ponto $(-2, 2)$ ao ponto $(4, 0)$ por três métodos: (a) use a fórmula da distância; (b) use o Teorema 6.3.2; (c) use o Teorema 6.3.3.
3. Calcule o comprimento do segmento da reta $4x + 9y = 36$ entre os seus interceptos x e y por três métodos: (a) use o Teorema de Pitágoras; (b) use o Teorema 6.3.2; (c) use o Teorema 6.3.3.
4. Siga as instruções do Exercício 3 para a reta $5x - 2y = 10$.
5. Ache o comprimento do arco da curva $9y^2 = 4x^3$ da origem ao ponto $(3, 2\sqrt{3})$.
6. Ache o comprimento do arco da curva $x^2 = (2y + 3)^3$ de $(1, -1)$ a $(7\sqrt{7}, 2)$.
7. Ache o comprimento do arco da curva $8y = x^4 + 2x^{-2}$ do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = 2$.
8. Use o Teorema 6.3.2 para encontrar o comprimento do arco da curva $y^3 = 8x^2$ do ponto $(1, 2)$ ao ponto $(27, 18)$.
9. Resolva o Exercício 8 usando o Teorema 6.3.3.
10. Ache o comprimento do arco da curva $y = \frac{2}{3}(x - 5)^{3/2}$ do ponto onde $x = 6$ ao ponto onde $x = 8$.
11. Ache o comprimento do arco da curva $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = 3$.
12. Ache o comprimento do arco da curva $6xy = y^4 + 3$ do ponto onde $y = 1$ ao ponto onde $y = 2$.
13. Ache o comprimento do arco da curva $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3x - 1)$ do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = 4$.
14. Ache o comprimento do arco da curva $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1}$ do ponto $(2, \frac{19}{12})$ ao ponto $(5, \frac{314}{15})$.
15. Ache o comprimento do arco da curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ no primeiro quadrante, do ponto onde $x = \frac{1}{8}$ ao ponto onde $x = 1$.
16. Ache o comprimento do arco da curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (a é uma constante, $a > 1$) no primeiro quadrante do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = a$.
17. Ache o comprimento do arco da curva $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} = 1$ no primeiro quadrante, do ponto onde $x = \frac{1}{8}a$ ao ponto onde $x = a$.
18. Ache o comprimento da curva $9y^2 = x^2(2x + 3)$ no segundo quadrante, do ponto onde $x = -1$ ao ponto onde $x = 0$.
19. Ache o comprimento da curva $9y^2 = x(x - 3)^2$ no primeiro quadrante, do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = 3$.
20. Ache o comprimento da curva $9y^2 = 4(1 + x^2)^3$ no primeiro quadrante, do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = 2\sqrt{2}$.
21. Se $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos t}\, dt$, ache o comprimento do arco do gráfico de f do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = \frac{1}{2}\pi$. (*Sugestão*: use a identidade $\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ e o Teorema 5.8.1.)
22. Se $f(x) = \int_0^x \sqrt{\operatorname{sen} t}\, dt$, ache o comprimento do arco do gráfico de f do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = \frac{1}{2}\pi$. (*Sugestão*: use a do Exercício 21 e a identidade $\operatorname{sen} x = \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$.)

Nos Exercícios de 23 a 26, use a regra de Simpson com $n = 8$ para aproximar até quatro casas decimais o comprimento de arco.

23. O arco da curva seno, da origem ao ponto $(\pi, 0)$.
24. O arco da curva co-seno, da origem ao ponto $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$.
25. O arco da curva $y = \frac{1}{3}x^3$ da origem ao ponto $(1, \frac{1}{3})$.
26. O arco da curva $y = \operatorname{tg} x$ da origem ao ponto $(\frac{1}{4}\pi, 1)$.

6.4 CENTRO DE MASSA DE UMA BARRA

Na Secção 5.7 aprendemos que se uma função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, o valor médio de f em $[a, b]$ será dado por

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}$$

Uma aplicação importante do valor médio de uma função ocorre em Física, associada ao conceito de *centro de massa.*

Para chegar a uma definição de *massa*, considere uma partícula que é colocada em movimento ao longo de um eixo por uma força exercida sobre ela. Suponha que todas as velocidades sejam pequenas, comparadas com a velocidade da luz. Assim, enquanto a força age sobre a partícula, a velocidade dela é crescente, isto é, a partícula é acelerada. A razão entre a força e a aceleração é constante e independe da magnitude da força, e a essa constante chamamos de **massa** da partícula. Logo, se a força for F unidades, a aceleração for a unidades e a massa, m unidades, então

$$M = \frac{F}{a}$$

Vamos medir a força, a massa e a aceleração em unidades do sistema métrico. Discutiremos essas unidades.

O sistema métrico, que foi adotado oficialmente por todos os países com exceção dos Estados Unidos, é o Sistema Internacional de Unidades, que abreviaremos SI, do francês *Système International d'Unités*. No SI a unidade de massa é o quilograma (kg) e a unidade de aceleração é 1 metro por segundo ao quadrado (m/s^2). A unidade de força é 1 *newton* (N), sendo aquela força que, aplicada a 1 kg, resulta numa aceleração de 1 m/s^2.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Uma partícula de massa 6 kg está sujeita a uma força horizontal de 3 N. Obtemos a aceleração da partícula dividindo a força pela massa e, portanto,

$$\frac{3\text{N}}{6\text{ kg}} = 0{,}5\ \text{m/s}^2$$

Em símbolos, se M kg for a massa, F N for a força e a m/s^2 for a aceleração, então como $a = F/M$, $F = 3$ e $M = 6$, $a = 0{,}5$. ◀

No sistema SI, a aceleração da gravidade próximo da superfície da Terra é aproximadamente 9,81 m/s^2. Se M kg for a massa de um objeto e F N for a força exercida no objeto devido à gravidade perto da superfície da Terra, então

$$F = 9{,}81\ M$$

Outro sistema métrico é o centímetro-grama-segundo, abreviado como CGS, onde a unidade de massa é o grama e 1 g = 0,001 kg. A unidade de aceleração no CGS é 1 cm/s^2. Logo, a unidade de força é aquela que dá a uma unidade de massa 1 g uma aceleração de 1 cm/s^2. Essa força é chamada 1 *dina*. Como

$$1\ \text{kg} = 10^3\ \text{g} \quad \text{e} \quad 1\ \text{m/s}^2 = 10^2\ \text{cm/s}^2$$

então,

$$1\ \text{N} = 10^5\ \text{dinas}$$

Um resumo das unidades no sistema métrico está na Tabela 1.

Tabela 1

Sistema de Unidades	*Força*	*Massa*	*Aceleração*
SI	newton (N)	quilograma (kg)	m/s^2
CGS	dina	grama (g)	cm/s^2

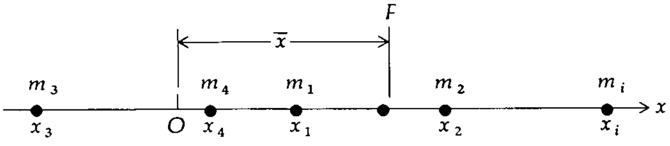


FIGURA 1

Considere agora uma barra horizontal, com peso e espessura desprezíveis, colocada sobre o eixo x. Na barra está um sistema de n partículas, localizadas nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A i-ésima partícula ($i = 1,2, \ldots, n$) está a uma distância orientada $x_i m$ da origem e sua massa é m_i kg. Veja a Figura 1. O número de quilogramas na massa total do sistema é $\sum_{i=1}^{n} m_i$. Definimos o número de quilogramas-metros no *momento de massa* da i-ésima partícula em relação à origem como $m_i x_i$. O **momento de massa** do sistema é definido como a soma dos momentos de massa de todas as partículas. Logo, se M_0 kg-m for o momento de massa do sistema em relação à origem, então

$$\boxed{M_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i}$$

Queremos encontrar um ponto $\bar{x}$ tal que se toda a massa do sistema estivesse concentrada nele, o seu momento de massa em relação à origem, seria igual ao momento de massa do sistema em relação à origem. Então, $\bar{x}$ deve satisfazer à equação

$$\bar{x} \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}} \qquad (1)$$

O ponto $\bar{x}$ é chamado de **centro de massa** do sistema, sendo o ponto onde o sistema estará em equilíbrio. A posição do centro de massa é independente da posição da origem; isto é, a localização do centro de massa relativamente à posição das partículas não se altera se mudarmos a origem. O centro de massa é importante, pois o comportamento de todo um sistema de partículas pode ser descrito pelo comportamento do centro de massa do sistema.

EXEMPLO 1 Dadas quatro partículas com massas 2, 3, 1 e 5 kg localizadas no eixo x em pontos com as coordenadas 5, 2, -3 e -4, respectivamente, onde a distância é medida em metros, ache o centro de massa desse sistema.

Solução Se $\bar{x}$ for a coordenada do centro de massa, temos da fórmula (1)

$$\bar{x} = \frac{2(5) + 3(2) + (1)(-3) + 5(-4)}{2 + 3 + 1 + 5}$$

$$= -\frac{7}{11}$$

Assim, o centro de massa está a $\frac{7}{11}$ m à esquerda da origem.

Vamos estender a discussão precedente a uma barra rígida horizontal, tendo a massa continuamente distribuída. Dizemos que a barra é **homogênea** se ela tiver uma densidade linear constante, isto é, se sua massa for diretamente proporcional a seu comprimento. Em outras palavras, se um segmento da barra cujo comprimento é $\Delta_i x$ m tiver uma massa de $\Delta_i m$ kg e $\Delta_i m = k\,\Delta_i x$, então a barra será homogênea. O número k é uma constante e k kg/m é chamada **densidade linear** da barra.

Vamos supor que tenhamos uma barra não-homogênea, em tal caso a densidade linear varia ao longo da barra. Seja L m o comprimento da barra e vamos colocá-la sobre o eixo x, de tal forma que o extremo esquerdo da barra esteja na origem, enquanto que o extremo direito está em L. Veja a Figura 2.

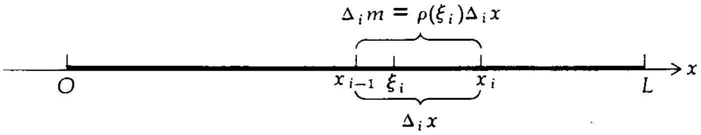


FIGURA 2

A densidade linear num ponto qualquer x da barra é $\rho(x)$ kg/m, onde ρ é contínua em $[0, L]$. Para encontrar a massa total da barra vamos considerar uma partição Δ do intervalo fechado $[0, L]$ em n subintervalos. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ e seu comprimento é $\Delta_i x$ m. Se ξ_i for um ponto qualquer em $[x_{i-1}, x_i]$, uma aproximação da massa da parte da barra contida no i-ésimo subintervalo será $\Delta_i m$ kg, onde

$$\Delta_i m = \rho(\xi_i)\,\Delta_i x$$

O número de quilogramas na massa total da barra é aproximado por

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i m = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\,\Delta_i x$$

Quanto menor tomarmos a norma da partição Δ, mais próxima estará a soma de Riemann do que intuitivamente pensamos ser a medida da massa da barra, e assim, definimos a medida da massa como o limite da soma de Riemann.

6.4.1 DEFINIÇÃO Uma barra de comprimento L m tem seu extremo esquerdo na origem. Se $\rho(x)$ kg/m for a densidade linear no ponto x m da origem, onde ρ é contínua em $[0, L]$, então a **massa** total da barra será M kg, onde

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\, \Delta_i x \\ &= \int_0^L \rho(x)\, dx \qquad (2) \end{aligned}$$

Na Definição 6.4.1, se a distância for medida em centímetros e a massa em gramas, então a densidade será medida em gramas por centímetro.

EXEMPLO 2 A densidade linear em um ponto qualquer de uma barra de 4 m varia diretamente com a distância a um ponto externo da barra, situado na mesma reta que ela e a 2 m de um extremo, onde a densidade é 5 kg/m. Ache a massa total da barra.

Solução A Figura 3 mostra a barra colocada sobre o eixo x. Se $\rho(x)$ for o número de quilogramas por metro na densidade da barra em um ponto a x m do externo com maior densidade, então

$$\rho(x) = c(6 - x)$$

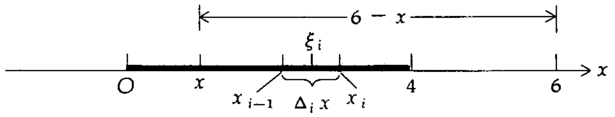


FIGURA 3

onde c é uma constante de proporcionalidade. Como $\rho(4) = 5$, então $5 = 2c$ ou $\rho = \frac{5}{2}$. Logo, $\rho(x) = \frac{5}{2}(6 - x)$. Assim sendo, se M kg for a massa total da barra, temos da Definição 6.4.1

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{5}{2}(6 - \xi_i)\, \Delta_i x \\ &= \int_0^4 \tfrac{5}{2}(6 - x)\, dx \\ &= \tfrac{5}{2}\Big[6x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^4 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Assim, a massa total da barra é 40 kg.

Vamos definir o centro de massa da barra da Definição 6.4.1. Precisamos, contudo, definir primeiro o momento de massa da barra em relação à origem.

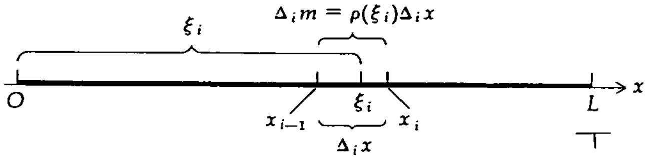


FIGURA 4

Como anteriormente, vamos colocar a barra sobre o eixo x com o extremo esquerdo na origem e o direito em L. Veja a Figura 4. Seja Δ uma partição de $[0, L]$ em n subintervalos, com o i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tendo $\Delta_i x$ m. Se ξ_i for um ponto qualquer em $[x_{i-1}, x_i]$, uma aproximação do momento de massa em relação à origem da parte da barra contida no i-ésimo subintervalo será $\xi_i \Delta_i m$ kg-m, onde $\Delta_i m = \rho(\xi_i)\Delta_i x$. O número de quilogramas-metros no momento de massa de toda a barra é aproximado por

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_1 \, \Delta_i m = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \rho(\xi_i) \, \Delta_i x$$

Quanto menor tomarmos a norma da partição Δ, mais próxima estará a soma de Riemann do que intuitivamente pensamos ser a medida do momento de massa de toda a barra em relação à origem. Temos, então, a definição a seguir.

6.4.2 DEFINIÇÃO Uma barra com L m de comprimento tem seu extremo esquerdo na origem e $\rho(x)$kg/m é a densidade linear no ponto a x m da origem, onde ρ é contínua em $[0, L]$. O **momento de massa** da barra em relação à origem é M_0 kg-m, onde

$$\begin{aligned} M_0 &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \rho(\xi_i) \, \Delta_i x \\ &= \int_0^L x\rho(x) \, dx \end{aligned} \tag{3}$$

O centro de massa da barra está em um ponto $\bar{x}$ tal que se M kg for a massa total da barra, $\bar{x}M = M_0$. Assim, de (2) e de (3),

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_0^L x\rho(x) \, dx}{\int_0^L \rho(x) \, dx}} \tag{4}$$

EXEMPLO 3 Ache o centro de massa da barra dada no Exemplo 2.

Solução No Exemplo 2, $M = 40$. De (4) com $\rho(x) = \frac{5}{2}(6 - x)$,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int_0^4 \frac{5}{2}x(6 - x) \, dx}{40} \\ &= \tfrac{1}{16}\Big[3x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_0^4 \\ &= \tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

Logo, o centro de massa está a $\frac{5}{3}$ m do extremo com maior densidade.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se uma barra tem uma densidade uniforme de k kg/m, onde k é uma constante, então de (4),

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\int_0^L xk\,dx}{\int_0^L k\,dx} \\
&= \frac{\left.\frac{kx^2}{2}\right]_0^L}{\left.kx\right]_0^L} \\
&= \frac{\frac{kL^2}{2}}{kL} \\
&= \frac{L}{2}
\end{aligned}
$$

Assim, o centro de massa está no centro da barra, conforme era de se esperar. ◀

EXERCÍCIOS 6.4

Nos Exercícios de 1 a 4, uma partícula se move sobre uma reta horizontal. Ache a força exercida na partícula se ela tiver a massa e a aceleração dadas.

1. A massa é 50 g; a aceleração é 5 cm/s^2.
2. A massa é 10 kg; a aceleração é 6 m/s^2.
3. A massa é 80 g; a aceleração é 50 cm/s^2.
4. A massa é 22 kg; a aceleração é 4 m/s^2.

Nos Exercícios de 5 a 8, uma partícula está sujeita à força horizontal dada e a massa ou a aceleração da partícula é dada. Ache a outra quantidade.

5. A força é de 6 N; a massa é 4 kg.
6. A força é de 32 dinas; a massa é 8 g.
7. A força é de 24 N; a aceleração é 9 m/s^2.
8. A força é de 700 dinas; a aceleração é 80 cm/s^2.

Nos Exercícios de 9 a 12, é dado um sistema de partículas sobre o eixo x. O número de quilogramas na massa de cada partícula e a coordenada de sua posição são dados. A distância é medida em metros. Ache o centro de massa de cada sistema.

9. $m_1 = 5$ em 2; $m_2 = 6$ em 3; $m_3 = 4$ em 5; $m_4 = 3$ em 8
10. $m_1 = 2$ em -4; $m_2 = 8$ em -1; $m_3 = 4$ em 2; $m_4 = 2$ em 3
11. $m_1 = 2$ em -3; $m_2 = 4$ em -2; $m_3 = 20$ em 4; $m_4 = 10$ em 6; $m_5 = 30$ em 9
12. $m_1 = 5$ em -7; $m_2 = 3$ em -2; $m_3 = 5$ em 0; $m_4 = 1$ em 2; $m_5 = 8$ em 10

Nos Exercícios de 13 a 21 ache a massa total da barra dada e o seu centro de massa.

13. O comprimento da barra é 6 m e a densidade linear da barra em um ponto a x m de um extremo é $(2x + 3)$ kg/m.
14. O comprimento da barra é 20 cm e a densidade linear da barra em um ponto a x cm de um extremo é $(3x + 2)$ g/cm.
15. O comprimento da barra é 9 mm e a densidade linear da barra em um ponto a x mm de um extremo é $(4x + 1)$ g/mm.
16. O comprimento da barra é 3 m e a densidade linear da barra em um ponto a x m de um extremo é $(5 + 2x)$ kg/m.
17. O comprimento da barra é 12 cm e a densidade linear da barra em um ponto é uma função linear da medida da distância ao extremo esquerdo da barra. A densidade linear no extremo esquerdo é 3 g/cm e no extremo direito é 4 g/cm.
18. O comprimento da barra é 10 m e a medida da densidade linear em um ponto é uma função linear da medida da distância do ponto ao extremo esquerdo da barra. A densidade linear no extremo esquerdo é 2 kg/m e no extremo direito é de 3 kg/m.
19. A medida da densidade linear em qualquer ponto de uma barra com 6 m varia diretamente com a distância do ponto a um ponto externo na reta suporte da barra e a 4 m de um extremo, onde a densidade é 3 kg/m.
20. Uma barra tem 10 cm e a medida da densidade linear em um ponto é uma função linear da medida da distância ao centro da barra. A densidade linear em cada extremo da barra é 5 g/cm e no centro da barra ela é $3\frac{1}{2}$ g/cm.
21. A medida da densidade linear em um ponto de uma barra varia diretamente com a terceira potência da medida da distância do ponto a um extremo. O comprimento da barra é de 4 m e a densidade linear no centro é de 2 kg/m.
22. A densidade linear em um ponto de uma barra de 5 m varia diretamente com a distância do ponto a um ponto externo à barra sobre a sua reta suporte e a 2 m de um extremo, onde a densidade é K kg/m. Ache K se a massa total da barra for 135 kg.

23. A densidade linear em qualquer ponto de uma barra com 3 m varia diretamente com a distância de um ponto a um ponto externo a ela, sobre a sua reta suporte e a 1 m de um extremo onde a densidade é 2 kg/m. Se a massa total da barra for 15 kg, ache o centro de massa da barra.

24. A medida da densidade linear em um ponto de uma barra varia diretamente com a quarta potência da medida da distância do ponto a um extremo. O comprimento da barra é de 2 m e a densidade linear é 2 kg/m no centro. Se a massa total da barra for $\frac{64}{5}$ kg, ache o centro de massa da barra.

25. Uma barra tem L cm de comprimento e o centro de massa da barra está num ponto a $\frac{3}{4}L$ do extremo esquerdo. Se a medida da densidade linear num ponto for proporcional a uma potência da medida da distância do ponto ao extremo esquerdo e a densidade linear no extremo direito for 20 g/cm, ache a densidade linear num ponto a x cm do extremo esquerdo. A massa é em gramas.

26. A massa total de uma barra com L m de comprimento é M kg e a medida da densidade linear num ponto a x m do extremo esquerdo é proporcional à medida da distância do ponto ao extremo direito. Mostre que a densidade linear em um ponto da barra a x m do extremo esquerdo é $2M(L - x)/L^2$ kg/m.

27. Uma barra tem 6 m de comprimento e sua massa é de 24 kg. Se a medida da densidade linear em qualquer ponto da barra varia diretamente com o quadrado da distância do ponto a um extremo, ache o maior valor da densidade linear.

6.5 CENTRÓIDE DE UMA REGIÃO PLANA

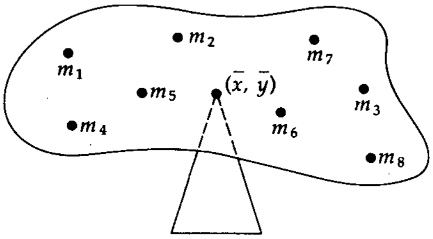


FIGURA 1

Sejam as massas de n partículas localizadas nos pontos (x_1, y_1) (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) do plano xy medidas por $m_1, m_2, \ldots, m_n$; vamos analisar o problema de encontrar o centro de massa desse sistema. Podemos imaginar as partículas sobre uma folha de peso e espessura desprezíveis e podemos supor que cada partícula tenha sua posição exatamente em um ponto. O centro de massa é o ponto onde a folha estará em equilíbrio. Consulte a Figura 1, que mostra oito partículas colocadas numa folha. A i-ésima partícula na figura será denotada por m_i que é a medida de sua massa. A folha estará em equilíbrio sobre um ponto de apoio localizado em seu centro de massa, denotado por $(\bar{x}, \bar{y})$. Para determinar o centro de massa precisamos primeiro definir o momento de massa de um sistema de partículas em relação a um eixo.

Suponhamos uma partícula a uma distância de d m de um eixo com uma massa de m kg. Se M_1 kg-m for o momento de massa da partícula em relação ao eixo, então

$$M_1 = md \tag{1}$$

Se a i-ésima partícula tendo massa m_i kg estiver localizada no ponto (x_i, y_i), sua distância ao eixo y será x_i m; assim, da fórmula (1), o momento de massa dessa partícula em relação ao eixo y é $m_i x_i$ kg-m. Analogamente, o momento de massa da partícula em relação ao eixo x é $m_i y_i$ kg-m. O momento do sistema de n partículas em relação ao eixo y é M_y kg-m, onde

$$\boxed{M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i}$$

e o momento do sistema em relação ao eixo x é M_x kg-m, onde

$$\boxed{M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i}$$

A massa total do sistema é Mkg, onde

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{n} m_i}$$

O centro de massa do sistema está no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}}$$

O ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ pode ser interceptado como o ponto tal que, se a massa total M kg do sistema estiver concentrada nele, o seu momento de massa em relação ao eixo y, M_y kg-m, seria determinado por $M_y = M\bar{x}$, e seu momento de massa em relação ao eixo x, M_x kg-m, seria determinado por $M_x = M\bar{y}$.

EXEMPLO 1 Ache o centro de massa de quatro partículas tendo massas 2, 6, 4 e 1 kg localizadas nos pontos $(5, -2)$, $(-2, 1)$, $(0, 3)$ e $(4, -1)$, respectivamente.

Solução

$$\begin{aligned} M_y &= \sum_{i=1}^{4} m_i x_i & M_x &= \sum_{i=1}^{4} m_i y_i \\ &= 2(5) + 6(-2) + 4(0) + 1(4) & &= 2(-2) + 6(1) + 4(3) + 1(-1) \\ &= 2 & &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{4} m_i \\ &= 2 + 6 + 4 + 1 = 13 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{M} & \bar{y} &= \frac{M_x}{M} \\ &= \tfrac{2}{13} & &= \tfrac{13}{13} \\ & & &= 1 \end{aligned}$$

O centro de massa está em $(\frac{2}{13}, 1)$.

Consideremos agora folhas finas com massa distribuída continuamente, por exemplo, folhas de papel ou de latão. Trataremos tais folhas como sendo bidimensionais e chamaremos tal região plana de *lâmina*. Nesta secção vamos restringir nossa discussão às lâminas homogêneas, isto é, lâminas com densidade superficial de massa(*) constante. Lâminas com densidade superficial de massa variável serão consideradas no Capítulo 18, em conexão com as aplicações de integrais múltiplas.

Suponhamos uma lâmina homogênea com área A m^2 e com massa M kg. Então, se densidade de massa por unidade de área for a constante k kg/m^2, $M = kA$. Se a lâmina homogênea for um retângulo, o seu centro de massa será definido como o centro do retângulo. Vamos usar essa definição para generalizá-la para lâminas homogêneas mais gerais.

Seja L a lâmina homogênea cuja densidade de massa por unidade de área é a constante k kg/m^2, limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas

---

*N. do T.: A densidade superficial de massa é uma função do ponto sobre a lâmina. Essa densidade é dita constante quando tem o mesmo valor para cada ponto da lâmina.

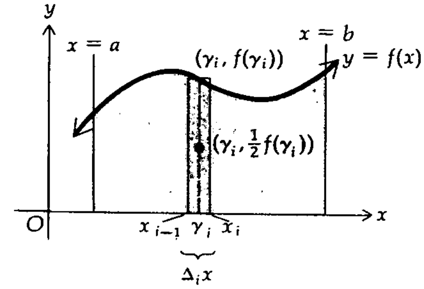

y
x = a
x = b
$(\gamma_i, f(\gamma_i))$
y = f(x)
$(\gamma_i, \frac{1}{2}f(\gamma_i))$
O
x
x_{i-1}
γ_i
x_i
$\Delta_i x$

FIGURA 2

$x = a$ e $x = b$. A função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Veja a Figura 2. Seja Δ uma partição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos. O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. O ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$ é γ_i. Associada a cada subintervalo existe uma lâmina retangular cujo comprimento, altura e densidade superficial de massa são dados por $\Delta_i x$ m, $f(\gamma_i)$ m e k kg/m², respectivamente, e cujo centro de massa está no ponto $(\gamma_i, \frac{1}{2}f(\gamma_i))$. A área da lâmina retangular é $f(\gamma_i)\ \Delta_i x$ m²; logo, $kf(\gamma_i)\ \Delta_i x$ kg é sua massa. Conseqüentemente, se $\Delta_i M_y$ kg-m é o momento de massa desse elemento retangular em relação ao eixo y,

$$\Delta_i M_y = \gamma_i k f(\gamma_i)\ \Delta_i x$$

A soma das medidas dos momentos de massa de n de tais lâminas retangulares em relação ao eixo y é dada pela soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} k\gamma_i f(\gamma_i)\ \Delta_i x$$

Definimos o *momento de massa de L em relação ao eixo y* como o limite dessa soma de Riemann quando $\|\Delta\| \to 0$. Isto está formalmente estabelecido na Definição 6.5.1.

Da mesma forma, se $\Delta_i M_x$ kg-m for o momento de massa da i-ésima lâmina retangular em relação ao eixo x,

$$\Delta_i M_x = \tfrac{1}{2} f(\gamma_i) k f(\gamma_i)\ \Delta_i x$$

e a soma das medidas dos momentos de massa de n de tais lâminas retangulares em relação ao eixo x é dada pela soma de Riemann.

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} k [f(\gamma_i)]^2\ \Delta_i x$$

O limite dessa soma de Riemann quando $\|\Delta\| \to 0$ está estabelecido na Definição 6.5.1 como o *momento de massa de L em relação ao eixo x.*

A massa da i-ésima lâmina retangular $kf(\gamma_i)\Delta_i x$ kg; então, a soma das medidas das massas de n lâminas retangulares é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} kf(\gamma_i)\ \Delta_i x$$

Na Definição 6.5.1, o limite dessa soma de Riemann está estabelecido como a *massa total de L.*

6.5.1 DEFINIÇÃO

Seja L a lâmina homogênea cuja densidade superficial de massa é a constante k kg/m², a qual é limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A função f é contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Se M_y kg-m for o **momento de massa da lâmina L, em relação ao eixo y**, então

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\gamma_i f(\gamma_i)\ \Delta_i x$$

$$= k\int_a^b x f(x)\ dx$$

Se M_x kg-m for o **momento de massa da lâmina L em relação ao eixo x**, então

$$M_x = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}k[f(\gamma_i)]^2 \, \Delta_i x$$

$$= \tfrac{1}{2}k \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Se M kg for a **massa total da lâmina L**, então

$$M = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\gamma_i) \, \Delta_i x$$

$$= k \int_a^b f(x) \, dx$$

Se $(\bar{x}, \bar{y})$ for o **centro de massa da lâmina L**, então

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} \tag{2}$$

Substituindo as expressões para M_x, M_y e M em (2), teremos

$$\bar{x} = \frac{k \int_a^b xf(x) \, dx}{k \int_a^b f(x) \, dx} \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}k \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}{k \int_a^b f(x) \, dx}$$

Dividindo ambos o numerador e o denominador por k, teremos

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x) \, dx}{\int_a^b f(x) \, dx} \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}{\int_a^b f(x) \, dx}$$

Nessas fórmulas o denominador é o número de unidades quadradas na área da região; desta forma, expressamos um problema físico em termos de um problema geométrico. Isto é, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ podem ser considerados como a abscissa e a ordenada médias, respectivamente, de uma região geométrica. Nesse caso, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ dependem somente da região, e não da massa da lâmina. Assim sendo, vamos nos referir ao centro de massa de uma região plana, em vez de falarmos em centro de massa de uma lâmina homogênea. Nesse caso, o centro de massa será chamado de *centróide* da região. Em vez de momentos de massa, vamos considerar momentos da região.

6.5.2 DEFINIÇÃO

Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A função f é contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Se M_x denotar o **momento de R em relação ao eixo x** e M_y denotar o **momento de R em relação ao eixo y**, então

$$M_x = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\gamma_i)]^2 \, \Delta_i x \qquad M_y = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f(\gamma_i) \, \Delta_i x$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \qquad = \int_a^b xf(x) \, dx$$

Se $(\bar{x}, \bar{y})$ for o **centróide** da região plana R cuja área é A unidades quadradas e M_x e M_y forem definidos como acima,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A}$$

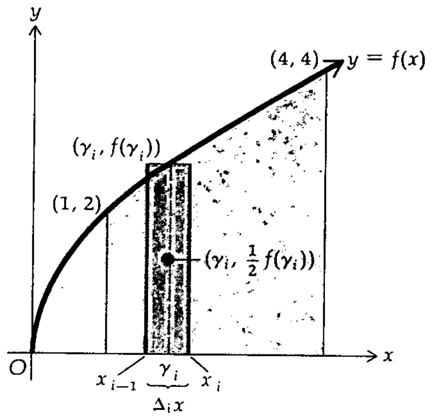


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Ache o centróide da região no primeiro quadrante limitada pela curva $y^2 = 4x$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$.

Solução Seja $f(x) = 2x^{1/2}$. A equação da curva é, então, $y = f(x)$. A Figura 3 mostra a região, bem como o i-ésimo elemento retangular. O centróide do retângulo está em $(\gamma_i, \frac{1}{2}f(\gamma_i))$. A área A unidades quadradas da região é dada por

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\,\Delta_i x \\
&= \int_1^4 f(x)\,dx \\
&= \int_1^4 2x^{1/2}\,dx \\
&= \tfrac{4}{3}x^{3/2}\Big]_1^4 \\
&= \tfrac{28}{3}
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular M_y e M_x.

$$\begin{aligned}
M_y &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f(\gamma_i)\,\Delta_i x \\
&= \int_1^4 x f(x)\,dx \\
&= \int_1^4 x(2x^{1/2})\,dx \\
&= 2\int_1^4 x^{3/2}\,dx \\
&= \tfrac{4}{5}x^{5/2}\Big]_1^4 \\
&= \tfrac{124}{5}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
M_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}f(\gamma_i) \cdot f(\gamma_i)\,\Delta_i x \\
&= \tfrac{1}{2}\int_1^4 [f(x)]^2\,dx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_1^4 4x\,dx \\
&= x^2\Big]_1^4 \\
&= 15
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{M_y}{A} & \bar{y} &= \frac{M_x}{A} \\
&= \frac{\frac{124}{5}}{\frac{28}{3}} & &= \frac{15}{\frac{28}{3}} \\
&= \tfrac{93}{35} & &= \tfrac{45}{28}
\end{aligned}$$

Assim, o centróide está no ponto $(\frac{93}{35}, \frac{45}{28})$.

No exemplo a seguir, a região é limitada por duas curvas, ao invés de uma e um eixo coordenado. O método para encontrarmos o centróide é o mesmo, mas as equações para M_x e M_y dependem das equações que definem as duas curvas. O procedimento a ser seguido está no exemplo.

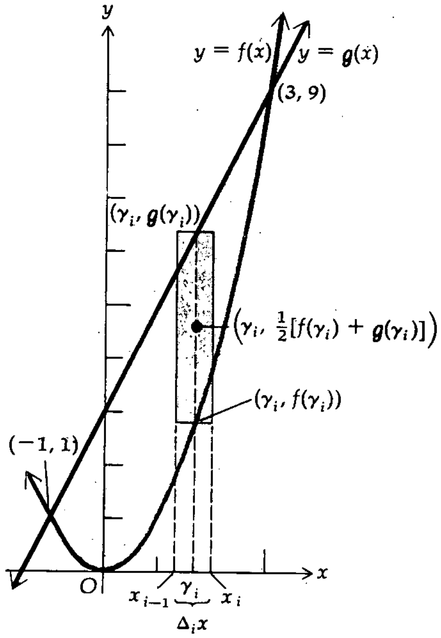


FIGURA 4

EXEMPLO 3 Ache o centróide da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2x + 3$.

Solução Os pontos de intersecção das duas curvas são $(-1, 1)$ e $(3, 9)$. A região está na Figura 4, bem como o i-ésimo elemento retangular.

Seja $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 3$. O centróide do i-ésimo elemento retangular está no ponto $(\gamma_i, \frac{1}{2}[f(\gamma_i) + g(\gamma_i)])$, onde γ_i é o ponto médio do i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A medida da área da região é dada por

$$\begin{aligned}A &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [g(\gamma_i) - f(\gamma_i)]\,\Delta_i x\\ &= \int_{-1}^{3} [g(x) - f(x)]\,dx\\ &= \int_{-1}^{3} [2x + 3 - x^2]\,dx\\ &= \tfrac{32}{3}\end{aligned}$$

Vamos calcular M_y e M_x.

$$\begin{aligned}M_y &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i[g(\gamma_i) - f(\gamma_i)]\,\Delta_i x\\ &= \int_{-1}^{3} x[g(x) - f(x)]\,dx\\ &= \int_{-1}^{3} x[2x + 3 - x^2]\,dx\\ &= \tfrac{32}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_x &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[g(\gamma_i) + f(\gamma_i)][g(\gamma_i) - f(\gamma_i)]\,\Delta_i x\\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{3} [g(x) + f(x)][g(x) - f(x)]dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{3} [2x + 3 + x^2][2x + 3 - x^2]\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{3} [4x^2 + 12x + 9 - x^4]\,dx\\ &= \tfrac{544}{15}\end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A}$$

$$= \frac{\frac{32}{3}}{\frac{32}{3}} \qquad = \frac{\frac{544}{15}}{\frac{32}{3}}$$

$$= 1 \qquad = \tfrac{17}{5}$$

Assim sendo, o centróide está no ponto $(1, \frac{17}{5})$.

6.5.3 TEOREMA Se a região plana R tiver a reta L como um eixo de simetria, o centróide de R estará em L.

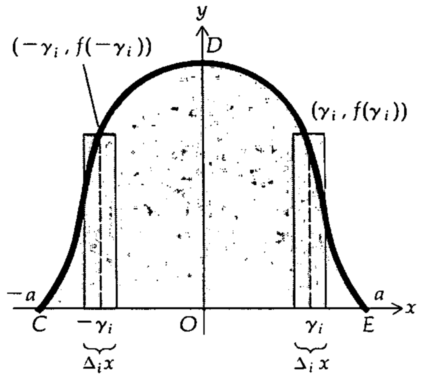


FIGURA 5

Prova Escolha os eixos coordenados de tal forma que L esteja sobre o eixo y e a origem esteja em R. A Figura 5 ilustra um exemplo desta situação. Na figura, R é a região CDE, C é o ponto $(-a, 0)$, E é $(a, 0)$ e a equação da curva CDE é $y = f(x)$.

Consideremos uma partição do intervalo $[0, a]$. Seja γ_i o ponto médio do i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. O momento em relação ao eixo y do elemento retangular com altura $f(\gamma_i)$ e comprimento $\Delta_i x$ é $\gamma_i[f(\gamma_i)\ \Delta_i x]$. Dada a simetria, para uma partição similar do intervalo $[-a, 0]$ existe um elemento correspondente tendo $-\gamma_i f(\gamma_i)\ \Delta_i x$ como seu momento em relação ao eixo y. A soma desses dois momentos é 0; logo $M_y = 0$. Como $\bar{x} = M_y/A$, concluímos que $\bar{x} = 0$. Assim o centróide da região R está no eixo y e isso é o que queríamos provar. ■

Com a aplicação do Teorema 6.5.3 torna-se mais simples encontrar o centróide de uma região plana que pode, assim, ser dividida em regiões com eixos de simetria.

EXEMPLO 4 Ache o centróide da região limitada pelo semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ e pelo eixo x.

Solução A região está na Figura 6.

Como o eixo y é um eixo de simetria, o centróide está sobre o eixo y; assim, $\bar{x} = 0$.

O momento da região em relação ao eixo x é dado por

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[\sqrt{4 - \gamma_i^2}]^2\ \Delta_i x \\ &= 2 \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^2 (4 - x^2)\, dx \\ &= 4x - \tfrac{1}{3}x^3 \Big]_0^2 \\ &= \tfrac{16}{3} \end{aligned}$$

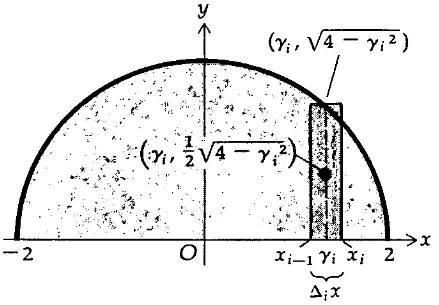

y
$(\gamma_i, \sqrt{4 - \gamma_i^2})$
$(\gamma_i, \frac{1}{2}\sqrt{4 - \gamma_i^2})$
-2
O
x_{i-1}
γ_i
x_i
2
x
$\Delta_i x$

FIGURA 6

A área da região é 2π unidades quadradas; assim,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\frac{16}{3}}{2\pi} \\ &= \frac{8}{3\pi} \end{aligned}$$

O centróide está no ponto $(0, \frac{8}{3\pi})$.

EXERCÍCIOS 6.5

1. Ache o centro de massa de três partículas tendo massas de 1, 2 e 3 kg e localizadas nos pontos $(-1, 3)$, $(2, 1)$ e $(3, -1)$, respectivamente.
2. Ache o centro de massa das quatro partículas tendo massas de 2, 3, 3 e 4 kg e localizadas nos pontos $(-1, -2)$, $(1, 3)$, $(0, 5)$ e $(2, 1)$, respectivamente.
3. A coordenada y do centro de massa de quatro partículas é 5. As partículas têm massas 2, 5, 4 e m kg e estão localizadas nos pontos $(3, 2)$, $(-1, 0)$, $(0, 20)$ e $(2, -2)$, respectivamente. Ache m.

4. Ache o centro de massa de três partículas tendo massas de 3, 7 e 2 kg localizadas nos pontos (2, 3), (−1, 4) e (0, 2), respectivamente.
5. Ache o centro de massa de três partículas de igual massa localizadas em (4, −2), (−3, 0) e (1, 5).
6. Prove que o centro de massa de três partículas com igual massa num plano está no ponto de intersecção das medianas do triângulo cujos vértices são os pontos onde estão as partículas.

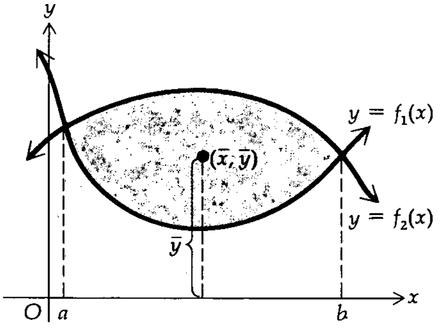
Nos Exercícios de 7 a 14, ache o centróide da região com os contornos indicados.

7. A parábola $y = 4 - x^2$ e o eixo x.
8. A parábola $x = 2y - y^2$ e o eixo y.
9. A parábola $y = x^2$ e a reta $y = 4$.
10. A parábola $y^2 = 4x$, o eixo y e a reta $y = 4$.
11. As curvas $y = x^3$ e $y = 4x$ no primeiro quadrante.
12. As retas $y = 2x + 1$, $x + y = 7$, e $x = 8$.
13. As curvas $y = x^2 - 4$ e $y = 2x - x^2$.
14. As curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.

15. Ache o centro de massa da lâmina limitada pela parábola $2y^2 = 18 - 3x$, pelo eixo y, se a densidade superficial de massa em qualquer ponto (x, y) for $\sqrt{6 - x}$ kg/m².
16. Resolva o Exercício 15 se a densidade superficial de massa em qualquer ponto (x, y) for x kg/m².
17. Se o centróide da região limitada pela parábola $y^2 = 4px$ e pela reta $x = a$ estiver no ponto $(p, 0)$, ache o valor de a.
18. Prove que a distância do centróide de um triângulo a qualquer lado do triângulo é igual a um terço da altura daquele lado.
19. Seja R a região limitada pelas curvas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ (veja a figura). Se A for a medida da área de R e $\bar{y}$ for a ordenada do centróide de R, prove que a medida do volume V do sólido de revolução obtidos ao girarmos R em torno do eixo x é dada por $V = 2\pi\bar{y}A$. Enunciando esta igualdade temos que:

Se uma região plana girar em torno de um reta em seu plano que não corta a região, então, a medida do volume do sólido de revolução gerado será igual ao produto da medida da área da região pela medida da distância percorrida pelo centróide da região.

O enunciado acima é conhecido como o *teorema de Pappus* para volumes de sólidos de revolução.



20. Use o teorema de Pappus para encontrar o volume do toro (da forma de uma câmara de ar) gerado com a revolução de um círculo com um raio de r unidades em torno de uma reta em seu plano, a uma distância de b unidades de seu centro, onde $b > r$.
21. Use o teorema de Pappus para encontrar o centróide da região limitada por um semicírculo e seu diâmetro.
22. Use o teorema de Pappus para encontrar o volume de uma esfera com um raio de r unidades.
23. Use o teorema de Pappus para encontrar o volume de um cone circular reto com raio da base r unidades e altura h unidades.
24. Seja R a região limitada pelo semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e o eixo x. Use o teorema de Pappus para encontrar o momento de R em relação à reta $y = -r$.
25. Se R for a região do Exercício 24, use o teorema de Pappus para encontrar o volume do sólido de revolução gerado com a revolução de R em torno da reta $x - y = r$. (*Sugestão*: use o resultado do Exercício 4.6 nos Exercícios 4.8.)
26. Dê um exemplo para mostrar que o centróide de uma região plana não é necessariamente um ponto dentro da região.

6.6 TRABALHO

O *trabalho* realizado por uma força atuando sobre um objeto é definido em Física como sendo "a intensidade da força vezes o deslocamento". Por exemplo, suponha que um objeto se mova ao longo do eixo x, de um ponto a até um ponto b e sobre o objeto esteja agindo uma força de F newtons na direção do movimento. Então, se o deslocamento for medido em metros, $(b - a)$ será o número de metros no deslocamento. Se W for o número de unidades do trabalho realizado pela força, W será definido por

$$\boxed{W = F(b - a)} \qquad (1)$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se W for o trabalho necessário para levantar uma massa de 70 kg a uma altura de 3 m, então

$$W = 70 \cdot 3 = 210$$

onde a aceleração foi considerada igual a 1. ◀

A unidade de medida do trabalho depende das unidades de força e distância. No sistema métrico, se a unidade de massa for medida em quilogramas e a distância for medida em metros, então a unidade de força será o *newton* e a unidade de trabalho será um newton-metro que é chamado de *joule* (J). Se a unidade de massa for o grama e a distância for medida em centímetros, então a unidade de força será a *dina* e a unidade de trabalho, uma dina-centímetro, será chamada de *erg*. Para conversão, 1 newton é 10^5 dinas e 1 joule é 10^7 ergs. No sistema inglês, onde a força é medida em libras e a distância em pés, o trabalho é medido em pés-libras.

O exemplo a seguir mostra o cálculo do trabalho.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Queremos encontrar o trabalho realizado ao levantar uma pedra com 8 kg de massa a uma altura de 4 m. Usamos a fórmula $F = Ma$, onde F newtons (N) é a força requerida para dar à massa de M kg uma aceleração de a m/s². A força, neste caso, é a força da gravidade e a aceleração é a da gravidade, que é 9,81 m/s². A massa é 8 kg. Logo, $M = 8$ e $a = 9{,}81$ e

$$\begin{aligned} F &= 8(9{,}81) \\ &= 78{,}48 \end{aligned}$$

Assim, queremos encontrar o trabalho realizado por uma força de 78,48 N e um deslocamento de 4 m. Se W J for o trabalho,

$$\begin{aligned} W &= (78{,}48)(4) \\ &= 313{,}92 \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado é de 313,92 J. ◀

Vamos considerar agora o trabalho realizado por uma força atuando, ao longo de uma reta, na direção e sentido do deslocamento. Queremos definir o que entendemos pelo termo "trabalho" neste caso.

Suponhamos que f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e $f(x)$ unidades seja a força que age na direção do movimento sobre um objeto, quando ele se move para a direita, ao longo do eixo x, de um ponto a para um ponto b. Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

O i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$; e se x_{i-1} está próximo de x_i, a força é quase constante nesse subintervalo. Se supusermos que a força será constante no i-ésimo subintervalo e se ξ_i for um ponto qualquer tal que $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, então, se $\Delta_i W$ for o número de unidades do trabalho realizado sobre o objeto quando ele se move do ponto x_{i-1} ao ponto x_i, da fórmula (1) temos que

$$\Delta_i W = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Substituindo $x_i - x_{i-1}$ por $\Delta_i x$ temos

$$\Delta_i W = f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i W = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

Quanto menor tomarmos a norma da partição Δ, maior será n e mais perto estará a soma de Riemann do que intuitivamente pensamos ser a medida do trabalho total realizado. Então, vamos definir a medida do trabalho total como o limite da soma de Riemann.

6.6.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(x)$ o número de unidades na força que age sobre um objeto situado no ponto x do eixo x. Então, se W unidades for o **trabalho** realizado pela força quando o objeto se move de a até b,

$$
\begin{aligned}
W &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \\
&= \int_a^b f(x)\, dx
\end{aligned}
$$

EXEMPLO 1 Uma partícula se move ao longo do eixo x sob a ação de uma força de $f(x)$ N, quando a partícula está a x m da origem. Se $f(x) = x^2 + 4$, ache o trabalho realizado quando a partícula se move do ponto onde $x = 2$ ao ponto onde $x = 4$.

Solução Tomamos uma partição do intervalo fechado $[2, 4]$. Se W N-m for o trabalho realizado quando a partícula se move do ponto onde $x = 2$ ao ponto onde $x = 4$, então, pela Definição 6.6.1,

$$
\begin{aligned}
W &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \\
&= \int_2^4 f(x)\, dx \\
&= \int_2^4 (x^2 + 4)\, dx \\
&= \frac{x^3}{3} + 4x \Big]_2^4 \\
&= \tfrac{64}{3} + 16 - (\tfrac{8}{3} + 8) \\
&= 26\tfrac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Logo, o trabalho realizado é $26\frac{2}{3}$ N-m.

No exemplo a seguir, usamos a **lei de Hooke**, a qual estabelece que se uma mola for esticada x unidades além do seu comprimento natural, ela tende a voltar ao normal, exercendo uma força igual a kx unidades, onde k é uma constante que depende do material empregado na fabricação da mola, de seu tamanho e das unidades mecânicas empregadas.

EXEMPLO 2 Uma mola tem um comprimento natural de 14 cm. Se uma força de 500 dinas é requerida para mantê-la esticada 2 cm além de seu tamanho natural, qual o trabalho realizado para esticá-la do seu comprimento natural até 18 cm?

Solução Coloque a mola ao longo do eixo x, com a origem no ponto onde começa o estiramento. Veja a Figura 1. Seja $f(x)$ o número de dinas na força que

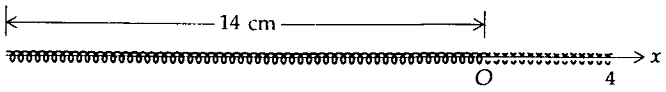


FIGURA 1

age sobre a mola para esticá-la x cm além do seu comprimento natural. Então, pela lei de Hooke,

$$f(x) = kx$$

Como $f(2) = 500$, temos

$$500 = k \cdot 2$$
$$k = 250$$

Logo,

$$f(x) = 250x$$

Como a mola está sendo esticada de 14 para 18 cm, considere uma partição do intervalo fechado $[0, 4]$ sobre o eixo x. Seja $\Delta_i x$ cm o comprimento do i-ésimo subintervalo e seja ξ_i um ponto qualquer no i-ésimo subintervalo. Se W ergs (dina-centímetros) for o trabalho realizado para esticar a mola do seu comprimento natural de 14 cm até o comprimento de 18 cm, então

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x \\ &= \int_0^4 f(x)\,dx \\ &= \int_0^4 250x\,dx \\ &= \frac{250}{2}x^2\Big]_0^4 \\ &= 2.000 \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado para esticar a mola é de 2.000 ergs.

Nos Exemplos 3 e 4 estamos interessados no peso da água. No sistema internacional a densidade de massa da água é 1.000 kg/m^3 e a aceleração da gravidade é 9,81 m/s^2. Portanto, a densidade do peso da água é (1.000) (9,81) N/m^3 = 9.810 N/m^3.

EXEMPLO 3 Um reservatório de água com a forma de um cone circular reto invertido tem 2 m de diâmetro no topo e 1,5 m de profundidade. Se a superfície da água estiver 0,5 m abaixo do topo do reservatório, ache o trabalho realizado ao se bombear a água para o topo do tanque.

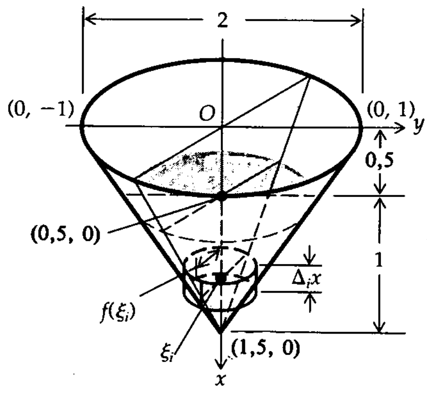


FIGURA 2

Solução Consulte a Figura 2. O eixo x positivo foi escolhido apontando para baixo, pois o movimento é vertical. Tomamos a origem no topo do reservatório. Vamos considerar uma partição do intervalo fechado $[0,5, 1,5]$ no eixo x e seja ξ_i um ponto qualquer no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Um elemento de volume é um disco circular com espessura $\Delta_i x$ m e raio $f(\xi_i)$ m, onde f é determinada por uma equação da reta que passa pelos pontos (0, 1) e (1,5, 0), com a forma $y = f(x)$. O número de metros cúbicos no volume desse elemento é dado por $\pi[f(\xi_i)]^2\,\Delta_i x$. Sendo o peso de 1 m^3 de água igual a 9.810 N, o peso do elemento será $9.810\pi[f(\xi_i)]^2\,\Delta_i x$ N, o qual é a força que atua sobre o elemento. Se x_{i-1} estiver próximo de x_i, então a distância percorrida pelo elemento será de aproximadamente ξ_i m. Assim, o trabalho realizado para bombear esse elemento ao topo do reservatório será de aproximadamente

$(9.810\pi[f(\xi_i)]^2\,\Delta_i x)\,\xi_i$ J. Assim, se W for o número de joules do trabalho total realizado,

$$
\begin{aligned}
W &= \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 9.810\pi[f(\xi_i)]^2\,\Delta_i x \\
&= 9.810\pi \int_{0,5}^{1,5} [f(x)]^2\, x\, dx
\end{aligned}
$$

Para determinar $f(x)$ vamos encontrar uma equação da reta que passe pelos pontos (0, 1) e (1,5, 0), usando a forma intercepta:

$$
y = \frac{0-1}{1,5-0}x + 1 \Leftrightarrow y = -\tfrac{2}{3}x + 1
$$

Logo, $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ e

$$
\begin{aligned}
W &= 9.810\pi \int_{0,5}^{1,5} (-\tfrac{2}{3}x + 1)^2 x\, dx \\
&= 9.810\pi \int_{0,5}^{1,5} (\tfrac{4}{9}x^3 - \tfrac{4}{3}x^2 + x)\, dx \\
&= 9.810\pi \left[\tfrac{1}{9}x^4 - \tfrac{4}{9}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 \right]_{0,5}^{1,5} \\
&= 1.090\pi
\end{aligned}
$$

Assim, o trabalho realizado é de 1.090π J.

EXEMPLO 4 Uma caixa d'água está sendo içada. Enquanto sobe há um vazamento constante de 0,18 m³ a cada metro percorrido. Se o peso da caixa for de 900 kg e se originalmente ela contém 27 m³ de água, ache o trabalho realizado quando a caixa atingir 6 metros de altura.

Solução Veja a Figura 3. A origem O foi colocada no ponto de partida na base da caixa e o eixo x é vertical e orientado para cima segundo a direção e o sentido do movimento a partir de O. Consideremos uma partição do intervalo fechado [0, 6] no eixo x. Seja ξ_i um ponto qualquer no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Quando a base da caixa estiver em ξ_i, haverá na caixa $(27 - 0,18\,\xi_i)$ m³ de água. Supondo que o peso de 1 m³ de água é de aproximadamente 1.050 N, então o peso da caixa e seu conteúdo em ξ_i será $[900 + 1.050\,(27 - 0,18\,\xi_i)]$ ou, equivalentemente, $(29.250 - 189\,\xi_i)$ N, que é a força que age sobre a caixa. O trabalho realizado ao içar a caixa através do i-ésimo subintervalo é de aproximadamente $(29.250 - 189\,\xi_i)\,\Delta_i x$ joules. O termo "aproximadamente" foi usado pois estamos supondo a quantidade de água na caixa em todo o subintervalo. Se W joules for o trabalho total realizado ao elevar a caixa até os 6 m,

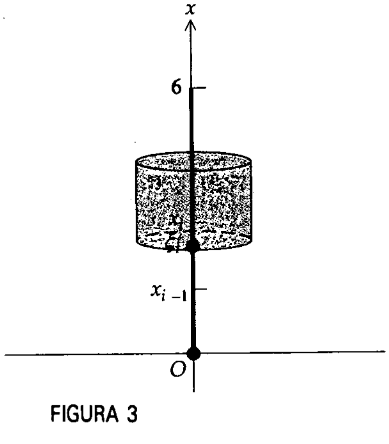


FIGURA 3

$$
\begin{aligned}
W &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (29.250 - 189\,\xi_i)\,\Delta_i x \\
&= \int_0^6 (29.250 - 189x)\, dx \\
&= 29.250\,x - \tfrac{189}{2}x^2 \Big]_0^6 \\
&= 172.098
\end{aligned}
$$

Assim, o trabalho realizado é de 172.098 joules.

EXERCÍCIOS 6.6

Nos Exercícios 1 e 2, uma partícula se move ao longo do eixo x sob a ação de uma força de f(x) N quando a partícula está a x m da origem. Ache o trabalho realizado quando a partícula se move do ponto onde x = a até o ponto onde x = b.

1. $f(x) = (2x + 1)^2$; $a = 1$; $b = 3$
2. $f(x) = x^2\sqrt{x^3 + 1}$; $a = 0$; $b = 2$

Nos Exercícios 3 e 4, uma partícula se move ao longo do eixo x sob a ação de uma força de f(x) dinas, quando a partícula está a x cm da origem. Ache o trabalho realizado quando a partícula se move do ponto onde x = a até o ponto onde x = b.

3. $f(x) = x\sqrt{x + 1}$; $a = 3$; $b = 8$
4. $f(x) = (4x - 1)^2$; $a = 1$; $b = 4$

5. Um objeto se move ao longo do eixo x sob a ação de uma força de $f(x)$ dinas quando o objeto está a x cm da origem. Se 96 ergs for o trabalho realizado ao mover o objeto da origem até o ponto onde $x = K$ e $f(x) = 2x - 3$, ache K se $K > 0$.
6. Resolva o Exercício 5, se 90 ergs for o trabalho realizado e $f(x) = 4x - 3$.
7. Uma mola tem um comprimento natural de 8 cm. Se uma força de 20 dinas estica a mola em $\frac{1}{2}$cm a mais, ache o trabalho realizado ao esticar a mola de 8 para 11 cm.
8. Uma mola tem um comprimento natural de 10 cm e uma força de 30 dinas a estica até $11\frac{1}{2}$cm. (a) Ache o trabalho realizado ao esticar a mola de 10 para 12 cm. (b) Ache o trabalho realizado ao esticar a mola de 12 para 14 cm.
9. Uma força de 8 N estica uma mola, cujo comprimento natural é 4 m, em 50 cm. Ache o trabalho realizado ao esticar a mola de seu comprimento natural até 5 m.
10. Uma força de 500 dinas estica uma mola de seu comprimento natural de 20 cm, até um comprimento de 24 cm. Ache o trabalho realizado ao esticar a mola de seu comprimento natural até 28 cm.
11. Uma mola tem um comprimento natural de 12 cm. Uma força de 600 dinas comprime a mola para 10 cm. Ache o trabalho realizado ao comprimir a mola de 12 para 9 cm. A lei de Hooke é válida para compressão, da mesma forma que para extensão.
12. Uma mola tem um comprimento natural de 6 cm. Uma força de 1.200 dinas a comprime para $5\frac{1}{2}$cm. Ache o trabalho realizado ao comprimir a mola de 6 para $4\frac{1}{2}$cm.
13. Um tanque cheio com água tem a forma de um paralelepípedo retangular com 5 m de profundidade por 15 m de largura e por 25 m de comprimento. Ache o trabalho necessário para bombear a água no tanque a um nível de 1 m acima da supefície do tanque.
14. Uma tina cheia de água tem 10 m de comprimento e sua secção transversal tem a forma de um triângulo isósceles com 2 m de largura em cima e 2 m de altura. Qual o trabalho realizado para se bombear a água para fora da tina, por cima da borda do tanque?
15. Um tanque com a forma de um hemisfério está colocado de forma que a borda seja uma região circular de raio 6 m e tem água com uma profundidade de 4 m. Ache o trabalho realizado ao se bombear a água para a borda do tanque.
16. Um tanque cilíndrico circular reto com uma profundidade de 360 cm e um raio de 120 cm está cheio até a metade, com óleo pesando 1,2 g/cm^3. Ache o trabalho realizado para se bombear o óleo a uma altura de 180 cm acima do tanque.
17. Uma corda com 60 m e pesando 6 kg/m está pendurada verticalmente na parede de um poço. Se um peso de 45 kg for levantado pela corda, ache o trabalho realizado ao se puxar a corda e o peso para cima do poço.
18. Um balde com 20 kg contém 60 kg de areia e é pendurado no extremo de uma corrente com 100 m e com 10 kg que está dependurada à beira de um poço profundo. Ache o trabalho realizado ao levantar o balde até a beira do poço.
19. Resolva o Exercício 18, se a areia está vazando do balde a uma taxa constante e se no momento em que o balde chega à beira do poço, toda a areia vazou dele.
20. Enquanto um saco de farinha está sendo levantado a uma altura de 3 m, a farinha vaza segundo uma taxa tal que o número de quilos perdidos seja diretamente proporcional à raiz quadrada da distância percorrida. Se o saco continha originalmente 27 kg de farinha e se perde um total de 5 kg ao percorrer os 3 m ache o trabalho realizado para se levantar o saco.
21. Um tanque cilíndrico circular reto com uma profundidade de 10 m e um raio de 5 m está cheio de água até a metade. Ache o trabalho necessário para que a água seja bombeada até a borda do tanque.
22. Um tanque na forma de um cone circular reto invertido tem 8 m de diâmetro na borda e 10 m de profundidade. Se o tanque estiver cheio de água até uma altura de 9 m, ache o trabalho realizado ao bombear a água até a sua borda.
23. Se o tanque do Exercício 22 estiver cheio até uma altura de 8 m, com óleo pesando 950 kg/m^3, ache o trabalho realizado para que o óleo seja bombeado até a borda. (*Sugestão*: o número de newtons da força necessária para erguer um elemento é o produto do número de quilogramas de massa (o mesmo que o número de quilogramas de peso) e 9,81, o número de metros por segundo ao quadrado na aceleração devido à gravidade.)
24. Se, no Exercício 22, somente a metade da água deve ser bombeada para cima do tanque, ache o trabalho.
25. Um motor com 1 cavalo motor (hp) pode fazer 8.250 N de trabalho por segundo. Se um motor com 0,1 hp for usado para bombear água de um tanque cheio com a forma de um paralelepípedo retangular com 6 m de profundidade, 6 m de largura e 18 m de comprimento para um ponto 15 m acima da borda do tanque, quanto tempo irá levar?
26. Um meteorito está a a km do centro da Terra e cai sobre a sua superfície. A força da gravidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância de um corpo ao centro da

Terra: Ache o trabalho realizado pela gravidade se a massa do meteorito for w kg. Seja R km o raio da Terra e g m/s^2 a aceleração da gravidade.

27. Um tanque tem a forma de um paralelepípedo retangular com 6 m de profundidade, 4 m de largura e 2 m de comprimento e está cheio de óleo pesando 50 kg/m^3. Quando um terço do trabalho necessário para bombear o óleo para a borda do tanque foi realizado, ache o quanto baixou a superfície de óleo.

28. Um tanque cilíndrico com 3 m de altura e 1,5 m de raio está sobre uma plataforma a 15 m de altura. Ache a profundidade da água quando foi a metade do trabalho necessário para encher o tanque realizada através de um cano que vai do nível do solo à base do tanque.

6.7 PRESSÃO LÍQUIDA (*Suplementar*)

A integral definida também é aplicada em Física para encontrarmos a força decorrente da pressão líquida sobre uma placa submersa no líquido ou a pressão exercida pelo líquido sobre as paredes laterais do recipiente que o contém. Vamos supor inicialmente que uma placa plana seja colocada horizontalmente no recipiente com o líquido. O peso do líquido exerce uma força sobre a placa. A força por unidade quadrada de área exercida pelo líquido sobre a placa é chamada de **pressão** do líquido.

Seja ρ a densidade de massa do líquido e h m a profundidade de um ponto abaixo da superfície do líquido. Se P N/m^2 for a pressão exercida pelo líquido num ponto, então

$$P = \rho g h \qquad (1)$$

onde g é a medida da aceleração da gravidade.

Se A m^2 for a área de uma placa plana que está submersa horizontalmente em um líquido e F N for a força exercida pela pressão do líquido na face superior da placa, então

$$F = PA$$

Substituindo (1) na expressão acima, obtemos

$$F = \rho g h A$$

De (1) segue que o tamanho do recipiente não interfere na pressão líquida. Por exemplo, a uma profundidade de 2 m numa piscina cheia com água salgada, a pressão será a mesma que numa profundidade de 2 m no oceano, supondo que a densidade seja a mesma.

► **ILUSTRAÇÃO 1** Uma folha de latão com 2 m × 4 m é submersa num tanque com água a uma profundidade de 3 m. Se P N/m^2 for a pressão exercida pela água num ponto da face superior da folha,

$$P = 3\rho g$$

A área da folha é 8 m^2. Assim se F N for a força exercida pela pressão líquida na face superior da folha,

$$F = 8P$$

Substituindo P por $3\rho g$, obtemos

$$F = 24\rho g$$

Tomando $g = 9{,}81$ e $\rho = 1.000$ temos $g\rho = 9.810$. Então, $F = 235.440$ N. Logo, a força decorrente da pressão da água sobre a superfície superior da folha é de 235.440 N. ◄

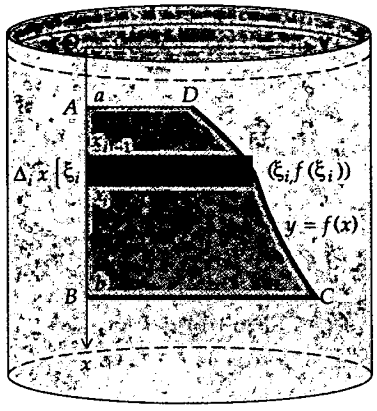


FIGURA 1

Vamos supor agora que a placa seja submersa verticalmente no líquido. Então, em pontos da placa em profundidades diferentes a pressão, calculada por (1), será diferente e maior embaixo da placa do que em cima dela. Vamos, na seqüência, definir a força causada pela pressão líquida quando a placa estiver submersa verticalmente no líquido. Usaremos o princípio de Pascal. Em qualquer ponto de um líquido, a pressão será a mesma em todas as direções.

Na Figura 1, seja *ABCD* a região limitada pelo eixo x, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e pela curva $y = f(x)$, onde a função f é contínua e $f(x) \geqslant 0$ no intervalo fechado $[a, b]$. Vamos tomar os eixos coordenados de tal forma que o eixo y esteja ao longo da superfície do líquido. O eixo x será tomado na vertical, apontando para baixo. O comprimento da placa em x m de profundidade é dado por $f(x)$ m.

Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$ que divide o intervalo em n subintervalos. Tome um ponto ξ_i no i-ésimo subintervalo com $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. Trace n retângulos horizontais. O i-ésimo retângulo tem um comprimento de $f(\xi_i)$ m e uma largura de $\Delta_i x$ m (veja a Figura 1).

Se girarmos cada elemento retangular de um ângulo de 90°, cada elemento transformar-se-á numa placa submersa no líquido a uma profundidade de ξ_i m, abaixo da supefície do líquido e perpendicular à região *ABCD*. Então, a força sobre o i-ésimo elemento retangular é dada por $\rho g \xi_i f(\xi_i)\, \Delta_i x$ N. Uma aproximação de F, o número de N da força total na placa vertical, é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} \rho g \xi_i f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

que é uma soma de Riemann. Quanto menor tomarmos $\|\Delta\|$, maior será n e melhor será a aproximação dada pela soma de Riemann do que entendemos ser a medida da força total. Temos, então, a definição a seguir.

6.7.1 DEFINIÇÃO

Suponhamos que uma placa seja submersa verticalmente em um líquido com densidade de massa ρ. O comprimento da placa a uma profundidade de x unidades abaixo da superfície do líquido é $f(x)$ unidades, onde f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$ em $[a, b]$. Então F, o número de newtons da **força causada pela pressão líquida** na placa, é dado por

$$F = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=0}^{n} \rho g \xi_i f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

$$= \int_a^b \rho g x f(x)\, dx \qquad (2)$$

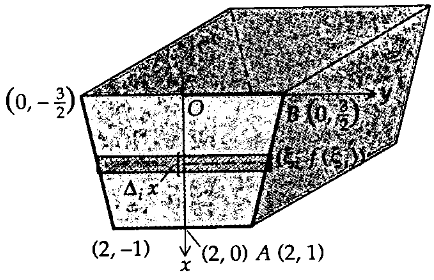


FIGURA 2

EXEMPLO 1 Uma tina com uma secção transversal trapezoidal está cheia de água. Se o trapézio tiver 3 m de largura em cima, 2 m embaixo e 2 m de profundidade, ache a força total decorrente da pressão em um extremo da tina.

Solução A Figura 2 apresenta um extremo da tina e um elemento retangular de área. Uma equação da reta AB é $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x$, $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x$. Se girarmos o elemento retangular em 90°, a força sobre o elemento será dada por $2\rho g \xi_i f(\xi_i)\, \Delta_i x$ N. Se F for o número de newtons na força total sobre o lado da tina,

$$
\begin{aligned}
F &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\rho g \xi_i f(\xi_i)\, \Delta_i x \\
&= 2\rho g \int_0^2 x f(x)\, dx \\
&= 2\rho g \int_0^2 x(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{4}x)\, dx \\
&= 2\rho g \Big[\tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{1}{12}x^3\Big]_0^2 \\
&= \tfrac{14}{3}\rho g
\end{aligned}
$$

Tomando $\rho g = 9.810$ N/m^3, determinamos que a força total é de 45.780 N.

EXEMPLO 2 Os extremos de uma tina são regiões semicirculares, cada uma com um raio de 2 m. Ache a força causada pela pressão líquida sobre um extremo, se a tina estiver cheia de água.

Solução A Figura 3 mostra um extremo da tina e um elemento retangular de área. Uma equação do semicírculo é $x^2 + y^2 = 4$. Resolvendo em y, obtemos $y = \sqrt{4 - x^2}$. A força sobre o elemento retangular é dada por $2\rho g \xi_i \sqrt{4 - \xi_i^2}\, \Delta_i x$. Assim, se F N for a força total num extremo da tira,

$$
\begin{aligned}
F &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\rho g \xi_i \sqrt{4 - \xi_i^2}\, \Delta_i x \\
&= 2\rho g \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\, dx \\
&= -\tfrac{2}{3}\rho g (4 - x^2)^{3/2} \Big]_0^2 \\
&= \tfrac{16}{3}\rho g
\end{aligned}
$$

Com $\rho g = 9.810$ N/m^3, a força total é de 52.320 N.

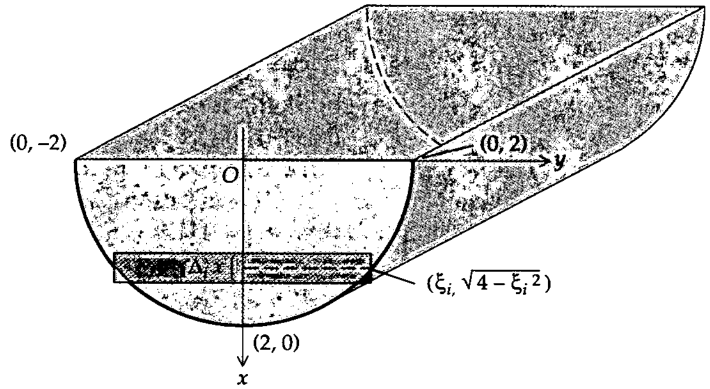


FIGURA 3

Existe uma relação útil entre a força causada pela pressão líquida sobre uma região plana e a localização do centróide da região. Consulte a Figura 1 onde $ABCD$ é a região limitada pelo eixo x, pelas retas $x = a$ e $x = b$, e pela curva $y = f(x)$, em que f é contínua e $f(x) \geqslant 0$ no intervalo fechado $[a, b]$. Vamos considerar $ABCD$ como uma placa vertical imersa em um líquido tendo densidade de massa ρ. Se FN for a força decorrente da pressão do líquido sobre a placa vertical, de (2), segue que

$$F = \rho g \int_a^b xf(x)\,dx \tag{3}$$

Se $\bar{x}$ for a abscissa do centróide da região $ABCD$, então $\bar{x} = M_y/A$. Como $M_y = \int_a^b xf(x)\,dx$,

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{A}$$

$$\int_a^b xf(x)\,dx = \bar{x}A$$

Substituindo essa expressão em (3), obtemos

$$F = \rho g \bar{x} A \tag{4}$$

De (4), segue que a força total decorrente da pressão do líquido contra uma região vertical plana é igual à força que agiria sobre uma região horizontal, a uma profundidade de $\bar{x}$ unidades abaixo da superfície do líquido.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Consideremos uma tina cheia de água, tendo por extremidades regiões semicirculares, cada uma com um raio de 2 m. Usando o resultado do Exemplo 4 da Secção 6.5, verificamos que o centróide da região está a uma profundidade de $8/(3\pi)$ m. Logo, usando (4) vemos que se F N for a força num extremo da tina,

$$\begin{aligned} F &= \rho g \frac{8}{3\pi} \cdot 2\pi \\ &= \frac{16}{3} \rho g \end{aligned}$$

O que está de acordo com o resultado encontrado no Exemplo 2. ◀

Para várias regiões planas, o seu centróide pode ser encontrado em uma tabela. Quando ambos, a área da região e o seu centróide, puderem ser obtidos diretamente, (4) será fácil de aplicar, sendo usada em tais casos pelos engenheiros para encontrar a força causada pela pressão do líquido.

No exemplo a seguir, usaremos unidades do SI, onde $g = 9{,}81$ m/s² e para água $\rho = 1.000$; assim, $\rho g = 9.810$.

EXEMPLO 3 Um recipiente com a forma de um cilindro circular reto, tendo um raio da base com 3 m, está sobre o seu lado na base de um tanque cheio de água. A profundidade do tanque é de 13 m. Ache a força total sobre um extremo do recipiente, devido à pressão da água.

Solução A Figura 4 mostra um extremo do recipiente no tanque e um elemento de área. O sistema de coordenadas foi escolhido de tal forma que a origem esteja no centro do círculo. Uma equação do círculo é $x^2 + y^2 = 9$. Resolvendo em x, obtemos $x = \sqrt{9 - y^2}$. A força sobre o elemento retangular é dada por

$$\rho g(10 - \xi_i)[2\sqrt{9 - \xi_i^2}]\,\Delta_i y$$

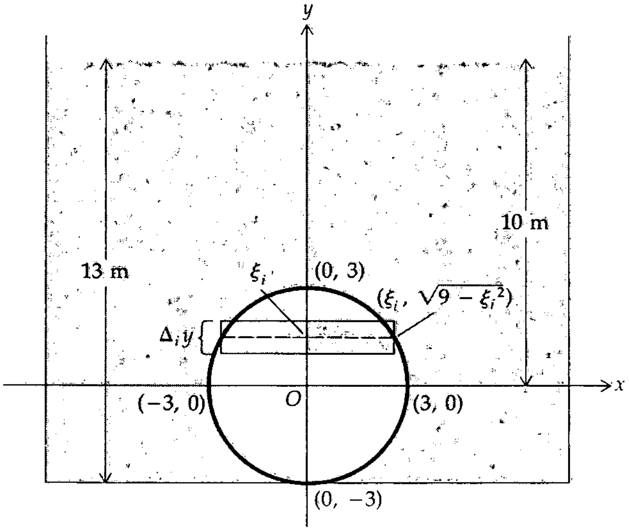


FIGURA 4

Assim, se F N for a fôrça total num extremo do recipiente,

$$F = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho g(10 - \xi_i)\left[2\sqrt{9 - \xi_i^2}\right] \Delta_i y$$

$$= 2\rho g \int_{-3}^{3} (10 - y)\sqrt{9 - y^2}\, dy$$

Como $\rho g = 9.810$, temos

$$F = 196.200 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\, dy - 19.620 \int_{-3}^{3} y\sqrt{9 - y^2}\, dy \tag{5}$$

Para o cálculo de $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\, dy$, faz-se necessária uma técnica da integração que será aprendida na Secção 9.4. No momento, determinamos o seu valor, considerando-a como a medida da área da região encerrada por um semicírculo de raio 3. Portanto,

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\, dy = \tfrac{9}{2}\pi$$

Substituindo esse valor em (5) e calculando a segunda integral, temos

$$F = 196.200(\tfrac{9}{2}\pi) + 19.620\left[\tfrac{1}{3}(9 - y^2)^{3/2}\right]_{-3}^{3}$$

$$= 882.900\pi$$

Assim sendo, a força total é 882.900π N.

EXERCÍCIOS 6.7

1. Uma placa retangular é submersa verticalmente em um tanque, de forma que o lado de cima esteja na superfície da água. Se o comprimento da placa for de 10 cm e a profundidade for de 8 cm, ache a força devido à pressão do líquido sobre um lado da placa.

2. Uma placa quadrada com 1 m de lado é submersa verticalmente num tanque com água e seu centro está a 0,6 m abaixo da superfície. Ache a força decorrente da pressão do líquido sobre um lado da placa.

3. Resolva o Exercício 2, se o centro da placa estiver a 1 m abaixo da superfície.
4. Uma placa com a forma de um triângulo retângulo isósceles é submersa verticalmente num tanque com água, com um cateto na superfície. Os catetos medem 6 cm cada. Ache a força decorrente da pressão do líquido sobre um lado da placa.
5. Um tanque retangular cheio de água tem 60 cm de largura e 46 cm de profundidade. Ache a força decorrente da pressão do líquido sobre um extremo do tanque.
6. Os extremos de uma tina são triângulos eqüiláteros com lados que medem 60 cm. Se a água na tina tiver 30 cm de profundidade, ache a força devido à pressão do líquido em um extremo.
7. A face da comporta de uma barragem tem a forma de um triângulo isósceles com 4 m de largura no topo e 3 m de altura. Se a parte superior da comporta está 15 m abaixo da superfície da água, ache a força total devido à pressão da água sobre a comporta.
8. A face da comporta de uma barragem é vertical e tem a forma de um trapézio isósceles com 3 m no topo, 4 m na base e 3 m de altura. Se a base superior está a 20 m abaixo da superfície da água, ache a força total devido à pressão da água sobre a comporta.
9. A face de um reservatório é vertical e tem a forma de um triângulo isósceles com 250 m de largura no topo e 100 m de altura no centro. Se a água está com 10 m de profundidade no centro, ache a força total sobre o reservatório devido à pressão da água.
10. Um tanque de óleo tem a forma de um cilindro circular reto com 4 m de diâmetro e seu eixo é horizontal. Se o tanque estiver cheio até a metade com óleo cuja densidade volumétrica de massa é 750 kg/m^3, ache a força total num extremo, devido à pressão do líquido.
11. Um tanque de óleo tem a forma de um cilindro circular reto com um raio de r m e seu eixo é horizontal. Se o tanque estiver cheio de óleo com uma densidade de 750 kg/m^3, ache r, se a força total em uma extremidade do tanque decorrente da pressão for 80.000 N.
12. Resolva o Exercício 4 usando (4).
13. Resolva o Exercício 5 usando (4).
14. Resolva o Exercício 6 usando (4).
15. A face de um reservatório adjacente à água é vertical e tem a forma de um trapézio isósceles com 90 m no topo e 60 m na base e uma altura de 20 m. Use (4), para encontrar a força total decorrente da pressão da água na face do reservatório.
16. Uma placa semicircular com um raio de 3 m está submersa verticalmente num tanque de água com o diâmetro na superfície. Use (4) para encontrar a força total decorrente da pressão da água sobre um lado da placa.
17. Ache o momento em torno da base mais baixa do trapézio da força do Exercício 15.
18. Uma placa com a forma da região limitada pela parábola $x^2 = 6y$ e pela reta $2y = 3$ é colocada num tanque com água com o vértice para baixo e a reta na superfície da água. Ache a força total decorrente da pressão da água sobre um lado da placa, se a distância for medida em metros.
19. Um tanque cilíndrico está cheio até a metade com gasolina cuja densidade é 721 kg/m^3. Se o eixo é horizontal e o diâmetro é de 6 m, ache a força decorrente da pressão do líquido sobre um extremo.
20. Se o extremo de um reservatório de água tiver a forma de um retângulo e o reservatório estiver cheio, mostre que a medida da força em decorrência da pressão da água sobre o extremo é o produto da medida da área do extremo pela medida da força em seu centro geométrico.
21. A base de uma piscina é um plano inclinado. A piscina tem 2 m de profundidade em um extremo e 8 m no outro. Se a largura da piscina for 25 m e o comprimento for 40 m, ache a força total em decorrência da pressão da água no fundo.
22. A face de um reservatório adjacente à água é inclinada 45° em relação à vertical. A face é um retângulo com 80 m de comprimento e um lado inclinado de 40 m. Se o reservatório está cheio, ache a força total sobre a face, em decorrência da pressão da água.
23. A face de um reservatório adjacente à água é inclinada 30° em relação à vertical. A face é um retângulo com 50 m de comprimento e um lado inclinado com 30 m. Se o reservatório está cheio, ache a força total sobre a face em decorrência da pressão da água.
24. Resolva o Exercício 23 no caso em que a face do reservatório é um trapézio isósceles com 120 m de base maior no topo e 80 m de base menor e a distância entre as bases é de 40 m.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 6

1. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x da região limitada pela curva $y = x^4$, a reta $x = 1$ e o eixo x.
2. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 1 em torno do eixo y.
3. A região limitada pela curva $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, pela reta $x = \frac{1}{2}\pi$ e pelo eixo x gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.
4. A região limitada pela curva $x = \sqrt{\cos y}$, pela reta $y = \frac{1}{6}\pi$ e pelo eixo y, onde $\frac{1}{6}\pi \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\pi$, gira em torno do eixo y. Ache o volume do sólido gerado.
5. A região limitada pela curva $y = x \operatorname{cosec} x$, pelo eixo x e pelas retas $x = \frac{1}{4}\pi$ e $x = \frac{1}{2}\pi$ gira e torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.
6. A região no primeiro quadrante, limitada pelas curvas $x = y^2$ e $x = y^4$ gira em torno do eixo y. Ache o volume do sólido gerado.
7. Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo y da região limitada pela parábola $x = y^2 + 2$ e pela reta $x = y + 8$.
8. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela parábola $y^2 = x$, pelo eixo x e pela reta $x = 4$ em

torno da reta $x = 4$. Tome os elementos de área paralelos ao eixo de revolução.

9. A base de um sólido é a região limitada pela parábola $y^2 = 8x$ e a reta $x = 8$. Ache o volume do sólido, se toda secção plana perpendicular ao eixo da base for um quadrado.

10. A base do sólido é a região encerrada por um círculo tendo um raio de r unidades, e toda a secção plana perpendicular a um diâmetro fixo da base é um quadrado cuja diagonal é uma corda do círculo. Ache o volume do sólido descrito.

11. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = |x - 2|$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$ em torno do eixo x.

12. Use integração para encontrar o volume de um segmento de uma esfera, se ela tiver um raio de r unidades e se a altura do segmento for h unidades.

13. Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $y = -1$ da região acima do eixo x limitada pela reta $2y = x + 3$ e pelas curvas $y^2 + x = 0$, $y^2 - 4x = 0$ de $x = -1$ a $x = 1$.

14. Ache o comprimento do arco da curva $ay^2 = x^3$ da origem ao ponto $(4a, 8a)$.

15. Ache o comprimento do arco da curva $6y^2 = x(x - 2)^2$ do ponto $(2, 0)$ ao ponto $(8, 4\sqrt{3})$.

16. Uma esfera de raio 10 cm é interceptada por dois planos paralelos do mesmo lado do centro da esfera. A distância do centro da esfera a um dos planos é 1 cm e a distância entre os planos é 6 cm. Ache o volume da porção sólida da esfera entre os dois planos.

17. Resolva o Exercício 16, se os dois planos estiverem em lados opostos em relação ao centro da esfera, mas todos os demais permanecerem os mesmos.

18. Um sólido é formado pela rotação em torno do eixo y, da região limitada pela curva $y^3 = x$, pelo eixo x e pela reta $x = c$, onde $c > 0$. Para que valores de c o volume do sólido é de 12π unidades cúbicas?

19. Ache o comprimento do arco da curva $9x^{2/3} + 4y^{2/3} = 36$ no segundo quadrante do ponto onde $x = -1$ ao ponto onde $x = -\frac{1}{8}$.

20. Ache o comprimento do arco da curva $3y = (x^2 - 2)^{3/2}$ do ponto onde $x = 3$ ao ponto onde $x = 6$.

21. Três partículas com massas 4, 2 e 7 kg estão no eixo x, nos pontos com coordenadas -5, 4 e 2 respectivamente, onde a distância é medida em metros. Ache o centro de massa do sistema.

22. Três partículas tendo massas 5, 2 e 8 g estão localizadas, respectivamente, nos pontos $(-1, 3)$, $(2, -1)$ e $(5, 2)$. Ache o centro de massa sendo a distância medida em cm.

23. Ache as coordenadas do centro de massa de quatro partículas com igual massa localizadas nos pontos $(3, 0)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$ e $(-1, 2)$.

24. Três partículas, com igual massa, estão localizadas sobre o eixo x em pontos tendo coordenadas -4, 1 e 5, onde a distância é medida em metros. Ache as coordenadas do centro de massa do sistema.

25. O comprimento de uma barra é 8 m e a densidade linear da barra num ponto $2\,x$ m do extremo esquerdo é $2\sqrt{x + 1}$ kg/m. Ache a massa total da barra e seu centro de massa.

26. O comprimento de uma barra é de 4 m e a densidade linear da barra num ponto a x m do extremo esquerdo é $(3x + 1)$ kg/m. Ache a massa total da barra e o centro de massa.

27. Ache o centróide da região no primeiro quadrante, limitada pelos eixos coordenados e pela parábola $y = 9 - x^2$.

28. Ache o centróide da região limitada pela parábola $y^2 = x$ e pela reta $y = x - 2$.

29. Ache o centróide da região limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.

30. Ache o centróide da região limitada acima pela parábola $4x^2 = 36 - 9y$ e abaixo pelo eixo x.

31. Use o teorema de Pappus para encontrar o volume da esfera de raio 4 m.

32. Use o teorema de Pappus para encontrar o volume de um cone circular reto com 2 m de raio da base e 3 m de altura.

33. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico de $y = 2x - \frac{1}{6}x^3$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$.

34. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = 2$, da região do Exercício 33.

35. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = 3$, da região limitada por aquela reta, pelo eixo x e pelo gráfico $y = 9x - \frac{1}{12}x^4$.

36. Uma força de 2205,0 N é necessária para comprimir uma mola de 25 cm até 22 cm. Ache o trabalho realizado ao comprimir a mola até 20 cm.

37. Uma força de 600 dinas estica uma mola de seu comprimento natural de 30 cm até 35 cm. Ache o trabalho realizado ao esticar a mola de seu comprimento natural até 40 cm.

38. Uma tina cheia de água tem 2 m de comprimento e sua secção transversal tem a forma de um semicírculo com um diâmetro de 0,6 m no topo. Qual o trabalho necessário para bombear a água da tina pela borda?

39. Um cabo com 20 m e com uma densidade linear de massa de 2 kg/m está dependurado na vertical. Ache o trabalho feito ao levantar todo o cabo.

40. O trabalho necessário para esticar uma mola de 22 cm até 25 cm é $\frac{3}{2}$ vezes o trabalho necessário para esticar a mola de 20 para 22 cm. Qual o comprimento natural da mola?

41. Um tanque cheio de água tem a forma de um paralelepípedo retangular com 30 m de comprimento, 15 m de largura e uma profundidade de 4 m. Ache o trabalho necessário para bombear a água no tanque a um nível de 50 cm acima da borda do tanque.

42. Um tanque com a forma de um hemisfério, tendo um diâmetro de 10 m, está cheio com água até uma profundidade de 3 m. Ache o trabalho realizado ao bombear a água até a borda do tanque.

43. Um tanque com a forma de um hemisfério tem sobre si um cilindro circular reto. O raio de ambos, o hemisfério e o cilindro, é 4 m e a altura do cilindro é de 8 m. Se o tanque estiver cheio de água, ache o trabalho necessário para esvaziar o tanque bombeando a água através de uma abertura na borda do tanque. Tome a aceleração da gravidade como sendo 10 m/s^2.

44. Um recipiente tem a forma e as dimensões de um sólido de revolução descrito pela rotação da região no primeiro quadrante, limitada pela parábola $x^2 = 4py$, pelo eixo y e pela reta $y = p$, em torno do eixo y. Se o recipiente estiver cheio de água, ache o trabalho realizado para se bombear toda a água até um ponto $3p$ m acima da borda do recipiente. Tome a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2.

45. A superfície de um tanque é igual a de um parabolóide de revolução obtido girando-se a parábola $y = x^2$ em torno do eixo y. O vértice da parábola está na base do tanque, que tem 3,6 m de altura. Se o tanque estiver cheio com água até 2 m de profundidade, ache o trabalho realizado para bombear a água para fora do tanque, pela borda de cima. Tome a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2.

46. Uma cunha é cortada de um cilindro circular reto com um raio de r unidades por dois planos, um perpendicular ao eixo do cilindro e o outro interceptando o primeiro ao longo de um diâmetro da secção plana circular com um ângulo de 30°. Ache o volume da cunha.

47. A torre de uma igreja tem 30 m de altura e toda secção horizontal plana é um quadrado, sendo o comprimento dos lados igual à um décimo da distância da secção plana ao topo da torre. Ache o volume da torre.

48. Ache, pelo corte, o volume de um tetraedro com três faces mutuamente perpendiculares e três arestas mutuamente perpendiculares cujos comprimentos são a, b e c unidades.

49. A região limitada por um pentágono com vértices em $(-4, 4)$, $(-2, 0)$, $(0, 8)$, $(2,0)$ e $(4, 4)$ gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.

50. A região limitada pelas curvas $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{cotg} x$ e pelo eixo x, onde $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$, gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido obtido.

51. A região de $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}\pi$ limitada pela curva $y = \operatorname{sen} x$, pela reta $y = 1$ e pelo eixo y gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado. (*Sugestão*: use a identidade $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.)

52. Se $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos t}\, dt$, ache o comprimento do arco do gráfico de f do ponto onde $x = \frac{1}{3}\pi$ ao ponto onde $x = \frac{1}{2}\pi$. (*Sugestão*: use a identidade $\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ e o Teorema 5.8.1).

Os Exercícios de 53 a 56 pertencem à Secção Suplementar 6.7.

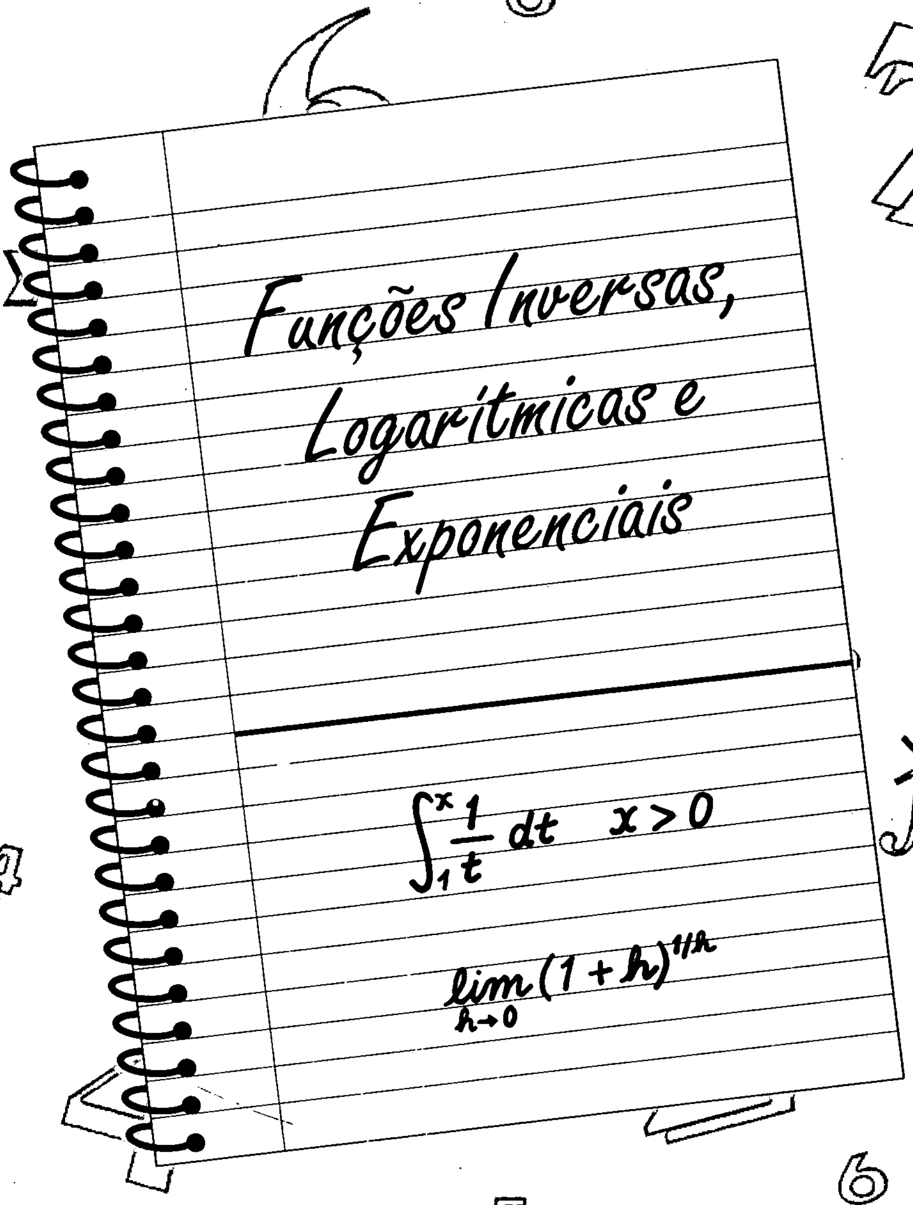
53. Uma placa tem a forma da região limitada pela parábola $x^2 = 6y$ e pela reta $2y = 3$ e é colocada num tanque com água tendo o seu vértice voltado para baixo e a reta na superfície da água. Ache a força decorrente da pressão da água sobre um lado da placa se a distância for medida em metros.

54. A face de um dique adjacente à água está inclinada 45° em relação à vertical. A face é um retângulo com 80 m de largura e 40 m no lado inclinado. Se o dique estiver cheio de água, ache a força total na face devido à pressão da água.

55. Um tanque cilíndrico está cheio de gasolina com uma densidade de 641 kg/m^3. Se o eixo do cilindro for horizontal e o diâmetro for de 8 m, ache a força total sobre um extremo devido à pressão do líquido.

56. Uma placa semicircular com um raio de 4 m é submersa verticalmente em um tanque com água com o seu diâmetro na superfície. Use a fórmula (4) da Secção 6.7 para encontrar a força devido à pressão da água sobre um lado da placa.

SETE



Funções Inversas, Logarítmicas e Exponenciais

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad x > 0$$

$$\lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h}$$

As duas primeiras secções deste capítulo pertencem a *funções inversas* e a suas propriedades. Na Secção 7.1 a inversa de uma função é definida, sendo apresentadas condições suficientes para que uma função tenha uma inversa. Os teoremas e a derivada de uma função inversa constituem o conteúdo da Secção 7.2.

Estabelecemos anteriormente que as funções que não são algébricas são chamadas de transcendentais, sendo as seis funções trigonométricas exemplos de tais funções. As *funções exponenciais* e *logarítmicas naturais* também são transcendentais e serão tratadas nas Secções 7.3 até 7.6. O logaritmo natural é definido como uma integral na Secção 7.3 e a função exponencial natural *exp* é definida como a inversa da função logarítmica natural *ln*, na Secção 7.5. Com isso, temos condições de definir uma potência irracional de um número real. As funções *ln* e *exp* são aplicadas na Secção 7.7 a problemas envolvendo *leis de crescimento e decaimento*. Outra aplicação dessas funções é a resolução de *equações diferenciais lineares de primeira ordem*, como mostramos na Secção Suplementar 7.8.

7.1 FUNÇÕES INVERSAS

Dadas duas operações inversas, essencialmente uma "desfaz" a outra. Por exemplo, adição e subtração são operações inversas: se 4 for adicionado a x, a soma será $x + 4$; então se 4 for subtraído dessa soma, a diferença será x. Na ilustração a seguir, usamos pares de funções associadas às suas operações inversas.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** (a) Seja $f(x) = x + 4$ e $g(x) = x - 4$. Então,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x-4) \qquad & g(f(x)) &= g(x+4) \\ &= (x-4)+4 & &= (x+4)-4 \\ &= x & &= x \end{aligned}$$

(b) Seja $f(x) = 2x$ e $g(x) = \frac{x}{2}$. Então,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f\left(\frac{x}{2}\right) \qquad & g(f(x)) &= g(2x) \\ &= 2\left(\frac{x}{2}\right) & &= \frac{2x}{2} \\ &= x & &= x \end{aligned}$$

(c) Seja $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Então,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(\sqrt[3]{x}) \qquad & g(f(x)) &= g(x^3) \\ &= (\sqrt[3]{x})^3 & &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x & &= x \end{aligned}$$

◀

Cada par de funções f e g da Ilustração 1 faz com que sejam verdadeiras as seguintes afirmativas:

$f(g(x)) = x$ para x no domínio de g

e

$g(f(x)) = x$ para x no domínio de f

Observe que para as funções f e g nessas duas equações, as funções compostas $f(g(x))$ e $g(f(x))$ são iguais, uma relação que em geral não é verdadeira para as funções arbitrárias f e g. Você aprenderá adiante (na Ilustração 5) que cada par de funções na Ilustração 1 é um conjunto de *funções inversas*, e esta é a razão pela qual as duas equações estão satisfeitas.

Antes de apresentar a definição formal da *inversa de uma função*, consideremos mais algumas funções particulares. A Figura 1 mostra um esboço da função definida por

$$f(x) = x^2$$

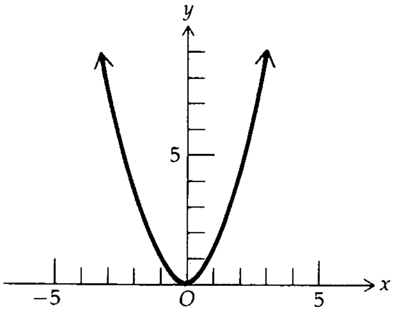


FIGURA 1

O domínio de f é o conjunto dos números reais e a imagem de f é o intervalo $[0, +\infty)$. Observe que como $f(2) = 4$ e $f(-2) = 4$, o número 4 é o valor funcional de dois números distintos no domínio. Além disso, todo número exceto 0 na imagem dessa função é o valor da função de dois números distintos no domínio. Exemplificando, $\frac{25}{4}$ é o valor funcional tanto de $\frac{5}{2}$, como de $-\frac{5}{2}$, 1 é o valor funcional de 1 e -1 e 9 é o valor funcional de 3 e -3.

Uma situação diferente ocorre com a função g definida por

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2$$

O domínio de g é o intervalo fechado $[-2, 2]$ e a imagem é $[-8, 8]$. Um esboço do gráfico de g está na Figura 2. Essa função é tal que um número em sua imagem é o valor funcional de um e somente um número no domínio. Tal função é chamada de *biunívoca.*

7.1.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é **biunívoca** se cada número em sua imagem corresponder exatamente a um número em seu domínio; ou seja, para todo x_1 e x_2 no domínio de f

$$\text{se } x_1 \neq x_2, \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \text{ somente quando } x_1 = x_2$$

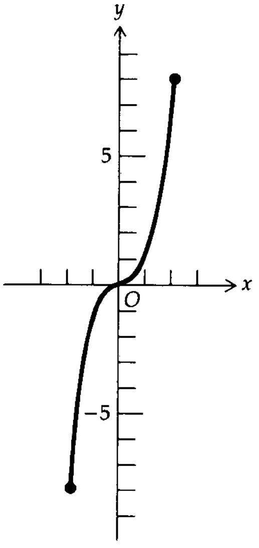


FIGURA 2

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Conforme está argumentado acima, para a função f definida por

$$f(x) = x^2$$

todo número, exceto 0, na imagem de f é valor funcional de dois números distintos no domínio. Logo, pela Definição 7.1.1, essa função não é biunívoca. ◀

Sabemos que uma reta vertical pode interceptar o gráfico de uma função em apenas um ponto. Para uma função biunívoca, também é verdade que uma reta horizontal pode interceptar o gráfico em apenas um ponto. Você pode verificar esse fato para a função biunívoca definida por $g(x) = x^3$, onde $-2 \leqslant x \leqslant 2$, cujo gráfico está na Figura 2. Além disso, note que para a função da Figura 1 definida por $f(x) = x^2$, que não é biunívoca, qualquer reta horizontal acima do eixo x intercepta o gráfico em dois pontos.

EXEMPLO 1 Dadas

$$f(x) = 4x - 3 \qquad h(x) = 4 - x^2$$

(a) Prove que f é biunívoca e faça um esboço de seu gráfico.
(b) Prove que h não é biunívoca e faça um esboço de seu gráfico.

Solução

(a) Temos a função $f(x) = 4x - 3$. O domínio de f é o conjunto de todos os números reais. Se x_1 e x_2 forem dois números reais e $f(x_1) = f(x_2)$; então

$$4x_1 - 3 = 4x_2 - 3$$
$$4x_1 = 4x_2$$
$$x_1 = x_2$$

Como $f(x_1) = f(x_2)$, implica que $x_1 = x_2$, segue da Definição 7.1.1 que f é biunívoca. Um esboço do gráfico de f está na Figura 3. Observe que uma reta horizontal intercepta o gráfico apenas em um ponto.

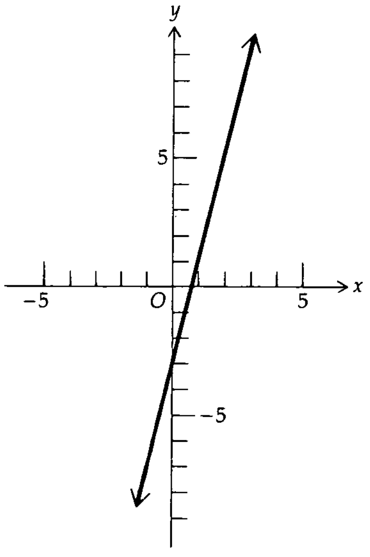


FIGURA 3

(b) Temos a função $h(x) = 4 - x^2$. O domínio de h é o conjunto de todos os números reais. Os números 1 e -1 estão no domínio de h e

$$h(1) = 3 \qquad h(-1) = 3$$

Como $1 \neq -1$ e $h(1) = h(-1)$, segue da Definição 7.1.1 que h não é biunívoca. Um esboço do gráfico de h está na Figura 4. Note que uma reta horizontal $y = b$, com $b < 4$, intercepta o gráfico em dois pontos.

Nem sempre é fácil usar a Definição 7.1.1 para provar que uma função é biunívoca. O teorema a seguir fornece um teste que pode ser usado algumas vezes.

7.1.2 TEOREMA Uma função que seja crescente ou decrescente em um intervalo é biunívoca no intervalo.

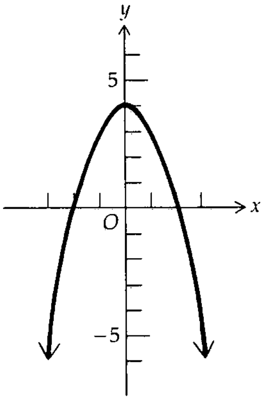


FIGURA 4

Prova Suponha que a função f seja crescente no intervalo. Se x_1 e x_2 forem dois números no intervalo e $x_1 \neq x_2$, então $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$. Se $x_1 < x_2$, segue da definição de função crescente (Definição 4.4.1) que $f(x_1) < f(x_2)$, e assim $f(x_1) \neq f(x_2)$. Se $x_2 < x_1$, então $f(x_2) < f(x_1)$ e novamente $f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo, da Definição 7.1.1 segue que f é biunívoca no intervalo. A demonstração, no caso de f ser decrescente no intervalo, é análoga. ■

Para aplicar o Teorema 7.1.2, é necessário primeiro determinar se a função é monótona (crescente ou decrescente) no intervalo. Em geral, o Teorema 4.4.3 pode ser usado para esse propósito.

EXEMPLO 2 Se

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

prove que f é biunívoca em cada um dos intervalos $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$. Faça um esboço do gráfico de f para mostrar que f é biunívoca em todo o seu domínio.

Solução O domínio de f é o conjunto de todos os números reais exceto 1, ou, equivalentemente $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Vamos calcular $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x - 1) - (2x + 3)}{(x - 1)^2} \\ &= -\frac{5}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

Como $f'(x) < 0$ para todo $x \neq 1$, podemos concluir do Teorema 4.4.3 que f é decrescente em cada um dos intervalos $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$. Logo, do Teorema 7.1.2, f é biunívoca em cada um desses intervalos.

Além disso,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$= 2 \qquad\qquad\qquad\qquad = 2$$

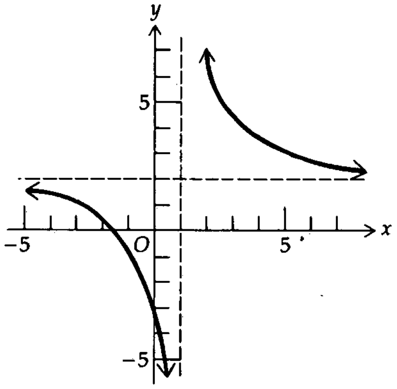


FIGURA 5

Assim, a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Também

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x+3}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+3}{x-1} = +\infty$$

Logo, a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical do gráfico de f. Com essa informação obtemos um esboço do gráfico de f mostrado na Figura 5. Pelo gráfico, vemos que f é biunívoca em seu domínio.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Consideremos a relação

$$y = x^3 \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2 \tag{1}$$

Essa relação define a função biunívoca g apresentada antes da Definição 7.1.1, onde

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2$$

A função g é o conjunto de pares ordenados (x, y) que satisfazem (1). Se resolvermos (1) em x, obteremos

$$x = \sqrt[3]{y} \qquad -8 \leqslant y \leqslant 8 \tag{2}$$

que define a função G, onde

$$G(y) = \sqrt[3]{y} \qquad -8 \leqslant y \leqslant 8$$

A função G é o conjunto de pares ordenados (y, x) que satisfazem (2). ◀

A função G da Ilustração 3 é chamada de *inversa* da função g. Na definição formal a seguir, da inversa de uma função, usamos a notação f^{-1} para denotar a inversa de f. Essa notação é lida como "inversa de f", e não deve ser confundida com o uso de -1 como expoente.

7.1.3 DEFINIÇÃO Se f for uma função biunívoca, então existirá uma função f^{-1}, chamada de **inversa** de f, tal que

$$x = f^{-1}(y) \text{ se e somente se } y = f(x)$$

O domínio de f^{-1} é a imagem de f e a imagem de f^{-1} é o domínio de f.

É essencial, na Definição 7.1.3, que f seja uma função biunívoca. Essa condição assegura que $f^{-1}(y)$ seja única para cada valor de y.

Eliminamos y entre as equações da definição, substituindo y por $f(x)$ na equação

$$f^{-1}(y) = x$$

para obter

$$f^{-1}(f(x)) = x \tag{3}$$

onde x está no domínio de f.

Eliminamos x entre o mesmo par de equações, substituindo x por $f^{-1}(y)$ na equação

$$f(x) = y$$

Obtemos

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

onde y está no domínio de f^{-1}. Como o símbolo usado para a variável independente é arbitrário, podemos substituir y por x para obter

$$f(f^{-1}(x)) = x \tag{4}$$

onde x está no domínio de f^{-1}.

De (3) e (4), vemos que se f^{-1} for a inversa da função f, então a inversa de f^{-1} será f. Vamos estabelecer formalmente esses resultados com o teorema a seguir.

7.1.4 TEOREMA Se f for uma função biunívoca tendo f^{-1} como sua inversa, então f^{-1} será uma função biunívoca tendo f como sua inversa. Além disso,

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para } x \text{ no domínio de } f$$

e

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para } x \text{ no domínio de } f^{-1}$$

Quando nos referimos a uma função e à sua inversa, usaremos a terminologia *funções inversas*.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Na Ilustração 3 a função G definida por

$$G(y) = \sqrt[3]{y} \qquad -8 \leqslant y \leqslant 8$$

é a inversa da função g definida por

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2$$

Portanto, g^{-1} pode ser escrita em lugar de G, e teremos

$$g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \qquad -8 \leqslant y \leqslant 8$$

ou, de modo equivalente, substituindo y por x,

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \qquad -8 \leqslant x \leqslant 8$$

Observe que o domínio de g é $[-2, 2]$, que é a imagem de g^{-1}; também, a imagem de g é $[-8, 8]$, que é o domínio de g^{-1}. ◀

Se uma função f tiver uma inversa, então $f^{-1}(x)$ poderá ser encontrada pelo método usado na ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Cada uma das funções f na Ilustração 1 é biunívoca. Logo, $f^{-1}(x)$ existe. Para cada função f calculamos $f^{-1}(x)$ a partir da definição de $f(x)$, substituindo $f(x)$ por y e resolvendo a equação resultante em x. Esse procedimento dá a equação $x = f^{-1}(y)$. Temos, então, a definição de $f^{-1}(y)$, da qual obtemos $f^{-1}(x)$.

(a)
$$\begin{aligned} f(x) &= x + 4 \\ y &= x + 4 \\ x &= y - 4 \\ f^{-1}(y) &= y - 4 \\ f^{-1}(x) &= x - 4 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \\ y &= 2x \\ x &= \frac{y}{2} \\ f^{-1}(y) &= \frac{y}{2} \\ f^{-1}(x) &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ y &= x^3 \\ x &= \sqrt[3]{y} \\ f^{-1}(y) &= \sqrt[3]{y} \\ f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Observe que a função f^{-1} em cada parte é a função g na parte correspondente da Ilustração 1. ◄

EXEMPLO 3 Ache $f^{-1}(x)$ para a função f do Exemplo 1. Verifique as equações do Teorema 7.1.4 para f e f^{-1}. Faça um esboço do gráfico de f^{-1}.

Solução No Exemplo 1 mostramos que a função f definida por

$$f(x) = 4x - 3$$

é biunívoca. Logo, f^{-1} existe. Para encontrar $f^{-1}(x)$, escrevemos a equação

$$y = 4x - 3$$

e a resolvemos em x. Obtemos

$$x = \frac{y + 3}{4}$$

Logo,

$$f^{-1}(y) = \frac{y + 3}{4} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{4}$$

Vamos verificar as equações do Teorema 7.1.4.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(4x - 3) \\ &= \frac{(4x - 3) + 3}{4} \\ &= \frac{4x}{4} \\ &= x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x + 3}{4}\right) \\ &= 4\left(\frac{x + 3}{4}\right) - 3 \\ &= (x + 3) - 3 \\ &= x \end{aligned}$$

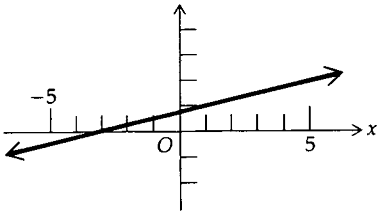


FIGURA 6

Um esboço do gráfico de f^{-1} está na Figura 6.

Na Figura 3 está um esboço do gráfico da função f do Exemplo 3, e a Figura 6 mostra um esboço do gráfico de f^{-1}. Quando os gráficos de f e f^{-1} são mostrados no mesmo conjunto de eixos, como na Figura 7, parece ser intuitiva-

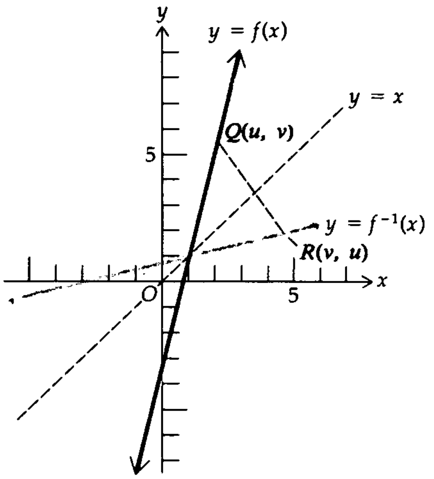


FIGURA 7

mente verdadeiro que se o ponto $Q(u, v)$ estiver no gráfico de f, então o ponto $R(v, u)$ estará no gráfico de f^{-1}.

Em geral, se Q for o ponto (u, v) e R o ponto (v, u), o segmento de reta QR será perpendicular à reta $y = x$ e será dividido ao meio por ela. Dizemos então que os pontos R e Q são *reflexos um do outro* em relação à reta $y = x$. Trocando entre si x e y na equação $y = f(x)$, obtemos a equação $x = f(y)$ cujo gráfico é *um reflexo do gráfico* de $y = f(x)$ em relação à reta $y = x$. Como a equação $x = f(y)$ é equivalente a $y = f^{-1}(x)$, concluímos que o gráfico da equação $y = f^{-1}(x)$ é o reflexo do gráfico da equação $y = f(x)$ em relação à reta $y = x$. Logo, se uma função tiver uma inversa, os gráficos das funções serão reflexos, um do outro, em relação à reta $y = x$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** As funções g e g^{-1} da Ilustração 4 são definidas por

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2$$

e

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \qquad -8 \leqslant x \leqslant 8$$

Esboços dos gráficos de g e g^{-1}, no mesmo conjunto de eixos, estão na Figura 8. Observe que esses gráficos são reflexos um do outro, em relação à reta $y = x$. ◀

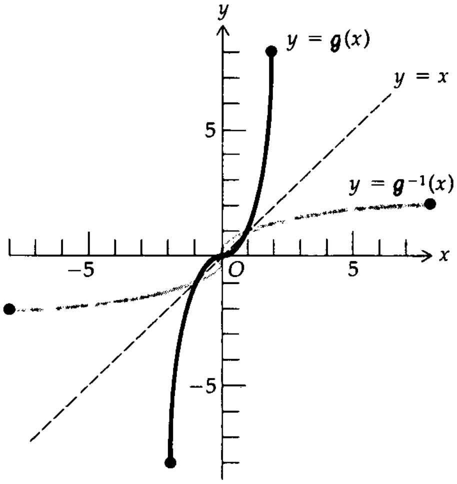


FIGURA 8

EXEMPLO 4 Ache $f^{-1}(x)$ para a função f do Exemplo 2. Verifique as equações do Teorema 7.1.4 para f e f^{-1}. Faça esboços dos gráficos de f e f^{-1} no mesmo conjunto de eixos.

Solução A função f do Exemplo 2 é definida por

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

No Exemplo 2 mostramos que f é biunívoca. Logo, f tem uma inversa f^{-1}. Para encontrar $f^{-1}(x)$, consideremos $y = f(x)$ e vamos resolvê-la em x, obtendo $x = f^{-1}(y)$. Assim, temos

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

$$xy - y = 2x + 3$$

$$x(y - 2) = y + 3$$

$$x = \frac{y + 3}{y - 2}$$

Portanto,

$$f^{-1}(y) = \frac{y + 3}{y - 2} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$$

O domínio de f^{-1} é o conjunto de todos os números reais exceto 2. Vamos verificar as equações do Teorema 7.1.4.

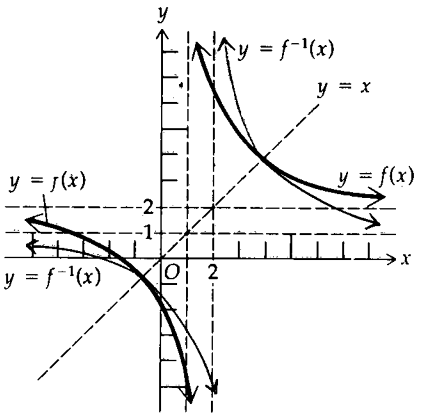


FIGURA 9

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)\\
&= \frac{\left(\dfrac{2x+3}{x-1}\right)+3}{\left(\dfrac{2x+3}{x-1}\right)-2}\\
&= \frac{(2x+3)+3(x-1)}{(2x+3)-2(x-1)}\\
&= \frac{5x}{5}\\
&= x
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x+3}{x-2}\right)\\
&= \frac{2\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)+3}{\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)-1}\\
&= \frac{2(x+3)+3(x-2)}{(x+3)-(x-2)}\\
&= \frac{5x}{5}\\
&= x
\end{aligned}
$$

Na Figura 9 vemos esboços dos gráficos de f e f^{-1} no mesmo conjunto de eixos.

Temos, a seguir, o teorema sobre a inversa de uma função que é monótona e contínua num intervalo fechado.

7.1.5 TEOREMA Suponha que o domínio da função f seja o intervalo fechado $[a, b]$. Então

(i) se f for contínua e crescente em $[a, b]$, f terá uma inversa f^{-1} que estará definida em $[f(a), f(b)]$;

(ii) se f for contínua e decrescente em $[a, b]$, f terá uma inversa f^{-1} que estará definida em $[f(b), f(a)]$.

Prova Para a parte (i), se f for contínua em $[a, b]$ e se k for qualquer número tal que $f(a) < k < f(b)$, então, pelo teorema do valor intermediário (2.7.8), existirá um número c em (a, b) tal que $f(c) = k$. Logo, a imagem de f é o intervalo fechado $[f(a), f(b)]$. Como f é crescente em $[a, b]$, f será biunívoca e assim, terá uma inversa f^{-1}. Como o domínio de f^{-1} é a imagem de f, f^{-1} está definida em $[f(a), f(b)]$.

A demonstração da parte (ii) é similar. Entretanto, como f é decrescente em $[a, b]$, $f(a) > f(b)$; assim, a imagem de f é $[f(b), f(a)]$. Logo, f^{-1} está definida em $[f(b), f(a)]$. ■

► **ILUSTRAÇÃO 7** Seja f a função definida por

$$f(x) = x^2 - 1$$

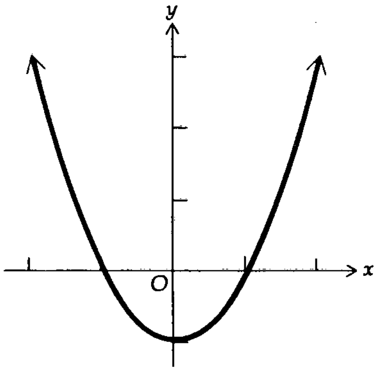


FIGURA 10

Na Figura 10 vemos um esboço do gráfico de f. Como f não é biunívoca, f não tem uma inversa.

Entretanto, restringiremos o domínio de f ao intervalo fechado $[0, c]$ e consideraremos a função f_1 definida por

$$f_1(x) = x^2 - 1 \qquad x \in [0, c] \tag{5}$$

Vamos considerar também a função f_2 cujo domínio está restrito ao intervalo fechado $[-c, 0]$; isto é

$$f_2(x) = x^2 - 1 \qquad x \in [-c, 0] \tag{6}$$

As funções f_1 e f_2 são funções distintas, pois têm domínios diferentes. Calculando as derivadas de f_1 e de f_2, obtemos

$$f_1'(x) = 2x \qquad x \in [0, c]$$

$$f_2'(x) = 2x \qquad x \in [-c, 0]$$

Como f_1, é contínua em $[0, c]$ e $f_1'(x) > 0$ para todo x em $(0, c)$, pelo Teorema 4.4.3 (i) f_1 é crescente em $[0, c]$. Logo, pelo Teorema 7.1.5 (i) f_1 tem uma inversa f_1^{-1} que está definida em $[f_1(0), f_1(c)]$, isto é, $[-1, c^2 - 1]$. Obtemos $f_1^{-1}(x)$ substituindo $f_1(x)$ por y em (5) e resolvendo em x, onde $x \geqslant 0$. Obtemos

$$y = x^2 - 1$$

$$x^2 = y + 1$$

$$x = \sqrt{y + 1}$$

Logo, $f_1^{-1}(y) = \sqrt{y + 1}$, e se substituirmos y por x,

$$f_1^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} \qquad x \in [-1, c^2 - 1]$$

Como f_2 é contínua em $[-c, 0]$ e como $f_2'(x) < 0$ para todo x em $(-c, 0)$, pelo Teorema 4.4.3 (ii) f_2 é decrescente em $[-c, 0]$. Assim, pelo Teorema 7.1.5 (ii), f_2 tem uma inversa f_2^{-1} que está definida em $[f_2(0), f_2(-c)]$, isto é, $[-1, c^2 - 1]$. Se em (6) substituirmos $f_2(x)$ por y e resolvermos em x, onde $x \leqslant 0$, obtemos

$$x = -\sqrt{y + 1}$$

Logo, $f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y + 1}$, e

$$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x + 1} \qquad x \in [-1, c^2 - 1]$$

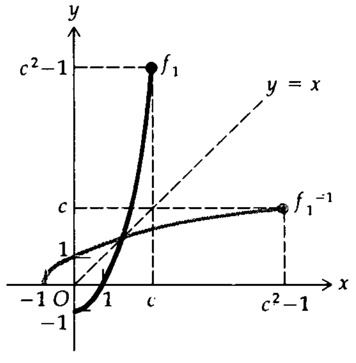


FIGURA 11

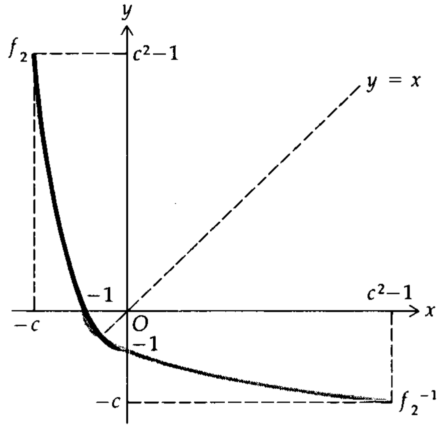


FIGURA 12

Na Figura 11 vemos esboços dos gráficos de f_1 e de sua inversa f_1^{-1}, no mesmo conjunto de eixos. Vemos esboços dos gráficos de f_2 e de sua inversa f_2^{-1}, conforme definidas no mesmo conjunto de eixos, na Figura 12. Em ambas as figuras, observe que os gráficos da função e de sua inversa são reflexos de um outro em relação à reta $y = x$. ◀

Existem funções que têm uma inversa, mas para as quais não podemos obter uma equação que defina a inversa explicitamente. Por exemplo, seja

$$f(x) = x^5 + 5x^3 + 2x - 4 \tag{7}$$

$$f'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 2$$

Como $f'(x) > 0$ para todo x, f é uma função crescente e, portanto, tem uma inversa. Entretanto, se substituirmos $f(x)$ por y em (7), iremos obter uma equação do quinto grau em x. Equações de grau maior ou igual a cinco não têm, em geral, soluções que possam ser expressas por uma fórmula. No entanto, podemos determinar algumas propriedades da função inversa, que serão discutidas na Secção 7.2.

EXERCÍCIOS 7.1

Nos Exercícios de 1 a 18, determine se a função dada é biunívoca. Faça um esboço do gráfico da função.

1. $f(x) = 2x + 3$
2. $g(x) = 8 - 4x$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
4. $f(x) = 3 - x^2$
5. $g(x) = 4 - x^3$
6. $h(x) = \frac{1}{2}x^3 + 1$
7. $f(x) = \sqrt{x + 3}$
8. $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$
9. $h(x) = 2 \operatorname{sen} x, -\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$
10. $f(x) = 1 - \cos x, 0 \leqslant x \leqslant \pi$
11. $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x, -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$
12. $F(x) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}x, 0 < x < 2\pi$

13. $G(x) = \sec x,\ x \in [0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$

14. $g(x) = \operatorname{cosec} x,\ x \in (0, \frac{1}{2}\pi] \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi]$

15. $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$ **16.** $g(x) = 5$

17. $g(x) = |x - 2|$ **18.** $f(x) = \dfrac{1}{2x-4}$

Nos Exercícios de 19 a 40, determine se a função dada tem uma inversa. Se a inversa existir, determine-a e faça o seguinte: (a) ache o domínio e a imagem; (b) faça esboços dos gráficos da função e de sua inversa, no mesmo conjunto de eixos. Se a função não tiver uma inversa, mostre que uma reta horizontal intercepta o gráfico da função em mais de um ponto.

19. $f(x) = 5x - 7$ **20.** $f(x) = 3x + 6$

21. $g(x) = 1 - x^2$ **22.** $g(x) = x^5$

23. $f(x) = (4 - x)^3$ **24.** $F(x) = 3(x^2 + 1)$

25. $h(x) = \sqrt{2x - 6}$ **26.** $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

27. $F(x) = \sqrt[3]{x + 1}$ **28.** $f(x) = |x| + x$

29. $f(x) = (x + 2)^4$ **30.** $g(x) = 3\sqrt[3]{x} + 1$

31. $f(x) = 2\sqrt[5]{x}$ **32.** $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x}$

33. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 1}$ **34.** $g(x) = \dfrac{8}{x^3 + 1}$

35. $g(x) = x^2 + 5,\ x \geqslant 0$ **36.** $f(x) = (2x - 1)^2,\ x \leqslant \frac{1}{2}$

37. $f(x) = (2x + 1)^3,\ -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

38. $f(x) = \frac{1}{8}x^3,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$

39. $F(x) = \sqrt{9 - x^2},\ 0 \leqslant x \leqslant 3$

40. $G(x) = \sqrt{4x^2 - 9},\ x \geqslant \frac{3}{2}$

Nos Exercícios de 41 a 46, (a) prove que a função dada f tem uma inversa, (b) ache $f^{-1}(x)$ e (c) verifique as equações do Teorema 7.1.4 para f e *f^{-1}.*

41. $f(x) = 4x - 3$ **42.** $f(x) = 5x + 2$ **43.** $f(x) = x^3 + 2$

44. $f(x) = (x + 2)^3$ **45.** $f(x) = \dfrac{3x + 1}{2x + 4}$ **46.** $f(x) = \dfrac{x - 3}{3x - 6}$

47. Se x graus Celsius for a temperatura, então o número de graus na escala Fahrenheit poderá ser expresso como uma função de x. Se f for essa função, então $f(x)$ graus será a temperatura em graus Fahrenheit e $f(x) = 32 + \frac{9}{5}x$. Determine a função inversa f^{-1} que expressa o número de graus na escala Celsius como uma função do número de graus na escala Fahrenheit.

48. Se $f(t)$ unidades monetárias for a quantia em t anos de um investimento de \$ 1.000 a juros de 12%, então

$$f(x) = 1.000(1 + 0{,}12t)$$

Determine a função inversa f^{-1} que expressa o número de anos em que \$ 1.000 foram investidos a 12% de juros simples, como uma função da quantia investida.

49. Se $f(x) = \sqrt{16 - x^2},\ 0 \leqslant x \leqslant 4$, mostre que f é a sua própria função inversa.

50. Determine o valor da constante k, de tal forma que a função definida por

$$f(x) = \frac{x + 5}{x + k}$$

seja a sua própria inversa.

Nos Exercícios de 51 a 54, faça o seguinte: (a) mostre que a função f dada não é biunívoca e que, portanto, não tem uma inversa; (b) restrinja o domínio e obtenha duas funções biunívocas, f_1 e *f_2, com a mesma imagem que f; (c) ache $f_1^{-1}(x)$ e $f_2^{-1}(x)$ e dê os domínios de f_1^{-1} e f_2^{-1}; (d) faça esboços dos gráficos de f_1 e f_1^{-1} no mesmo conjunto de eixos; (e) faça esboços dos gráficos de f_2 e f_2^{-1} no mesmo conjunto de eixos.*

51. $f(x) = x^2 + 4$ **52.** $f(x) = 2x^2 - 6$

53. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **54.** $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 16}$

55. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ x^2 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 9 \\ 27\sqrt{x} & \text{se } 9 < x \end{cases}$$

Prove que f tem uma inversa e ache $f^{-1}(x)$.

7.2 TEOREMAS DA FUNÇÃO INVERSA E A DERIVADA DA INVERSA DE UMA FUNÇÃO

A partir das propriedades de f podemos obter informações sobre a continuidade e a diferenciabilidade de f^{-1}, apesar de $f^{-1}(x)$ não ser definida explicitamente por uma equação. Os *teoremas da função inversa* dessa secção fornecem meios para obtermos essas informações. Antes de enunciar o teorema da função inversa para funções crescentes, apresentaremos duas ilustrações dando exemplos de uma função e de sua inversa que satisfazem as condições do teorema.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** No Exemplo 3 da Secção 7.1 tínhamos a função f e sua inversa f^{-1} definidas por

$$f(x) = 4x - 3 \qquad f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{4}$$

Na Figura 7 os gráficos de f e f^{-1} são dados no mesmo conjunto de eixos. Vemos que tanto f quanto f^{-1} são contínuas e crescentes em seus domínios. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Na Ilustração 6 da Secção 7.1, a função g e sua inversa g^{-1} foram definidas por

$$g(x) = x^3 \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2$$
$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \qquad -8 \leqslant x \leqslant 8$$

e os gráficos de g e g^{-1} estão na Figura da Secção 7.1. Cada uma dessas funções é contínua e crescente em seu domínio. ◀

7.2.1 TEOREMA
Teorema da Função Inversa

Vamos supor qua a função f seja contínua e crescente no intervalo fechado $[a, b]$. Então, se f^{-1} for sua inversa, que está definida em $[f(a), f(b)]$,

(i) f^{-1} é crescente em $[f(a), f(b)]$.
(ii) f^{-1} é contínua em $[f(a), f(b)]$.

Prova de (i) A existência de f^{-1} é garantida pelo Teorema 7.1.5. Para provar que f^{-1} é crescente em $[f(a), f(b)]$, devemos mostrar que

$$\text{se } \; y_1 < y_2 \; \text{ então } \; f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

onde y_1 e y_2 são dois números em $[f(a), f(b)]$. Como f^{-1} é definida em $[f(a), f(b)]$, existem números x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Portanto,

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(f(x_1)) \quad \text{e} \quad f^{-1}(y_2) = f^{-1}(f(x_2))$$
$$\Leftrightarrow \; f^{-1}(y_1) = x_1 \quad \text{e} \quad f^{-1}(y_2) = x_2 \tag{1}$$

Se $x_2 < x_1$, então como f é crescente em $[a, b]$, $f(x_2) < f(x_1)$ ou, equivalentemente, $y_2 < y_1$. Mas $y_1 < y_2$; logo, x_2 não pode ser menor do que x_1.

Se $x_2 = x_1$, então como f é uma função, $f(x_1) = f(x_2)$ ou, equivalentemente, $y_1 = y_2$, mas isto também contradiz o fato de que $y_1 < y_2$. Logo, $x_2 \neq x_1$.

Assim, se x_2 não for menor do que x_1 e $x_2 \neq x_1$, segue que $x_1 < x_2$; portanto, das duas relações em (1), $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Assim, provam que f^{-1} é crescente em $[f(a), f(b)]$.

Prova de (ii) Para provar que f^{-1} é contínua no intervalo fechado $[f(a), f(b)]$, precisamos mostrar que se r for qualquer número no intervalo aberto $(f(a), f(b))$, então f^{-1} será contínua em r e f^{-1} será contínua à direita de $f(a)$ e à esquerda de $f(b)$.

Provamos que f^{-1} é contínua em qualquer r no intervalo aberto $(f(a), f(b))$, mostrando que o Teorema 2.6.6 é válido em r. Queremos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de forma que tanto $f^{-1}(r) - \epsilon$ como $f^{-1}(r) + \epsilon$ estejam ambos em $[a, b]$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \; |y - r| < \delta \; \text{ então } \; |f^{-1}(y) - f^{-1}(r)| < \epsilon$$

Seja $f^{-1}(r) = s$. Então, $f(s) = r$. Como, de (i), f^{-1} é crescente em $[f(a), f(b)]$, concluímos que $a < s < b$. Logo,

$$a \leqslant s - \epsilon < s < s + \epsilon \leqslant b$$

Como f é crescente em $[a, b]$,

$$f(a) \leqslant f(s - \epsilon) < r < f(s + \epsilon) \leqslant f(b) \tag{2}$$

Seja δ o menor dentre os números $r - f(s - \epsilon)$ e $f(s + \epsilon) - r$; assim, $\delta \leqslant r - f(s - \epsilon)$ assim $\delta \leqslant f(s + \epsilon) - r$ ou, equivalentemente,

$$f(s - \epsilon) \leqslant r - \delta \quad \text{e} \quad r + \delta \leqslant f(s + \epsilon) \tag{3}$$

Se $|y - r| < \delta$, então $-\delta < y - r < \delta$ ou, equivalentemente,

$$r - \delta < y < r + \delta$$

Dessa desigualdade e de (2) e (3), temos que

$$\text{se } |y - r| < \delta \text{ então } f(a) \leqslant f(s - \epsilon) < y < f(s + \epsilon) \leqslant f(b)$$

Como f^{-1} é crescente em $[f(a), f(b)]$ segue, do que está acima, que

$$\text{se } |y - r| < \delta \text{ então } f^{-1}(f(s - \epsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(s + \epsilon))$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } |y - r| < \delta \text{ então } s - \epsilon < f^{-1}(y) < s + \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } |y - r| < \delta \text{ então } -\epsilon < f^{-1}(y) - s < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \text{ se } |y - r| < \delta \text{ então } |f^{-1}(y) - f^{-1}(r)| < \epsilon$$

Assim, f^{-1} é contínua no intervalo aberto $(f(a), f(b))$.

As demonstrações de que f^{-1} é contínua à direita de $f(a)$ e à esquerda de $f(b)$ serão deixadas como exercício (veja o Exercício 40). ■

Vamos enunciar agora o teorema correspondente para funções decrescentes, cuja demonstração é similar à do Teorema 7.2.1 e que será deixada como exercício (veja os Exercícios 41 e 42).

7.2.2 TEOREMA
Teorema da Função Inversa

Suponha que a função f seja contínua e decrescente no intervalo fechado $[a, b]$. Então, se f^{-1} for sua inversa, que está definida em $[f(b), f(a)]$

(i) f^{-1} é decrescente em $[f(b), f(a)]$;
(ii) f^{-1} é contínua em $[f(b), f(a)]$.

O teorema da função inversa será empregado na demonstração do teorema a seguir, o qual expressa a relação entre a derivada de uma função e a derivada de sua inversa, caso a função tenha uma inversa. No enunciado e na demonstração desse teorema usaremos a notação de Leibniz para a derivada. Observe como essa notação faz com que ela fique fácil de ser memorizada.

7.2.3 TEOREMA

Suponha que a função f seja monótona e contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja $y = f(x)$. Se f for diferenciável em $[a, b]$ e $f'(x) \neq 0$ para todo x em $[a, b]$, então a derivada da função inversa f^{-1}, definida por $x = f^{-1}(y)$ será dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

Prova Como f é contínua e monótona em $[a, b]$, pelos Teoremas 7.2.1 e 7.2.2, f tem uma inversa que é contínua e monótona em $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$ se $f(b) < f(a)$).

Se x for um número em $[a, b]$, seja Δx um incremento de x, $\Delta x \neq 0$, tal que $x + \Delta x$ também esteja em $[a, b]$. Então, o incremento correspondente de y será dado por

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{4}$$

$\Delta y \neq 0$ uma vez que $\Delta x \neq 0$ e f é monótona em $[a, b]$; isto é, ou

$$f(x + \Delta x) < f(x) \quad \text{ou} \quad f(x + \Delta x) > f(x) \qquad \text{em } [a, b]$$

Se x estiver em $[a, b]$ e $y = f(x)$, então y estará em $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$). Também, se $x + \Delta x$ estiver em $[a, b]$, então $y + \Delta y$ estará em $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$), pois $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ por (4). Assim,

$$x = f^{-1}(y) \qquad \text{e} \qquad x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y)$$

Segue dessas duas relações que

$$\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) \tag{5}$$

Da definição de derivada,

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y}$$

Substituindo na equação acima (4) e (5), iremos obter

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)}$$

e como $\Delta x \neq 0$,

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \tag{6}$$

Antes de encontrarmos o limite em (6) vamos mostrar que sob as hipóteses desse teorema $\Delta x \to 0$ equivale a $\Delta y \to 0$. Primeiro mostraremos que $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$. De (5),

$$\lim_{\Delta y \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta y \to 0} [f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)]$$

Como f^{-1} é contínua em $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$), o limite do segundo membro da igualdade acima é zero. Assim,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0 \tag{7}$$

Vamos demonstrar agora que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. De (4),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)]$$

Como f é contínua em $[a, b]$, o limite do segundo membro da igualdade acima é zero e, portanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Dessa equação e de (7) segue que

$$\Delta x \to 0 \text{ se e somente se } \Delta y \to 0$$

Dessa afirmação e aplicando o teorema de limite de um quociente a (6), temos que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Como f é diferenciável em $[a, b]$, o limite no denominador acima é $f'(x)$ ou, equivalentemente, $\frac{dy}{dx}$. Então,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$ ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Vamos verificar o Teorema 7.2.3 para a função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Se tomarmos $y = f(x)$, teremos

$$y = \sqrt{x} \qquad x \geqslant 0, y \geqslant 0$$

Como f é biunívoca, f^{-1} existe e está definida por $f^{-1}(y) = y^2$. Se tomarmos $x = f^{-1}(y)$, teremos

$$x = y^2 \qquad y \geqslant 0, x \geqslant 0$$

Como $y = \sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e como $x = y^2$

$$\frac{dx}{dy} = 2y$$

Substituindo y por $\sqrt{x}$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= 2\sqrt{x} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\ &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \end{aligned}$$

Quando $x = 0$, $\frac{dy}{dx}$ não existe; assim a igualdade acima não é satisfeita para esse valor de x. Como o domínio de f é o intervalo fechado $[0, +\infty)$, o teorema é válido para todo x no intervalo aberto $(0, +\infty)$. ◀

EXEMPLO 1 Mostre que o Teorema 7.2.3 é válido para a função f dos Exemplos 2 e 4 na Secção 7.1.

Solução A função f foi definida por $(2x + 3)/(x - 1)$. Se tomarmos $y = f(x)$, teremos

$$y = \frac{2x+3}{x-1} \tag{8}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{(x-1)^2}$$

Na solução do Exemplo 4 da Secção 7.1 mostramos que

$$x = \frac{y+3}{y-2}$$

Calculamos $\dfrac{dx}{dy}$ a partir dessa equação, obtendo

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{5}{(y-2)^2}$$

Na relação acima, substituímos o valor de y dado por (8), obtendo

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= -\frac{5}{\left(\dfrac{2x+3}{x-1} - 2\right)^2}\\ &= -\frac{5(x-1)^2}{(2x+3-2x+2)^2}\\ &= -\tfrac{5}{25}(x-1)^2\\ &= -\tfrac{1}{5}(x-1)^2\\ &= \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Determine se a função f definida por

$$f(x) = x^3 + x$$

tem uma inversa. Se tiver, ache a derivada da função inversa.

Solução

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

Logo, $f'(x) > 0$ para todos os números reais; assim sendo, f é crescente em seu domínio. Segue que f é biunívoca e, portanto, tem uma inversa f^{-1}. Seja $y = f(x)$, e então, $x = f^{-1}(y)$. Pelo Teorema 7.2.3,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}\\ &= \frac{1}{3x^2+1}\end{aligned}$$

Ao usar o Teorema 7.2.3 para calcular o valor da derivada da inversa de uma função em um dado número é mais conveniente pensar no enunciado do teorema com as notações f' e $(f^{-1})'$. Vamos restabelecer o teorema com essa notação, designando o Teorema 7.2.4.

7.2.4 TEOREMA Seja f uma função monótona e contínua no intervalo fechado $[a, b]$, contendo o número c e seja $f(c) = d$. Se $f'(c)$ existir e $f'(c) \neq 0$, então $(f^{-1})'(d)$ existirá e

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Vamos mostrar que o Teorema 7.2.4 é válido para valores específicos de c e d e para uma dada função. Se f for a função da Ilustração 3,

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f^{-1}(x) = x^2 \qquad (f^{-1})'(x) = 2x \qquad x \geqslant 0$$

A função f é contínua e monótona em qualquer intervalo fechado $[a, b]$ para o qual $0 \leqslant a \leqslant b$. Seja $c = 9$, então $d = f(9)$, isto é, $d = 3$. O Teorema 7.2.4 afirma que

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(9)}$$

Como $(f^{-1})'(3) = 6$ e $f'(9) = \frac{1}{6}$, essa igualdade está verificada. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** A função f mencionada na conclusão da Secção 7.1 foi definida por

$$f(x) = x^5 + 5x^3 + 2x - 4$$

e conforme ficou estabelecido, f tem uma inversa f^{-1}. Mas não temos uma igualdade definindo explicitamente os valores funcionais de f^{-1}. No entanto, é possível calcular a derivada de f^{-1} num determinado ponto do gráfico de $y = f^{-1}(x)$. Por exemplo, como o ponto (1, 4) está no gráfico de $y = f(x)$, o ponto (4, 1) está no gráfico de $y = f^{-1}(x)$. Vamos calcular o valor de $(f^{-1})'(4)$ usando o Teorema 7.2.4, que estabelece que

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)}$$

Vamos encontrar primeiro $f'(x)$ e depois calcular $f'(1)$.

$$f'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 2 \qquad f'(1) = 22$$

Assim,

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{22}$$ ◀

EXEMPLO 3 (a) No mesmo conjunto de eixos, faça esboços dos gráficos das funções f e f^{-1} do Exemplo 2. (b) Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (1, 2). (c) Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto (2, 1).

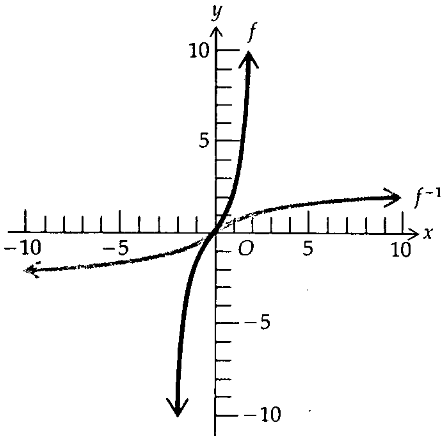


FIGURA 1

Solução

$$f(x) = x^3 + x$$
$$f'(x) = 3x^2 + 1$$
$$f''(x) = 6x$$

(a) A função é crescente em seu domínio. Como $f''(0) = 0$ e $f''(x)$ muda de sinal em $x = 0$, o gráfico de f tem um ponto de inflexão na origem. A inclinação da tangente inflexional na origem é $f'(0) = 1$. Usamos essa informação para traçar o esboço do gráfico de f mostrado na Figura 1. Essa figura também mostra um esboço do gráfico de f^{-1}, obtido do fato de que ele é o reflexo do gráfico de f em relação à reta $y = x$. Observe que para encontrar uma equação definindo explicitamente $f^{-1}(x)$, é necessário resolver a equação do terceiro grau $y = x^3 + x$.

(b) A inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2)$ é $f'(1) = 4$.

(c) A inclinação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(2, 1)$ é $(f^{-1})'(2)$. Do Teorema 7.2.4,

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)}$$
$$= \tfrac{1}{4}$$

EXERCÍCIOS 7.2

Nos Exercícios de 1 a 10, seja $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$, verifique que $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

1. $f(x) = 4x - 3$ **2.** $f(x) = 7 - 2x$ **3.** $f(x) = \sqrt{x+1}$

4. $f(x) = 8x^3$ **5.** $f(x) = \frac{1}{5}x^5$ **6.** $f(x) = \sqrt{4 - 3x}$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x-8}$ **8.** $f(x) = \sqrt[5]{x}$ **9.** $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}$

10. $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x+6}$

Nos Exercícios de 11 a 28, ache $(f^{-1})'(d)$.

11. $f(x) = \sqrt{3x+1}$; $d = 1$ **12.** $f(x) = x^5 + 2$; $d = 1$

13. $f(x) = x^2 - 16$, $x \geqslant 0$; $d = 9$ **14.** $f(x) = \sqrt{4-x}$; $d = 3$

15. $f(x) = x^3 + 5$; $d = -3$ **16.** $f(x) = 4x^3 + 2x$; $d = 6$

17. $f(x) = 3x^5 + 2x^3$; $d = 5$

18. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$; $d = \frac{1}{2}$

19. $f(x) = \frac{1}{2}\cos^2 x$; $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$; $d = \frac{1}{4}$

20. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$; $-\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$; $d = 1$

21. $f(x) = 2 \operatorname{cotg} x$; $0 < x < \pi$; $d = 2$

22. $f(x) = \sec \frac{1}{2}x$; $0 \leqslant x < \pi$; $d = 2$

23. $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{cosec} x$; $0 < x < \frac{1}{2}\pi$; $d = 1$

24. $f(x) = x^2 - 6x + 7$, $x \leqslant 3$; $d = 0$

25. $f(x) = 2x^2 + 8x + 7$, $x \leqslant -2$; $d = 1$

26. $f(x) = 2x^3 + x + 20$; $d = 2$

27. $f(x) = \int_{-3}^{x} \sqrt{t+3}\, dt$, $x > -3$; $d = 18$

28. $f(x) = \int_{x}^{2} t\, dt$, $x < 0$; $d = -6$

Nos Exercícios de 29 a 34, faça o seguinte: (a) resolva a equação para y em termos de x e expresse y como uma ou mais funções de x; (b) para cada função obtida em (a) determine se a função tem uma inversa e se tiver, determine o domínio da função inversa; (c) use a derivação implícita para encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dx}{dy}$ e determine os valores de x e y para os quais $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dx}{dy}$ são recíprocos.

29. $x^2 + y^2 = 9$ **30.** $x^2 - 4y^2 = 16$

31. $xy = 4$ **32.** $9y^2 - 8x^3 = 0$

33. $2x^2 - 3xy + 1 = 0$ **34.** $2x^2 + 2y + 1 = 0$

35. Dada $f(x) = x^3 + 3x - 1$. (a) No mesmo conjunto de eixos faça esboços dos gráficos das funções f e f^{-1}. (b) Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 3)$. (c) Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(3, 1)$.

36. Dada $f(x) = 6 - x - x^3$. (a) No mesmo conjunto de eixos faça esboços dos gráficos das funções f e f^{-1}. (b) Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, -4)$. (c) Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(-4, 2)$.

37. Dada $f(x) = \int_1^x \sqrt{16 - t^4}\, dt$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Prove que f tem uma inversa f^{-1} e calcule $(f^{-1})'(0)$.

38. Dada $f(x) = \int_2^x \sqrt{9 + t^4}\, dt$. Prove que f tem uma inversa f^{-1} e calcule $(f^{-1})'(0)$.

39. Dada $f(x) = \int_1^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^4}}$. Prove que f tem uma inversa e calcule $(f^{-1})'(0)$.

40. Dado que a função f é crescente e contínua no intervalo fechado $[a, b]$, considerando o Teorema 7.2.1 (i), prove que f^{-1} é contínua à direita de $f(a)$ e à esquerda de $f(b)$.

41. Prove o Teorema 7.2.2 (i).

42. Prove o Teorema 7.2.2 (ii).

43. Mostre que a fórmula do Teorema 7.2.3 pode ser escrita como

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

44. Use a fórmula do Exercício 43 para mostrar que

$$(f^{-1})''(x) = -\frac{f''(f^{-1}(x))}{[f'(f^{-1}(x))]^3}$$

7.3 A FUNÇÃO LOGARÍTMICA NATURAL

A definição da função logarítmica conhecida da Álgebra está baseada em potências. As propriedades dos logaritmos são provadas a partir das propriedades correspondentes das potências. Uma de tais propriedades das potências é

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \tag{1}$$

Se os expoentes x e y forem inteiros positivos e se a for um número real qualquer, (1) decorrerá da definição de potência de expoente inteiro positivo e da indução matemática. Para os casos em que os expoentes são inteiros quaisquer, positivos, negativos ou zero e $a \neq 0$, então (1) será válida se definirmos potências de expoentes negativos e zero por

$$a^0 = 1 \quad \text{e} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad n > 0$$

Se os expoentes forem números racionais e $a \geqslant 0$, então (1) será válida com $a^{m/n}$ definida por

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Não é tão simples definir a^x quando x for um número irracional. Por exemplo, qual o significado de $2^{\sqrt{3}}$? A definição de logaritmo dada em Álgebra Elementar baseia-se na hipótese de que a^x existe se a for um número positivo qualquer e x, um número real qualquer.

Essa definição estabelece que a equação

$$a^x = N$$

onde a é um número positivo qualquer diferente de 1 e N é um número positivo, pode ser resolvida em x e que x é determinado de modo único por

$$x = \log_a N$$

As seguintes propriedades de logaritmos são provadas a partir das propriedades de potências:

$$\log_a 1 = 0 \tag{2}$$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \tag{3}$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \tag{4}$$

$$\log_a M^n = n \log_a M \tag{5}$$

$$\log_a a = 1 \tag{6}$$

Neste capítulo vamos definir a função logarítmica usando o Cálculo e provar as propriedades dos logaritmos partindo dessa definição. Então, a função exponencial será definida em termos da função logarítmica. Essa definição possibilita-nos definir a^x sendo x um número real qualquer e $a > 0$. As propriedades das potências serão então provadas para os casos em que o expoente for qualquer número real.

Considere a fórmula

$$\int t^n \, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Essa fórmula não é válida para $n = -1$.

Para calcular $\int t^n \, dt$ quando $n = -1$, precisamos de uma função cuja derivada seja $\dfrac{1}{x}$. O primeiro teorema fundamental do Cálculo (5.8.1) dá-nos tal função:

$$\int_a^x \frac{1}{t}\, dt$$

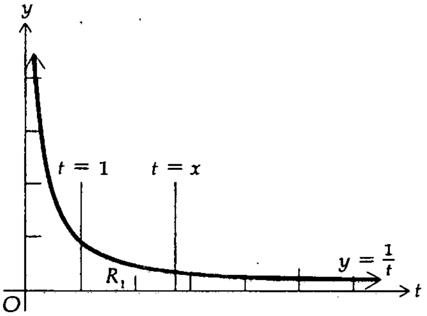


FIGURA 1

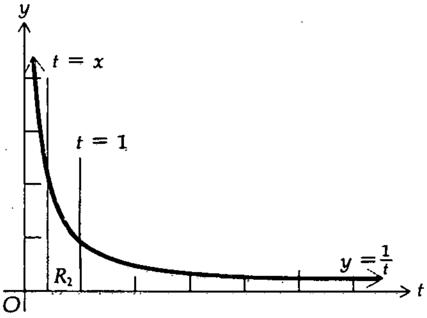


FIGURA 2

onde a pode ser qualquer número real com o mesmo sinal que x. Para interpretar tal função, seja R_1 a região limitada pela curva $y = 1/t$, pelo eixo t, pela reta $t = 1$ à esquerda e pela reta $t = x$ à direita onde $x > 1$. Essa região R_1 está na Figura 1. A medida da área de R_1 é uma função x; vamos chamá-la de $A(x)$ e defini-la pela integral definida

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

Consideremos agora essa integral no caso em que $0 < x < 1$. Da definição, 5.5.5,

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt$$

Então, a integral $\int_x^1 (1/t)\, dt$ representa a medida da área da região R_2 limitada pela curva $y = 1/t$, pelo eixo t, pela reta $t = x$ à esquerda e pela reta $t = 1$ à direita. Assim sendo, $\int_1^x (1/t)\, dt$ será então a medida da área da região R_2 da Figura 2, com sinal negativo.

Para $x = 1$, a integral $\int_1^x (1/t)\, dt$ torna-se $\int_1^1 (1/t)\, dt$, que é igual a zero pela Definição 5.5.6. Nesse caso, as limitações à esquerda e à direita da região coincidem e a medida da área é 0.

Assim, a integral $\int_1^x (1/t)\, dt$ para $x > 0$ pode ser interpretada em termos da medida da área de uma região. Seu valor depende de x, sendo usada para definir a *função logarítmica natural.*

7.3.1 DEFINIÇÃO A **função logarítmica natural** é a função definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \qquad x > 0$$

O domínio da função logarítmica natural é o conjunto de todos os números positivos. Lê-se ln x como o "logaritmo natural de x".

A função logarítmica natural é diferenciável, pois aplicando o primeiro teorema fundamental do Cálculo (5.8.1), obtemos

$$D_x(\ln x) = D_x\left(\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right)$$
$$= \frac{1}{x}$$

Desse resultado e da regra da cadeia temos o teorema a seguir.

7.3.2 TEOREMA Se u for uma função diferenciável de x e $u(x) > 0$, então

$$D_x(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot D_x u$$

EXEMPLO 1 Ache $f'(x)$ se

$$f(x) = \ln(3x^2 - 6x + 8)$$

Solução Do Teorema 7.3.2,

$$f'(x) = \frac{1}{3x^2 - 6x + 8}(6x - 6)$$
$$= \frac{6x - 6}{3x^2 - 6x + 8}$$

EXEMPLO 2 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$y = \ln[(4x^2 + 3)(2x - 1)]$$

Solução Aplicando o Teorema 7.3.2, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(4x^2 + 3)(2x - 1)} \cdot [8x(2x - 1) + 2(4x^2 + 3)]$$
$$= \frac{24x^2 - 8x + 6}{(4x^2 + 3)(2x - 1)} \tag{7}$$

EXEMPLO 3 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$y = \ln\left(\frac{x}{x + 1}\right)$$

Solução Do Teorema 7.3.2,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{x}{x + 1}} \cdot \frac{(x + 1) - x}{(x + 1)^2}$$
$$= \frac{x + 1}{x} \cdot \frac{1}{(x + 1)^2}$$
$$= \frac{1}{x(x + 1)}$$

Devemos enfatizar que para aplicar o Teorema 7.3.2, $u(x)$ deve ser positiva; isto é, um número no domínio da derivada deve estar no domínio da função dada, $\ln u$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** No Exemplo 1, o domínio da função dada é o conjunto de todos os números reais, pois $3x^2 - 6x + 8 > 0$ para todo x. Isto pode ser visto a partir do fato de que a parábola de equação $y = 3x^2 - 6x + 8$ tem seu vértice em $(1, 5)$ e abre-se para cima. Logo, $(6x - 6)/(3x^2 - 6x + 8)$ é a derivada para todos os valores de x.

No Exemplo 2, como $(4x^2 + 3)(2x + 1) > 0$ somente quando $x > \frac{1}{2}$, o domínio da função dada é o intervalo $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Logo, deve ser entendido que (7) é a derivada somente se $x > \frac{1}{2}$.

Como $x/(x + 1) > 0$ se $x < -1$ ou $x > 0$, o domínio da função do Exemplo 3 é $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$; assim $1/[x(x + 1)]$ é a derivada se $x < -1$ ou $x > 0$. ◀

Vamos mostrar que a função logarítmica natural satisfaz as mesmas propriedades do logaritmo, conhecidas da Álgebra Elementar.

7.3.3 TEOREMA $\ln 1 = 0$

Prova Se $x = 1$ na Definição 7.3.1,

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt$$

O segundo membro acima é zero, pela Definição 5.5.6. Assim,

$$\ln 1 = 0$$ ■

O Teorema 7.3.3 corresponde à propriedade dos logaritmos dada por (2). Os três teoremas seguintes correspondem às propriedades dos logaritmos dadas por (3), (4) e (5). A discussão da propriedade (6) será adiada até a Secção 7.5.

7.3.4 TEOREMA Se a e b forem números positivos quaisquer, então

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Prova Considere a função f definida por

$$f(x) = \ln(ax)$$

onde $x > 0$. Então,

$$f'(x) = \frac{1}{ax}(a)$$

$$= \frac{1}{x}$$

Portanto, as derivadas de $\ln(ax)$ e $\ln x$ são iguais. Assim, do Teorema 5.1.2 há uma constante K, tal que

$$\ln(ax) = \ln x + K \quad \text{para todo } x > 0 \tag{8}$$

Para determinar K, seja $x = 1$ nessa equação e temos

$$\ln a = \ln 1 + K$$

Como $\ln 1 = 0$, obtemos $K = \ln a$. Substituindo K por $\ln a$ em (8), obtemos

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a \quad \text{para todo } x > 0$$

Agora, tomando $x = b$, temos

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$ ■

7.3.5 TEOREMA Se a e b forem números positivos quaisquer, então

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Prova Como $a = (a/b) \cdot b$,

$$\ln a = \ln\left(\frac{a}{b} \cdot b\right)$$

Aplicando o Teorema 7.3.4 ao segundo membro da igualdade acima, obtemos

$$\ln a = \ln \frac{a}{b} + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$ ■

7.3.6 TEOREMA Se a for um número positivo qualquer e r um número racional qualquer, então

$$\ln a^r = r \ln a$$

Prova Do Teorema 7.3.2, se r for um número racional qualquer e $x > 0$,

$$D_x(\ln x^r) = \frac{1}{x^r} \cdot r x^{r-1}$$

$$= \frac{r}{x}$$

e

$$D_x(r \ln x) = \frac{r}{x}$$

Logo,

$$D_x(\ln x^r) = D_x(r \ln x)$$

Da igualdade acima vemos que as derivadas de $\ln x^r$ e $r \ln x$ são iguais; assim, do Teorema 5.1.2, decorre que existe uma constante K, tal que

$$\ln x^r = r \ln x + K \quad \text{para todo } x > 0 \tag{9}$$

Para determinar K, vamos substituir x por 1 em (9), obtendo

$$\ln 1^r = r \ln 1 + K$$

Mas ln 1 = 0, logo $K = 0$. Substituindo K por 0 em (9) resulta

$$\ln x^r = r \ln x \quad \text{para todo } x > 0$$

do que segue que se $x = a$, onde a é um número positivo qualquer, então

$$\ln a^r = r \ln a$$ ■

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** No Exemplo 2, se o Teorema 7.3.4 for aplicado antes do cálculo da derivada, teremos

$$y = \ln(4x^2 + 3) + \ln(2x - 1) \tag{10}$$

O domínio da função definida pela igualdade acima é o intervalo $(\frac{1}{2}, +\infty)$, que é igual ao domínio da função dada. De (10),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{4x^2 + 3} + \frac{2}{2x - 1}$$

e combinando as frações, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x(2x - 1) + 2(4x^2 + 3)}{(4x^2 + 3)(2x - 1)}$$

que é equivalente à primeira linha da solução do Exemplo 2. ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se aplicarmos o Teorema 7.3.5 antes de encontrar a derivada no Exemplo 3, temos

$$y = \ln x - \ln(x + 1) \tag{11}$$

Como ln x é definido somente para $x > 0$ e $\ln(x + 1)$ é definido somente para $x > -1$, o domínio da função definida por (11) é o intervalo $(0, +\infty)$. Mas o domínio da função dada no Exemplo 3 consiste nos dois intervalos $(-\infty, -1)$ e $(0, +\infty)$. Calculando a derivada de (11), teremos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}\\ &= \frac{1}{x(x + 1)}\end{aligned}$$

mas lembre-se de que x deve ser maior do que 0; enquanto que na solução do Exemplo 3 estão incluídos valores de x menores do que -1. ◀

A Ilustração 3 mostra que devemos ter cuidado ao aplicar os Teoremas 7.3.4, 7.3.5 e 7.3.6 às funções envolvendo o logaritmo natural.

EXEMPLO 4 Ache $f'(x)$ se

$$f(x) = \ln(2x - 1)^3$$

Solução Do Teorema 7.3.6,

$$f(x) = 3 \ln(2x - 1)$$

Observe que $\ln(2x - 1)^3$ e $3\ln(2x - 1)$ têm o mesmo domínio $x > \frac{1}{2}$. Aplicando o Teorema 7.3.2 resulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot \frac{1}{2x-1} \cdot 2 \\ &= \frac{6}{2x-1} \end{aligned}$$

Para fazer um esboço do gráfico da função logarítmica natural precisamos considerar primeiro algumas propriedades dessa função.

Seja f a função definida por $f(x) = \ln x$, isto é,

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x > 0$$

O domínio de f é o conjunto de todos os números positivos. A função f é diferenciável para todo x em seu domínio, e

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Como f é diferenciável para todo $x > 0$, f é contínua para todo $x > 0$. Da igualdade acima, segue que $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$ e, portanto, f é uma função crescente.

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Observe que $f''(x) < 0$ quando $x > 0$. Logo, o gráfico de $y = f(x)$ é côncavo para baixo em todo ponto. Como $f(1) = \ln 1$ e $\ln 1 = 0$, o intercepto x do gráfico é 1.

Podemos determinar valores numéricos aproximados para ln 2 usando a equação

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$$

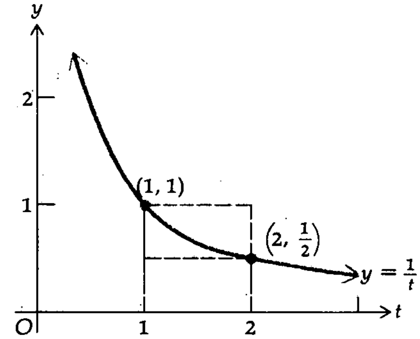


FIGURA 3

e interpretando a integral definida como o número de unidades de área da região que aparece na Figura 3. Dessa figura, vemos que ln 2 está entre as medidas das áreas de retângulos, cada um tendo uma base de 1 unidade de comprimento e alturas com $\frac{1}{2}$ e 1 unidade; isto é,

$$0{,}5 < \ln 2 < 1$$

Uma das desigualdades pode ser obtida analiticamente, usando o Teorema 5.6.8, procedendo da seguinte forma: seja $f(t) = 1/t$ e $g(t) = \frac{1}{2}$. Então, $f(t) \geqslant g(t)$ para todo t em [1, 2]. Como f e g são contínuas em [1, 2], elas são integráveis em [1, 2] e, do Teorema 5.6.8,

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \geqslant \int_1^2 \frac{1}{2}\,dt$$

$$\ln 2 \geqslant \tfrac{1}{2} \qquad (12)$$

Da mesma forma, se $f(t) = 1/t$ e $h(t) = 1$, então $h(t) \geqslant f(t)$ para todo t em [1, 2]. Como h e f são contínuas em [1, 2], elas são integráveis no intervalo e, usando novamente o Teorema 5.6.8, obtemos

$$\int_1^2 1\,dt \geqslant \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$$

$$1 \geqslant \ln 2$$

Combinando essa desigualdade com (12), obtemos

$$0{,}5 \leqslant \ln 2 \leqslant 1 \tag{13}$$

O número 0,5 é um limite inferior de ln 2, enquanto que 1 é um limite superior. Da mesma forma, podemos obter um limite inferior e outro superior do logaritmo natural de qualquer número real positivo. Mais tarde iremos aprender, aplicando séries infinitas, como calcular o logaritmo natural de qualquer número real positivo, aproximado com um número de casas decimais desejado.

O valor de ln 2 com cinco casas decimais é dado por

$$\ln 2 \approx 0{,}69315$$

Usando esse valor de ln 2 e aplicando o Teorema 7.3.6 podemos encontrar um valor aproximado do logaritmo natural de qualquer potência de 2. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \ln 4 &= \ln 2^2 \\ &= 2 \ln 2 \\ &\approx 1{,}3863 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ln 8 &= \ln 2^3 \\ &= 3 \ln 2 \\ &\approx 2{,}0795 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ln \tfrac{1}{2} &= \ln 2^{-1} \\ &= -1 \cdot \ln 2 \\ &\approx -0{,}69315 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \ln \tfrac{1}{4} &= \ln 2^{-2} \\ &= -2 \ln 2 \\ &\approx -1{,}3863 \end{aligned}$$

Uma calculadora com uma tecla $\boxed{\ln}$ também pode ser usada para obter valores da função logarítmica natural.

Vamos determinar agora o comportamento da função logarítmica natural para grandes valores de x, considerando $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x$.

Como a função logarítmica natural é crescente, se p for qualquer número positivo, temos

$$\text{se} \quad x > 2^p \quad \text{então} \quad \ln x > \ln 2^p \tag{14}$$

Do Teorema 7.3.6,

$$\ln 2^p = p \ln 2$$

Substituindo essa equação em (14) teremos

$$\text{se} \quad x > 2^p \quad \text{então} \quad \ln x > p \ln 2$$

Como de (12) $\ln 2 \geqslant \frac{1}{2}$, temos, do estabelecido acima, que

$$\text{se} \quad x > 2^p \quad \text{então} \quad \ln x > \tfrac{1}{2} p$$

Tomando $p = 2n$, onde $n > 0$, temos

$$\text{se} \quad x > 2^{2n} \quad \text{então} \quad \ln x > n$$

Dessa afirmação, tomando $N = 2^{2n}$, para qualquer $n > 0$

$$\text{se} \quad x > N \quad \text{então} \quad \ln x > n$$

Assim, podemos concluir que

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \tag{15}$$

Para determinar o comportamento da função logarítmica natural para valores de x próximos de zero, vamos investigar $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x$. Como $\ln x = \ln(x^{-1})^{-1}$,

$$\ln x = -\ln \frac{1}{x}$$

A expressão "$x \to 0^+$" é equivalente a "$1/x \to +\infty$"; assim, dessa equação escrevemos

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\lim_{1/x \to +\infty} \ln \frac{1}{x} \tag{16}$$

De (15) temos

$$\lim_{1/x \to +\infty} \ln \frac{1}{x} = +\infty$$

Logo, desse resultado e de (16) temos que

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \tag{17}$$

De (17) e (15) e do teorema do valor intermediário (2.7.8), concluímos que a imagem da função logarítmica natural é o conjunto de todos os números reais. De (17), concluímos que o gráfico da função logarítmica natural é assintótico à parte negativa do eixo y no quarto quadrante. As propriedades da função logarítmica natural estão resumidas a seguir:

(i) O domínio é o conjunto de todos os números positivos.
(ii) A imagem é o conjunto de todos os números reais.
(iii) A função é crescente em todo o seu domínio.
(iv) A função é contínua em todos os números de seu domínio.
(v) O gráfico da função é côncavo para baixo em todos os pontos.
(vi) O gráfico da função é assintótico à parte negativa do eixo y no quarto quadrante.

Usando essas propriedades e colocando no gráfico alguns pontos com um segmento da reta tangente nesses pontos, podemos esboçar o gráfico da função logarítmica natural. Na Figura 4 foram colocados no gráfico os pontos com abscissas $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4 e 8. A inclinação da reta tangente é encontrada pela fórmula $D_x(\ln x) = 1/x$.

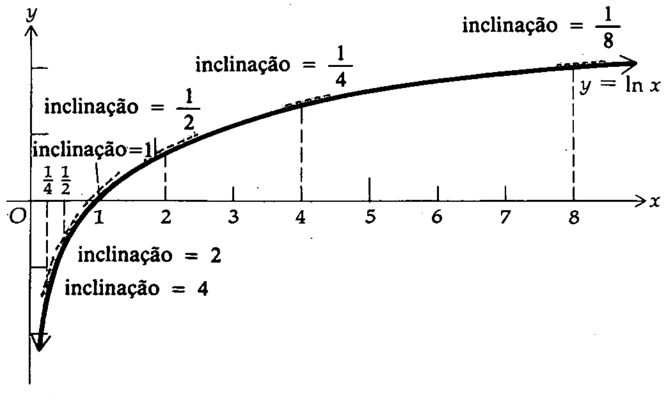


FIGURA 4

EXERCÍCIOS 7.3

Nos Exercícios de 1 a 26, diferencie a função dada e simplifique o resultado.

1. $f(x) = \ln(4 + 5x)$
2. $g(x) = \ln(1 + 4x^2)$
3. $h(x) = \ln\sqrt{4 + 5x}$
4. $f(x) = \ln(8 - 2x)$
5. $f(t) = \ln(3t + 1)^2$
6. $h(x) = \ln(8 - 2x)^5$
7. $g(t) = \ln^2(3t + 1)$
8. $G(x) = \ln\sqrt{1 + 4x^2}$
9. $f(x) = \ln\sqrt[3]{4 - x^2}$
10. $g(y) = \ln(\ln y)$
11. $F(y) = \ln(\text{sen } 5y)$
12. $f(x) = x \ln x$
13. $f(x) = \cos(\ln x)$
14. $g(x) = \ln \cos\sqrt{x}$
15. $G(x) = \ln(\sec 2x + \text{tg } 2x)$
16. $h(y) = \text{cosec}(\ln y)$
17. $f(x) = \ln\sqrt{\text{tg } x}$
18. $f(t) = \ln\sqrt[4]{\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}}$
19. $f(w) = \ln\sqrt{\dfrac{3w + 1}{2w - 5}}$
20. $f(x) = \ln[(5x - 3)^4(2x^2 + 7)^3]$
21. $h(x) = \dfrac{x}{\ln x}$
22. $g(x) = \ln(\cos 2x + \text{sen } 2x)$
23. $g(x) = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x + 1}{x^2 + 1}}$
24. $f(x) = \sqrt[3]{\ln x^3}$
25. $F(x) = \sqrt{x + 1} - \ln(1 + \sqrt{x + 1})$
26. $G(x) = x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$

Nos Exercícios de 27 a 32, encontre $\dfrac{dy}{dx}$ *por derivação implícita.*

27. $\ln xy + x + y = 2$
28. $\ln\dfrac{y}{x} + xy = 1$
29. $x = \ln(x + y + 1)$
30. $\ln(x + y) - \ln(x - y) = 4$
31. $x + \ln x^2y + 3y^2 = 2x^2 - 1$
32. $x \ln y + y \ln x = xy$

33. Faça um esboço do gráfico de $y = \ln x$, colocando no gráfico os pontos com abscissas $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1, 3 e 9 e use $\ln 3 \approx 1{,}1$. Em cada um dos cinco pontos, ache a inclinação da reta tangente e traçe um segmento dessa reta.

Nos Exercícios de 34 a 41, faça um esboço do gráfico da curva com a equação dada.

34. $x = \ln y$
35. $y = \ln(-x)$
36. $y = \ln(x + 1)$
37. $y = \ln|x|$
38. $y = \ln\dfrac{1}{x - 1}$
39. $y = x - \ln x$
40. $y = x + 2 \ln x$
41. $y = \ln \text{sen } x$

42. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = \ln x$ no ponto de abscissa 2.

43. Ache uma equação da reta normal à curva $y = \ln x$ que seja paralela à reta $x + 2y - 1 = 0$.

44. Ache uma equação da reta normal ao gráfico de $y = x \ln x$ que seja perpendicular à reta com a equação $x - y + 7 = 0$.

45. Ache uma equação da reta tangente ao gráfico de $y = \ln(4x^2 - 3)^5$ no ponto cuja abscissa é 1.

46. Uma partícula move-se ao longo de uma reta, de acordo com a lei do movimento $s = (t + 1)^2 \ln(t + 1)$, onde s é a distância orientada da partícula ao ponto inicial em t s. Ache a velocidade e a aceleração quando $t = 3$.

47. Num cabo telegráfico, a medida da velocidade escalar do sinal é proporcional a $x^2 \ln(1/x)$, onde x é a razão entre a medida do raio do núcleo do cabo e a sua espessura. Ache o valor de $\ln x$ para o qual a velocidade escalar do sinal seja máxima.

48. Um fabricante de geradores elétricos começa suas operações em 1º de janeiro de 1980. Durante o primeiro ano não houve vendas, pois a fábrica concentrou esforços em pesquisas e no desenvolvimento do produto. Depois do primeiro ano as vendas cresceram constantemente, de acordo com a equação $y = x \ln x$, onde x é o número de anos durante os quais a fábrica esteve operando e y é o número, expresso em milhões, do volume de vendas. (a) Faça um esboço do gráfico da equação. Determine a taxa segundo a qual as vendas estavam crescendo em (b) 1º de janeiro de 1985 e (c) em 1º de janeiro de 1990.

49. Uma indústria determinou que se suas despesas semanais com propaganda forem x, então sendo S seu faturamento semanal proveniente das vendas, $S = 4.000 \ln x$. (a) Determine a taxa de variação do faturamento em relação à verba de propaganda quando esta última é de $ 800 semanais. (b) Se a verba de propaganda semanal for aumentada para $ 950, qual será o aumento aproximado no faturamento semanal das vendas?

50. A densidade linear de uma barra num ponto a x cm de um extremo é $2/(1 + x)$ g/cm. Se a barra tiver 15 cm de comprimento, ache a massa e o centro de massa da barra.

51. Prove que $x - 1 - \ln x > 0$ e $1 - \ln x - 1/x < 0$ para todo $x > 0$ e $x \neq 1$, estabelecendo assim a desigualdade

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

para todo $x > 0$ e $x \neq 1$. (*Sugestão*: faça $f(x) = x - 1 - \ln x$ e $g(x) = 1 - \ln x - 1/x$, e determine os sinais $f'(x)$ e $g'(x)$ nos intervalos $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$.)

52. Dê a interpretação geométrica da desigualdade do Exercício 51, traçando no mesmo par de eixos esboços dos gráficos das funções f, g e h definidas pelas relações:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} \qquad g(x) = \ln x \qquad h(x) = x - 1$$

53. Use o resultado do Exercício 51 para provar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

54. Estabeleça o limite do Exercício 53, usando a definição de derivada para encontrar $F'(0)$ para a função F dada por $F(x) = \ln(1 + x)$.

55. Prove que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$. (*Sugestão*: mostre primeiro que se $x > 0$, $x > \ln x$ e use esse resultado para mostrar que se $0 < x < 1$, $-2\sqrt{x} < x \ln x < 0$. Então, use o teorema do confronto de limites.)

56. Use o resultado do Exercício 55 para traçar um esboço do gráfico de $f(x) = x \ln x$.

7.4 DIFERENCIAÇÃO LOGARÍTMICA E INTEGRAIS QUE RESULTAM NA FUNÇÃO LOGARÍTMICA NATURAL

Para a discussão tanto da diferenciação logarítmica como das integrais que resultam na função logarítmica natural, precisamos de uma fórmula para $D_x(\ln|x|)$. Para encontrar essa fórmula usando o Teorema 7.3.2, primeiro substituímos $|x|$ por $\sqrt{x^2}$. Assim,

$$\begin{aligned} D_x(\ln|x|) &= D_x(\ln\sqrt{x^2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot D_x(\sqrt{x^2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{x}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Dessa fórmula e da regra da cadeia obtemos o teorema a seguir.

7.4.1 TEOREMA Se u for uma função de x, diferenciável,

$$D_x(\ln|u|) = \frac{1}{u} \cdot D_x u$$

No Exercício 37 da série de Exercícios 7.3, foi pedido que você traçasse o gráfico de $y = \ln|x|$. Esse gráfico aparece na Figura 1. A inclinação da reta tangente em cada ponto (x, y) do gráfico é $\frac{1}{x}$.

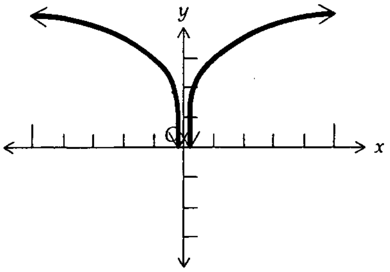


FIGURA 1

EXEMPLO 1 Ache $f'(x)$ se

$$f(x) = \ln|x^4 + x^3|$$

Solução Do Teorema 7.4.1

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^4 + x^3}(4x^3 + 3x^2) \\ &= \frac{x^2(4x + 3)}{x^4 + x^3} \\ &= \frac{4x + 3}{x^2 + x} \end{aligned}$$

O exemplo a seguir ilustra como as propriedades da função logarítmica natural, dadas nos Teoremas 7.3.4, 7.3.5 e 7.3.6, podem simplificar o trabalho envolvido na diferenciação de expressões complicadas incluindo produtos, quocientes e potências.

EXEMPLO 2 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$$

Solução Da equação dada,

$$|y| = \left|\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}\right|$$
$$= \frac{|\sqrt[3]{x+1}|}{|x+2|\,|\sqrt{x+3}|}$$

Tomando o logaritmo natural e aplicando as propriedades de logaritmos, obtemos

$$\ln|y| = \tfrac{1}{3}\ln|x+1| - \ln|x+2| - \tfrac{1}{2}\ln|x+3|$$

Diferenciando ambos os membros em relação a x e aplicando o Teorema 7.4.1, iremos obter

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+3)}$$

Multiplicando ambos os membros por y, obteremos

$$\frac{dy}{dx} = y\cdot\frac{2(x+2)(x+3) - 6(x+1)(x+3) - 3(x+1)(x+2)}{6(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Substituindo y pelo valor dado, teremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^{1/3}}{(x+2)(x+3)^{1/2}}\cdot\frac{2x^2+10x+12-6x^2-24x-18-3x^2-9x-6}{6(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$= \frac{-7x^2-23x-12}{6(x+1)^{2/3}(x+2)^2(x+3)^{3/2}}$$

O processo usado no Exemplo 2 é chamado de **diferenciação logarítmica** e foi desenvolvido por Johann Bernoulli (1667-1748) em 1697.

Do Teorema 7.4.1 obtemos o teorema a seguir, para integração indefinida.

7.4.2 TEOREMA

$$\boxed{\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C}$$

Dos Teoremas 7.4.2 e 5.1.8, sendo n um número real qualquer,

$$\boxed{\int u^n\,du = \begin{cases} \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C & \text{se } n \neq -1 \\ \ln|u| + C & \text{se } n = -1 \end{cases}}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$$

Solução

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{x^3+1}$$

$$= \tfrac{1}{3}\ln|x^3+1| + C$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int_0^2 \frac{x^2+2}{x+1}\,dx$$

Solução Como $(x^2 + 2)/(x + 1)$ é uma fração imprópria, dividimos o numerador pelo denominador, obtendo

$$\frac{x^2+2}{x+1} = x - 1 + \frac{3}{x+1}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^2+2}{x+1}\,dx &= \int_0^2 \left(x - 1 + \frac{3}{x+1}\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 - x + 3\ln|x+1|\Big]_0^2 \\ &= 2 - 2 + 3\ln 3 - 3\ln 1 \\ &= 3\ln 3 - 3\cdot 0 \\ &= 3\ln 3 \end{aligned}$$

Como $3 \ln 3 = \ln 3^3$, a resposta pode ser escrita como $\ln 27$.

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

Solução Seja

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$$

Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x}\,dx &= \int u\,du\\ &= \frac{u^2}{2} + C\\ &= \tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C\end{aligned}$$

Adiamos até agora a obtenção das fórmulas para integrais indefinidas das funções tangente, co-tangente, secante e co-secante, pois necessitávamos do uso da função logarítmica natural.

Uma fórmula para a integral indefinida da função tangente é deduzida do seguinte modo: como

$$\int \operatorname{tg} u\,du = \int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}\,du$$

seja

$$v = \cos u \qquad dv = -\operatorname{sen} u\,du$$

e obtemos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} u\,du &= -\int \frac{dv}{v}\\ &= -\ln|v| + C\\ &= -\ln|\cos u| + C\\ &= \ln|(\cos u)^{-1}| + C\\ &= \ln|\sec u| + C\end{aligned}$$

Vamos apresentar formalmente o resultado sob a forma de teorema.

7.4.3 TEOREMA

$$\boxed{\int \operatorname{tg} u\,du = \ln|\sec u| + C}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1**

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} 3x\,dx &= \tfrac{1}{3}\int \operatorname{tg} 3x(3\,dx)\\ &= \tfrac{1}{3}\ln|\sec 3x| + C\end{aligned}$$ ◀

O teorema que dá a integral indefinida da função co-tangente tem uma demonstração similar àquela do Teorema 7.4.3. Veja o Exercício 45.

7.4.4 TEOREMA

$$\boxed{\int \operatorname{cotg} u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C}$$

Para obter a fórmula para $\int \sec u \, du$ multiplicamos o numerador e o denominador do integrando por $\sec u + \operatorname{tg} u$, obtendo

$$\begin{aligned}\int \sec u \, du &= \int \frac{\sec u(\sec u + \operatorname{tg} u)}{\sec u + \operatorname{tg} u}\, du \\ &= \int \frac{(\sec^2 u + \sec u \operatorname{tg} u)}{\sec u + \operatorname{tg} u}\, du\end{aligned}$$

Seja

$$v = \sec u + \operatorname{tg} u \qquad dv = (\sec u \operatorname{tg} u + \sec^2 u)\, du$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}\int \sec u \, du &= \int \frac{dv}{v} \\ &= \ln|v| + C \\ &= \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C\end{aligned}$$

Assim, acabamos de provar o teorema enunciado a seguir.

7.4.5 TEOREMA

$$\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$$

Na Secção 9.7 iremos obter uma fórmula para a integral da função secante por um método que não depende do recurso de multiplicarmos o numerador e o denominador do integrando por $\sec u + \operatorname{tg} u$ usado para provar o Teorema 7.4.5.

Uma fórmula para $\int \operatorname{cosec} u \, du$ pode ser deduzida multiplicando o numerador e o denominador do integrando por $\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u$ e procedendo da mesma forma que no Teorema 7.4.5. Outro procedimento é tomar $\int \operatorname{cosec} u \, du = \int \sec(u - \frac{\pi}{2})\, du$ e então usar o Teorema 7.4.5 e as identidades trigonométricas. Será pedido que o leitor faça essas deduções no Exercício 45. A fórmula obtida é dada no próximo teorema.

7.4.6 TEOREMA

$$\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2**

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x} &= \int \operatorname{cosec} 2x \, dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int \operatorname{cosec} 2x(2\, dx) \\ &= \tfrac{1}{2} \ln|\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{cotg} 2x| + C\end{aligned}$$ ◀

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int_{\pi/8}^{\pi/6} (\operatorname{cosec} 4x - \operatorname{cotg} 4x)\, dx$$

Solução

$$\int_{\pi/8}^{\pi/6} (\text{cosec } 4x - \text{cotg } 4x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{4} \int_{\pi/8}^{\pi/6} (\text{cosec } 4x - \text{cotg } 4x)(4\, dx)$$

$$= \tfrac{1}{4}\Big[\ln|\text{cosec } 4x - \text{cotg } 4x| - \ln|\text{sen } 4x|\Big]_{\pi/8}^{\pi/6}$$

$$= \tfrac{1}{4}[(\ln|\text{cosec } \tfrac{2}{3}\pi - \text{cotg } \tfrac{2}{3}\pi| - \ln|\text{sen } \tfrac{2}{3}\pi|) - (\ln|\text{cosec } \tfrac{1}{2}\pi - \text{cotg } \tfrac{1}{2}\pi| - \ln|\text{sen } \tfrac{1}{2}\pi|)]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\right) - (\ln|1 - 0| - \ln|1|)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\ln \frac{3}{\sqrt{3}} - \ln \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (0 - 0)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln \sqrt{3} - \ln \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right] \qquad \text{(pelo Teorema 7.3.5)}$$

$$= \tfrac{1}{4} \ln 2$$

EXERCÍCIOS 7.4

Nos Exercícios de 1 a 8, use o Teorema 7.4.1 para encontrar $\dfrac{dy}{dx}$.

1. $y = \ln|x^3 + 1|$ **2.** $y = \ln|x^2 - 1|$

3. $y = \ln|\cos 3x|$ **4.** $y = \ln|\sec 2x|$

5. $y = \ln|\text{tg } 4x + \sec 4x|$ **6.** $y = \ln|\text{cotg } 3x - \text{cosec } 3x|$

7. $y = \ln\left|\dfrac{3x}{x^2 + 4}\right|$ **8.** $y = \text{sen}(\ln|2x + 1|)$

Nos Exercícios de 9 a 14, ache $\dfrac{dy}{dx}$ *por diferenciação logarítmica.*

9. $y = x^2(x^2 - 1)^3(x + 1)^4$

10. $y = (5x - 4)(x^2 + 3)(3x^3 - 5)$

11. $y = \dfrac{x^2(x - 1)^2(x + 2)^3}{(x - 4)^5}$

12. $y = \dfrac{x^5(x + 2)}{x - 3}$ **13.** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{\sqrt[5]{x^7 + 1}}$ **14.** $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{(x + 1)^{2/3}}$

Nos Exercícios de 15 a 36, calcule a integral indefinida.

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 - 2x}$ **16.** $\displaystyle\int \frac{dx}{7x + 10}$ **17.** $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2 + 4}\, dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x}{2 - x^2}\, dx$ **19.** $\displaystyle\int \frac{3x^2}{5x^3 - 1}\, dx$ **20.** $\displaystyle\int \frac{2x - 1}{x(x - 1)}\, dx$

21. $\displaystyle\int \frac{\cos t}{1 + 2\,\text{sen}\, t}\, dt$ **22.** $\displaystyle\int \frac{\text{sen } 3t}{\cos 3t - 1}\, dt$

23. $\displaystyle\int (\text{cotg } 5x + \text{cosec } 5x)\, dx$ **24.** $\displaystyle\int (\text{tg } 2x - \sec 2x) dx$

25. $\displaystyle\int \frac{2 - 3\,\text{sen } 2x}{\cos 2x}\, dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{\cos 3x + 3}{\text{sen } 3x}\, dx$

27. $\displaystyle\int \frac{2x^3}{x^2 - 4}\, dx$ **28.** $\displaystyle\int \frac{5 - 4y^2}{3 + 2y}\, dy$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x}$ **30.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}$

31. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 3x}{x}\, dx$ **32.** $\displaystyle\int \frac{(2 + \ln^2 x)}{x(1 - \ln x)}\, dx$

33. $\displaystyle\int \frac{2 \ln x + 1}{x[(\ln x)^2 + \ln x]}\, dx$ **34.** $\displaystyle\int \frac{3x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2}{x^3 + 1}\, dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\text{tg}(\ln x)}{x}\, dx$ **36.** $\displaystyle\int \frac{\text{cotg}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$

Nos Exercícios de 37 a 44, calcule a integral definida.

37. $\displaystyle\int_3^5 \frac{2x}{x^2 - 5}\, dx$ **38.** $\displaystyle\int_4^5 \frac{x}{4 - x^2}\, dx$

39. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2t + 3}{t + 1}\, dt$ **40.** $\displaystyle\int_1^5 \frac{4z^3 - 1}{2z - 1}\, dz$

41. $\int_0^{\pi/6} (\text{tg } 2x + \sec 2x)dx$

42. $\int_{\pi/12}^{\pi/6} (\text{cotg } 3x + \text{cosec } 3x)\, dx$

43. $\int_2^4 \frac{dx}{x \ln^2 x}$

44. $\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\, dx$

45. (a) Prove o Teorema 7.4.4. (b) Prove o Teorema 7.4.6 multiplicando o numerador e o denominador do integrando por cosec u − cotg u. (c) Prove o Teorema 7.4.6, tomando $\int \text{cosec } u\, du = \int \sec(u - \frac{\pi}{2})\, du$ e usando o Teorema 7.4.5 e as identidades trigonométricas.

46. Prove que $\int \text{cosec } u\, du = -\ln|\text{cosec } u + \text{cotg } u| + C$ de duas maneiras: (a) usando o Teorema 7.4.6; (b) multiplicando o numerador e o denominador do integrando por cosec u + cotg u.

Nos Exercícios de 47 a 55, dê o valor exato do número encontrado e, então, obtenha uma aproximação desse número com três casas decimais, usando uma calculadora.

47. Se $f(x) = 1/x$, ache a média dos valores de f no intervalo $[1, 5]$.

48. Se $f(x) = (x + 2)/(x - 3)$, ache a média dos valores de f no intervalo $[4, 6]$.

49. Use a lei de Boyle para a expansão de um gás (veja o Exercício 23 nos Exercícios 3.4) para encontrar a pressão média em relação ao volume quando esse cresce de 4 m^3 para 8 m^3 e a pressão é de 2.000 N/m^2 quando o volume é de 4 m^3.

50. Ache a área da região limitada pela curva $y = x/(2x^2 + 4)$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 4$.

51. Ache a área da região limitada pela curva $y = 2/(x - 3)$, pelo eixo x e pelas retas $x = 4$ e $x = 5$.

52. Ache o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = 1 - 3/x$, pelo eixo x e pela reta $x = 1$ gira em torno do eixo x.

53. Ache o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = 1 + 2/\sqrt{x}$, pelo eixo x, e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$ gira em torno do eixo x.

54. Ache o comprimento do arco da curva $y = \ln \sec x$ de $x = 0$ a $x = \frac{1}{4}\pi$.

55. Ache o comprimento do arco da curva $y = \ln \text{cosec } x$ de $x = \frac{1}{6}\pi$ a $x = \frac{1}{2}\pi$.

56. Prove que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ por dois métodos. (a) Seja $x = \frac{1}{t}$ e use o resultado do Exercício 55 nos Exercícios 7.3. (b) Primeiro prove que $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \geqslant \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ aplicando o Teorema 5.6.8. Então, use o teorema do "sanduíche".

7.5 A FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL

Como a função logarítmica natural é crescente em todo o seu domínio, então pelos Teoremas 7.1.5 e 7.2.1 ela tem uma inversa que também é crescente. A função inversa do logaritmo natural é chamada de *função exponencial natural*, a qual passaremos a definir.

7.5.1 DEFINIÇÃO

A função exponencial natural é a inversa da função logarítmica natural; assim sendo, ela é definida por

$$\exp(x) = y \quad \text{se e somente se} \quad x = \ln y$$

A notação $\exp(x)$ deve ser entendida como "o valor da função exponencial natural em x".

Como a imagem da função logarítmica natural é o conjunto de todos os números reais, o domínio da função exponencial natural é o conjunto de todos os números reais. A imagem da função exponencial natural é o conjunto dos números positivos, pois esse é o domínio da função logarítmica natural.

Como as funções logarítmica e exponencial naturais são inversas uma da outra, segue do Teorema 7.1.4 que

$$\ln(\exp(x)) = x \quad \text{e} \quad \exp(\ln x) = x \qquad (1)$$

Queremos definir agora a^x, onde a é um número positivo e x, um número irracional. Para chegar a uma definição razoável, consideremos o caso a^r, onde $a > 0$ e r é um número racional. Colocando a^r no lugar de x, na equação $x = \exp(\ln x)$, temos

$$a^r = \exp[\ln(a^r)]$$

Mas, pelo Teorema 7.3.6, $\ln a^r = r \ln a$; assim, da relação anterior

$$a^r = \exp(r \ln a)$$

Como o segundo membro dessa relação tem significado sendo r um número real qualquer, vamos usar tal fato em nossa definição.

7.5.2 DEFINIÇÃO Se a for um número positivo qualquer e x for um número real qualquer, definimos

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

O Teorema 7.3.6 afirma que se a for um número positivo e r um número racional qualquer, então $\ln a^r = r \ln a$. Devido à Definição 7.5.2, essa igualdade é válida também quando r for um número real qualquer, e vamos estabelecer formalmente esse fato sob a forma de teorema.

7.5.3 TEOREMA Se a for um número positivo qualquer e x um número real qualquer, então,

$$\ln a^x = x \ln a$$

Prova Da Definição 7.5.2,

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

Logo, da Definição 7.5.1,

$$\ln a^x = x \ln a$$ ■

A seguir será dada a definição de um dos números mais importantes em Matemática.

7.5.4 DEFINIÇÃO O número e é definido pela fórmula

$$e = \exp 1$$

A letra e foi escolhida em homenagem ao matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783).

O número e é um número *transcendental*, isto é, não pode ser expresso como raiz de qualquer polinômio com coeficientes inteiros. O número π é outro exemplo de número transcendental. A demonstração de que e é transcendental foi dada pela primeira vez em 1873 por Charles Hermite. O valor do número e pode ser expresso com qualquer precisão desejada. No Capítulo 13 iremos aprender um método para fazer isso. O valor de e com sete casas decimais é 2,7182818. Assim,

$$\boxed{e \approx 2{,}7182818}$$

A importância do número e ficará clara à medida que avançarmos neste capítulo.

7.5.5 TEOREMA $\ln e = 1$

Prova Pela Definição 7.5.4,

$$e = \exp 1$$

Logo,

$$\ln e = \ln(\exp 1)$$

Como as funções logarítmica e exponencial naturais são inversas uma da outra, segue que o segundo membro da igualdade acima é 1. Assim,

$$\ln e = 1$$ ■

Observe que o Teorema 7.5.5 corresponde à propriedade (6) da Secção 7.3. Assim sendo, acabamos de demonstrar que a função ln satisfaz as propriedades (2) – (6) dos logaritmos, dadas na Secção 7.3.

7.5.6 TEOREMA Para todos os valores de x,

$$\exp(x) = e^x$$

Prova Pela Definição 7.5.2, com $a = e$,

$$e^x = \exp(x \ln e)$$

Mas pelo Teorema 7.5.5, $\ln e = 1$ e substituindo na expressão acima, obtemos

$$e^x = \exp(x)$$

Daqui em diante escreveremos e^x em vez de $\exp(x)$ e assim, da Definição 7.5.1,

$$\boxed{e^x = y \qquad \text{se e somente se} \qquad x = \ln y} \tag{2}$$

Com e^x em lugar de $\exp(x)$, (1) torna-se

$$\boxed{\ln e^x = x \qquad \text{e} \qquad e^{\ln x} = x}$$

Se substituirmos $\exp(x \ln a)$ por $e^{x \ln a}$ na equação da Definição 7.5.2, teremos

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a} \qquad \text{para todo } a > 0}$$

Essa igualdade pode ser usada para calcular a^x quando x for um número real qualquer. Os valores das potências de e podem também ser obtidos com uma calculadora que tenha a tecla $\boxed{e^x}$. Se a sua calculadora não tiver a tecla $\boxed{e^x}$, as potências de e poderão ser obtidas, pressionando a tecla $\boxed{\text{INV}}$, seguida pela tecla $\boxed{\ln}$. Essas duas operações sucessivas dão o valor de e^x, pois as funções exponencial e logarítmica naturais são inversas uma da outra.

EXEMPLO 1 Calcule o valor de $2^{\sqrt{3}}$ com duas casas decimais.

Solução Como $a^x = e^{x \ln a}$ se $a > 0$,

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{3}} &= e^{\sqrt{3} \ln 2} \\ &\approx e^{1{,}732(0{,}6931)} \\ &\approx e^{1{,}200} \\ &\approx 3{,}32 \end{aligned}$$

Como $0 = \ln 1$, temos de (2) que

$$\boxed{e^0 = 1}$$

Vamos estabelecer agora as propriedades da função exponencial natural através de teoremas.

7.5.7 TEOREMA Se a e b forem números reais quaisquer, então

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

Prova Seja $A = e^a$ e $B = e^b$. Então, de (2)

$$\ln A = a \quad \text{e} \quad \ln B = b \tag{3}$$

Do Teorema 7.3.4,

$$\ln AB = \ln A + \ln B$$

Substituindo (3) nessa equação, iremos obter

$$\ln AB = a + b$$

Assim,

$$e^{\ln AB} = e^{a+b}$$

Como $e^{\ln x} = x$, o segundo membro da igualdade acima é AB; assim,

$$AB = e^{a+b}$$

Substituindo A e B pelos seus valores, iremos obter

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$ ■

7.5.8 TEOREMA Se a e b forem números reais quaisquer, então

$$e^a \div e^b = e^{a-b}$$

A demonstração é análoga àquela do Teorema 7.5.7, onde o Teorema 7.3.4 é substituído pelo Teorema 7.3.5.

7.5.9 TEOREMA Se a e b forem números reais quaisquer, então

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

Prova Na igualdade $x = e^{\ln x}$, seja $x = (e^a)^b$, temos

$$(e^a)^b = e^{\ln(e^a)^b}$$

Aplicando o Teorema 7.5.3 à exponencial do segundo membro da igualdade acima, iremos obter

$$(e^a)^b = e^{b \ln e^a}$$

Mas $\ln e^a = a$, e portanto,

$$(e^a)^b = e^{ab}$$ ■

Como a função exponencial natural é a inversa da função logarítmica natural, segue do Teorema 7.2.3 que ela é diferenciável. Obtemos o teorema para a derivada da função exponencial natural por derivação implícita. Seja

$$y = e^x$$

Então, de (2), segue que,

$$x = \ln y$$

Vamos derivar ambos os membros da igualdade acima implicitamente em relação a x para obter

$$1 = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Substituindo y por e^x, obtemos

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

O próximo teorema segue dessa relação e da regra da cadeia.

7.5.10 TEOREMA Se u for uma função de x, diferenciável,

$$D_x(e^u) = e^u\, D_x u$$

Observe que a derivada da função definida por $f(x) = ke^x$, onde k é uma constante, é ela mesma. A única função que encontramos antes com essa propriedade é a função constante zero; na realidade, ela é um caso particular de $f(x) = ke^x$ quando $k = 0$. Podemos provar que a função mais geral, igual à sua própria derivada, é dada por $f(x) = ke^x$ (veja o Exercício 63).

EXEMPLO 2 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$y = e^{1/x^2}$$

Solução Do Teorema 7.5.10,

$$\frac{dy}{dx} = e^{1/x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= -\frac{2e^{1/x^2}}{x^3}$$

EXEMPLO 3 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$y = e^{2x + \ln x}$$

Solução Como $e^{2x + \ln x} = e^{2x}e^{\ln x}$ e $e^{\ln x} = x$, então

$$y = xe^{2x}$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + 2xe^{2x}$$

A fórmula de integração indefinida dada no teorema a seguir é uma conseqüência do Teorema 7.5.10.

7.5.11 TEOREMA

$$\boxed{\int e^u\,du = e^u + C}$$

EXEMPLO 4 Ache

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solução Seja

$$u = \sqrt{x} \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= 2\int e^u\,du\\ &= 2e^u + C\\ &= 2e^{\sqrt{x}} + C\end{aligned}$$

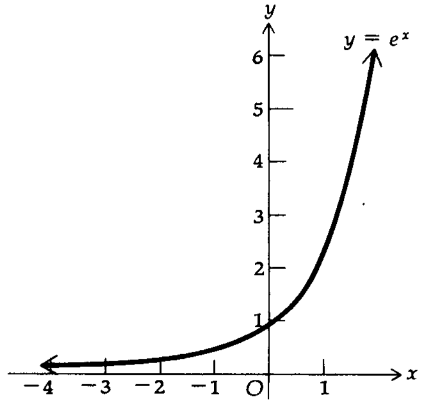


FIGURA 1

Como de (2) $e^x = y$ se e somente se $x = \ln y$, o gráfico de $y = e^x$ é idêntico ao gráfico de $x = \ln y$. Assim, podemos obter o gráfico de $y = e^x$, da Figura 1, invertendo os eixos x e y na Figura 4 da Secção 7.3.

O gráfico de $y = e^x$ pode ser obtido sem usarmos o gráfico da função logarítmica natural. Como a imagem da função exponencial é o conjunto de todos os números positivos, segue que $e^x > 0$ para todos os valores de x. Assim, o gráfico está totalmente acima do eixo x. Além disso $\dfrac{dy}{dx} = e^x > 0$ para todo x; assim sendo, a função é crescente para todo x. Temos também que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^x > 0$ para todo x e, portanto, o gráfico é côncavo para cima em todos os pontos.

Temos os seguintes limites:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

As demonstrações desses limites serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 57 e 58). Para colocar no gráfico alguns pontos, devemos usar uma calculadora para potências de e.

Funções tendo valores da forma Ce^{kx}, onde C e k são constantes, ocorrem freqüentemente em vários campos de aplicações. Algumas delas serão discutidas nas Secções 7.7 e 7.8.

Na Definição 7.5.4 definimos o número e como o valor da função exponencial natural em 1; isto é, $e = \exp(1)$. Para chegarmos a outra maneira de definir e, consideremos a função logarítmica natural

$$f(x) = \ln x$$

Sabemos que a derivada de f é dada por $f'(x) = 1/x$; logo $f'(1) = 1$. Entretanto, vamos aplicar a definição de derivada para encontrar $f'(1)$. Temos que

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \Delta x) - \ln 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln(1 + \Delta x) \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln(1 + \Delta x) = 1$$

Substituindo Δx por h temos da igualdade acima e do Teorema 7.5.3,

$$\lim_{h \to 0} \ln(1 + h)^{1/h} = 1 \tag{4}$$

Agora, como as funções exponencial e logarítmica naturais são inversas uma da outra, temos

$$\lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h} = \lim_{h \to 0} \exp[\ln(1 + h)^{1/h}] \tag{5}$$

Como a função exponencial natural é contínua e $\lim_{h \to 0} \ln(1 + h)^{1/h}$ existe e vale 1, conforme foi mostrado em (4), podemos aplicar o Teorema 2.7.1 ao segundo membro de (5) e obter

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h} &= \exp\left[\lim_{h \to 0} \ln(1 + h)^{1/h}\right] \\ &= \exp 1 \end{aligned}$$

Assim,

$$\boxed{\lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h} = e} \tag{6}$$

A relação (6) é usada algumas vezes para definir e; contudo, para usá-la é necessário provar que tal limite existe.

Vamos considerar a função F definida por

$$F(h) = (1 + h)^{1/h}$$

e determinar os valores funcionais para alguns valores de h próximos a zero. Esses valores foram obtidos com uma calculadora. Os valores da Tabela 1 referem-se a h positivo, enquanto que os da Tabela 2 referem-se a h negativo.

Os valores das tabelas mostram que $\lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h}$ é provavelmente um número que está entre 2,7181 e 2,7184. Conforme mencionado previamente, iremos aprender no Capítulo 13 um método de encontrar e com a precisão desejada.

Tabela 1

h	$F(h) = (1 + h)^{1/h}$
1	2
0,5	2,25
0,05	2,6533
0,01	2,7048
0,001	2,7169
0,0001	2,7181

Tabela 2

h	$F(h) = (1 + h)^{1/h}$
−0,5	4
−0,05	2,7895
−0,01	2,7320
−0,001	2,7196
−0,0001	2,7184

EXERCÍCIOS 7.5

Nos Exercícios de 1 a 16, ache $\frac{dy}{dx}$.

1. $y = e^{5x}$
2. $y = e^{-7x}$
3. $y = e^{-3x^2}$
4. $y = e^{x^2-3}$
5. $y = e^{\cos x}$
6. $y = e^{2 \operatorname{sen} 3x}$
7. $y = e^x \operatorname{sen} e^x$
8. $y = \frac{e^x}{x}$
9. $y = \operatorname{tg} e^{\sqrt{x}}$
10. $y = e^{e^x}$
11. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
12. $y = \ln \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$
13. $y = x^5 e^{-3 \ln x}$
14. $y = \ln(e^x + e^{-x})$
15. $y = \sec e^{2x} + e^{2 \sec x}$
16. $y = \operatorname{tg} e^{3x} + e^{\operatorname{tg} 3x}$

Nos Exercícios de 17 a 20, ache $\frac{dy}{dx}$ *por deviração implícita.*

17. $e^x + e^y = e^{x+y}$
18. $e^y = \ln(x^3 + 3y)$
19. $y^2 e^{2x} + xy^3 = 1$
20. $ye^{2x} + xe^{2y} = 1$

Nos Exercícios de 21 a 28, calcule a integral indefinida.

21. $\int e^{2-5x}\, dx$
22. $\int e^{2x+1}\, dx$
23. $\int \frac{1 + e^{2x}}{e^x}\, dx$
24. $\int e^{3x} e^{2x}\, dx$
25. $\int \frac{e^{3x}}{(1 - 2e^{3x})^2}\, dx$
26. $\int x^2 e^{2x^3}\, dx$
27. $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 3}\, dx$
28. $\int \frac{dx}{1 + e^x}$

Nos Exercícios de 29 a 36, calcule a integral definida.

29. $\int_0^1 e^2\, dx$
30. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x}$
31. $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x}$
32. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$
33. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$
34. $\int_0^3 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx$
35. $\int_0^2 xe^{4-x^2}\, dx$
36. $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x + e}\, dx$

Nos Exercícios de 37 a 40, calcule o valor com duas casas decimais.

37. $2^{\sqrt{2}}$
38. $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$
39. $(\sqrt{2})^e$
40. e^e

41. Faça um esboço do gráfico de $y = e^{-x}$.

42. Faça um esboço do gráfico de $y = e^{|x|}$.

43. Ache a área da região limitada pela curva $y = e^x$, pelos eixos x e y e pela reta $x = 2$.

44. Ache a área da região limitada pela curva $y = e^x$ e pela reta que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(1, e)$.

45. Ache uma equação da reta tangente à curva $y = e^{-x}$ que é perpendicular à reta $2x - y = 5$.

46. Ache uma equação da reta normal à curva $y = e^{2x}$ no ponto onde $x = \ln 2$.

47. Um corpo move-se ao longo de uma reta e em t s sua velocidade é v m/s, onde $v = e^3 - e^{2t}$. Ache a distância percorrida pela partícula enquanto $v > 0$ após $t = 0$.

48. Uma partícula move-se ao longo de uma reta, onde s cm é a distância orientada da partícula à origem, v cm/s é a velocidade da partícula e a cm/s^2 é a sua aceleração em t s. Se $a = e^t + e^{-t}$ e $v = 1$ e $s = 2$ quando $t = 0$, ache v e s em termos de t.

49. Se p N/m^2 for a pressão atmosférica à altura h m acima do nível do mar, então $p = 101314e^{-0{,}0000096h}$. Ache a taxa de variação da pressão atmosférica com o tempo, fora de um avião que está a 1.524 m, subindo a uma velocidade de 49 m/s.

50. A uma certa altura o manômetro de um avião indica que a pressão atmosférica é de 71.835 N/m^2 (539 mmHg). Aplicando a fórmula do Exercício 49, aproxime por diferenciais o quanto deve subir o avião para que a pressão seja 70877 N/m^2 (531 mmHg).

51. Se l m for o comprimento de uma barra de ferro quando a temperatura é de t graus, então $l = 18\, e^{0{,}000005t}$. Use diferenciais para encontrar o aumento aproximado de l quando t cresce de 0 a 10.

52. Um circuito elétrico simples contendo uma resistência de R ohms, uma indutância de L henrys e sem condensadores, tem a força eletromotriz interrompida quando a corrente é I_0 ampères. A corrente se extingue de forma que em t s ela é i ampères e $i = I_0 e^{-(R/L)t}$. Mostre que a taxa de variação da corrente é proporcional à corrente.

53. Um tanque tem a forma de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo x (com a parte positiva para baixo) da região limitada pela curva $y^2 x = e^{-2x}$ e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$. Se o tanque estiver cheio de água, ache o trabalho realizado ao se bombear toda a água até um ponto 1 m acima da borda do tanque. A distância é medida em metros.

54. Uma agência de propaganda determinou estatisticamente que se um fabricante de produtos matinais aumentar a verba para comerciais na televisão em x milhares, haverá um aumento no lucro total de $25x^2 e^{-0{,}2x}$ centenas. Qual deverá ser o aumento na verba de propaganda para que o fabricante tenha o lucro máximo? Qual será o aumento correspondente no lucro da fábrica?

55. (a) Tomando $h = \frac{1}{z}$ na Equação (6) mostre que

$$\lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e \quad \text{e} \quad \lim_{z \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$$

(b) Use uma calculadora para determinar valores de $\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$ quando $z = 10.000$ e $z = -10.000$. Então, obtenha uma aproximação do número e, usando esses valores para encontrar o valor médio de $(1{,}0001)^{10.000}$ e $(0{,}9999)^{-10.000}$.

56. Faça um esboço do gráfico da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ e & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

no intervalo $[-0{,}5, 0{,}5]$, colocando no gráfico os pontos para os quais x tem os valores $-0{,}5$, $-0{,}1$, $-0{,}15$, $-0{,}01$, $0{,}01$, $0{,}05$, $0{,}1$ e $0{,}5$. Use uma calculadora para determinar os valores funcionais e tome escalas diferentes nos dois eixos. A coordenada y do ponto no qual o gráfico intercepta o eixo y é o número e.

57. Prove que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, mostrando que para todo $N > 0$ existe um $M > 0$ tal que se $x > M$, então $e^x > N$.

58. Prove que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, mostrando que para todo $\epsilon > 0$ existe um $N < 0$ tal que se $x < N$, então $e^x < \epsilon$.

59. Prove que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. (*Sugestão*: use o resultado do Exercício 56 na série de Exercícios 7.4.)

Nos Exercícios 60 e 61, ache os extremos relativos de f, os pontos de inflexão do gráfico de f, os intervalos nos quais f é crescente e os intervalos onde f é decrescente, onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, e a inclinação de qualquer tangente inflexional. Faça um esboço do gráfico de f. No Exercício 61 use o resultado do Exercício 59 para traçar o esboço.

60. $f(x) = e^{-x^2}$

61. $f(x) = xe^{-x}$

62. Faça um esboço do gráfico da função f tal que $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$. Mostre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, mas que a reta $y = 0$ não é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Por que a Definição 2.5.4 (i) não é válida para essa função?

63. Prove que a função mais geral que é igual à sua derivada é dada por $f(x) = ke^x$. (*Sugestão*: faça $y = f(x)$ e resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = y$.)

7.6 OUTRAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Da Definição 7.5.2, se $a > 0$,

$$a^x = e^{x \ln a} \tag{1}$$

A expressão no primeiro membro de (1) é chamada de *função exponencial de base a*.

7.6.1 DEFINIÇÃO

Se a for um número positivo qualquer e x for qualquer número real, então a função f definida por

$$f(x) = a^x$$

será chamada de **função exponencial de base *a***.

A função exponencial de base a satisfaz as mesmas propriedades que a função exponencial natural.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se x e y forem números reais quaisquer e a for positivo, então de (1),

$$\begin{aligned} a^x a^y &= e^{x \ln a} e^{y \ln a} \\ &= e^{x \ln a + y \ln a} \\ &= e^{(x+y) \ln a} \\ &= a^{x+y} \end{aligned}$$

◀

Da Ilustração 1 temos a propriedade

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

Temos também as seguintes propriedades:

$$a^x \div a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$a^0 = 1$$

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 37 a 40).

Para encontrar a derivada da função exponencial de base a vamos tomar $a^x = e^{x \ln a}$ e aplicar a regra da cadeia.

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$\begin{aligned} D_x(a^x) &= e^{x \ln a} D_x(x \ln a) \\ &= e^{x \ln a}(\ln a) \\ &= a^x \ln a \end{aligned}$$

Assim sendo, temos o teorema a seguir.

7.6.2 TEOREMA Se a for um número positivo qualquer e u for uma função diferenciável de x,

$$D_x(a^u) = a^u \ln a \, D_x u$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se $y = 3^{x^2}$, então do Teorema 7.6.2,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3^{x^2}(\ln 3)(2x) \\ &= 2(\ln 3)x3^{x^2} \end{aligned}$$ ◀

O próximo teorema, que determina a fórmula da integral indefinida da função exponencial de base a, segue do Teorema 7.6.2.

7.6.3 TEOREMA Se a for qualquer número positivo diferente de 1,

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \sqrt{10^{3x}} \, dx$$

Solução Como $\sqrt{10^{3x}} = 10^{3x/2}$, aplicamos o Teorema 7.6.3 com $u = \frac{3}{2}x$. Temos, então,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{10^{3x}} \, dx &= \int 10^{3x/2} \, dx \\ &= \tfrac{2}{3} \int 10^{3x/2}(\tfrac{3}{2} \, dx) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{10^{3x/2}}{\ln 10} + C \\ &= \frac{2\sqrt{10^{3x}}}{3 \ln 10} + C \end{aligned}$$

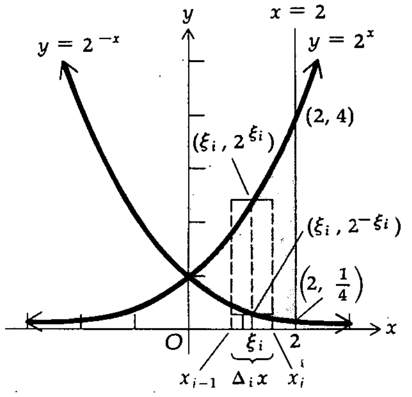


FIGURA 1

EXEMPLO 2 Faça esboços dos gráficos de $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$ no mesmo conjunto de eixos. Ache a área da região limitada por esses dois gráficos e pela reta $x = 2$.

Solução Os esboços pedidos estão na Figura 1. A região em questão está sombreada na figura. Se A unidades quadradas for a área pedida, então

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [2^{\xi_i} - 2^{-\xi_i}] \Delta_i x \\ &= \int_0^2 (2^x - 2^{-x})\, dx \\ &= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2}\Big]_0^2 \\ &= \frac{4}{\ln 2} + \frac{\frac{1}{4}}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \\ &= \frac{9}{4 \ln 2} \\ &\approx 3{,}25 \end{aligned}$$

Podemos definir agora a *função logarítmica de base a* sendo *a* um número positivo qualquer diferente de 1.

7.6.4 DEFINIÇÃO

Se a for um número positivo qualquer diferente de 1, a **função logarítmica de base *a*** será a inversa da função exponencial de base a; escrevemos

$$y = \log_a x \quad \text{se e somente se} \quad a^y = x \tag{2}$$

A definição dada acima é aquela usualmente dada em Álgebra Elementar; no entanto, (2) tem significado para qualquer número real y pois a^y foi definida precisamente. Se $a = e$, temos a função logarítmica de base e que é a função logarítmica natural.

$\log_a x$ lê-se "o logarítmo de x na base a".

A função logarítmica de base a tem as mesmas propriedades que a função logarítmica natural. Vamos enumerá-las:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x \div y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

As demonstrações dessas propriedades serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios de 41 a 44).

A relação entre os logaritmos na base a e os naturais segue diretamente. Seja

$y = \log_a x$

Então,

$$a^y = x$$

$$\ln a^y = \ln x$$

$$y \ln a = \ln x$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Substituindo y por $\log_a x$, obtemos

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}} \tag{3}$$

Muitas calculadoras não têm uma tecla $\boxed{\log_a x}$. Assim, (3) é uma fórmula conveniente para calcular $\log_a x$ numa calculadora.

A fórmula (3) é usada, por vezes, como definição da função logarítmica na base a. Como a função logarítmica natural é contínua para todo $x > 0$, segue de (3) que a função logarítmica na base a é contínua para todo $x > 0$.

Se em (3) $x = e$ teremos

$$\log_a e = \frac{\ln e}{\ln a}$$

$$\boxed{\log_a e = \frac{1}{\ln a}} \tag{4}$$

Vamos agora achar a derivada da função logarítmica de base a, diferenciando ambos os membros de (3) em relação a x.

$$D_x(\log_a x) = \frac{1}{\ln a} D_x(\ln x)$$

$$D_x(\log_a x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \tag{5}$$

Substituindo de (4) nessa equação, teremos

$$D_x(\log_a x) = \frac{\log_a e}{x}$$

Aplicando a regra da cadeia a essa fórmula e (5), temos o teorema a seguir.

7.6.5 TEOREMA Se u for uma função diferenciável de x,

$$D_x(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} \cdot D_x u$$

$$\Leftrightarrow \quad D_x(\log_a u) = \frac{1}{(\ln a)u} \cdot D_x u$$

Se no Teorema 7.6.5 $a = e$, então teremos

$$D_x(\log_e u) = \frac{\log_e e}{u} D_x u$$

$$\Leftrightarrow \quad D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u$$

que é o Teorema 7.3.2 para a derivada da função logarítmica natural.

EXEMPLO 3 Ache $\frac{dy}{dx}$ se

$$y = \log_{10} \frac{x+1}{x^2+1}$$

Solução Usando uma propriedade dos logaritmos, escrevemos

$$y = \log_{10}(x+1) - \log_{10}(x^2+1)$$

Do Teorema 7.6.5,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\log_{10} e}{x+1} - \frac{\log_{10} e}{x^2+1} \cdot 2x \\ &= \log_{10} e\left(\frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{\log_{10} e(1 - 2x - x^2)}{(x+1)(x^2+1)}\end{aligned}$$

Como x^n foi definida para qualquer número real n, podemos provar agora o teorema para a derivada da função potência quando o expoente for um número real qualquer.

7.6.6 TEOREMA Se n for um número real qualquer e a função f for definida por

$$f(x) = x^n \quad \text{onde } x > 0$$

então,

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Prova Da Definição 7.5.2,

$$f(x) = e^{n \ln x}$$

Assim,

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{n \ln x} D_x(n \ln x) \\ &= e^{n \ln x}\left(\frac{n}{x}\right) \\ &= x^n \cdot \frac{n}{x} \\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

■

O Teorema 7.6.6 possibilita-nos encontrar a derivada de uma potência de base variável e expoente constante. Anteriormente, nesta mesma secção, aprendemos como diferenciar uma potência de base constante elevada a um expoente variável. Vamos considerar agora a derivada de uma função potência com base variável, elevada a um expoente variável.

EXEMPLO 4 Se $y = x^x$, onde $x > 0$, ache $\dfrac{dy}{dx}$.

Solução Da Definição 7.5.2, se $x > 0$, $x^x = e^{x \ln x}$. Logo,

$$y = e^{x \ln x}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x \ln x} D_x(x \ln x)$$

$$= e^{x \ln x}\left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\right)$$

$$= x^x(1 + \ln x)$$

O método da diferenciação logarítmica também pode ser usado para encontrarmos a derivada de uma função cujos valores funcionais são dados por uma potência de base variável elevada a um expoente variável, conforme mostra o exemplo a seguir.

EXEMPLO 5 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ no Exemplo 4, usando diferenciação logarítmica.

Solução Sabemos que $y = x^x$ com $x > 0$. Tomamos o logaritmo natural de ambos os membros obtendo

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

Diferenciando ambos os membros da igualdade acima em relação a x, obtemos

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x)$$

$$= x^x(1 + \ln x)$$

EXERCÍCIOS 7.6

Nos Exercícios de 1 a 24, ache a derivada da função dada.

1. $f(x) = 3^{5x}$
2. $f(x) = 6^{-3x}$
3. $f(t) = 4^{3t^2}$
4. $g(x) = 10^{x^2 - 2x}$
5. $f(x) = 4^{\operatorname{sen} 2x}$
6. $f(z) = 2^{\operatorname{cosec} 3z}$
7. $g(x) = 2^{5x}3^{4x^2}$
8. $f(x) = (x^3 + 3)2^{-7x}$
9. $h(x) = \dfrac{\log_{10} x}{x}$
10. $f(t) = \log_{10} \dfrac{t}{t + 1}$
11. $f(x) = \sqrt{\log_a x}$
12. $f(x) = \log_a[\log_a(\log_a x)]$
13. $f(x) = \log_{10}[\log_{10}(x + 1)]$
14. $g(w) = \operatorname{tg} 2^{3w}$
15. $f(t) = \sec 3^{t^2}$
16. $f(x) = x^{x^2}$; $x > 0$

17. $f(x) = x^{\sqrt{x}}; x > 0$ **18.** $f(x) = x^{\ln x}; x > 0$
19. $g(z) = z^{\cos z}; z > 0$ **20.** $g(t) = (\cos t)^t; \cos t > 0$
21. $h(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}; \operatorname{sen} x > 0$ **22.** $f(x) = (x)^{x^x}; x > 0$
23. $f(x) = x^{e^x}; x > 0$ **24.** $f(x) = (\ln x)^{\ln x}; x > 1$

Nos Exercícios de 25 a 32, calcule a integral indefinida.

25. $\int 3^{2x} dx$ **26.** $\int a^{nx}\, dx$
27. $\int a^t e^t dt$ **28.** $\int 5^{x^4 + 2x}(2x^3 + 1)\, dx$
29. $\int x^2 10^{x^3}\, dx$ **30.** $\int a^{z \ln z}(\ln z + 1)\, dz$
31. $\int e^y 2^{e^y} 3^{e^y}\, dy$ **32.** $\int \dfrac{4^{\ln(1/x)}}{x}\, dx$

Nos Exercícios 33 e 34, calcule o valor do logaritmo dado.

33. $\log_5 e$ **34.** $\log_2 10$

Nos Exercícios 35 e 36, use diferenciais para encontrar um valor aproximado do logaritmo dado e expresse a resposta com três casas decimais.

35. $\log_{10} 997$ **36.** $\log_{10} 1{,}015$

Nos Exercícios de 37 a 40, prove a propriedade dada, sendo a e b números positivos quaisquer e x e y, números reais quaisquer.

37. $a^x \div a^y = a^{x-y}$ **38.** $(a^x)^y = a^{xy}$
39. $(ab)^x = a^x b^x$ **40.** $a^0 = 1$

Nos Exercícios de 41 a 44, prove a propriedade dada, sendo a um número positivo qualquer diferente de 1, e x e y, quaisquer números positivos.

41. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
42. $\log_a(x \div y) = \log_a x - \log_a y$
43. $\log_a 1 = 0$ **44.** $\log_a x^y = y \log_a x$

45. Uma empresa determinou que ao iniciar uma nova promoção de vendas, o número de vendas por dia aumenta. No entanto, o número diário de vendas adicionais decresce quando o impacto da promoção se desgasta. Para uma dada promoção ficou determinado que se $S(t)$ for o número de vendas adicionais diárias, resultantes da promoção e t for o número de dias decorridos desde o término da promoção, então $S(t) = 1.000(3^{-t/2})$. Ache a taxa segundo a qual as vendas adicionais estarão decrescendo quando (a) $t = 4$ e (b) $t = 10$.

46. Uma empresa estima que em t anos o número de seus empregados será $N(t)$, onde $N(t) = 1.000(0{,}8)^{t/2}$. (a) Quantos empregados a empresa espera ter em 4 anos? (b) Com que taxa estará variando o número de empregados em 4 anos?

47. Uma partícula move-se ao longo de uma reta, de acordo com a equação do movimento $s = A \cdot 2^{kt} + B \cdot 2^{-kt}$, onde A, B e k são constantes e s m é a distância orientada da partícula a partir da origem em t s. Prove que o movimento é harmônico simples, mostrando que se a m/s^2 for a aceleração em t s então a será proporcional a s.

48. Uma partícula move-se ao longo de uma reta de acordo com a equação do movimento $s = t^{1/t}$, onde s m é a distância orientada da partícula a partir da origem em t s. Ache a velocidade e a aceleração em 2 s.

49. Uma pintura abstrata historicamente importante foi comprada em 1925 por $ 200 e seu valor vem dobrando a cada 10 anos, desde a sua compra. Se y for o valor da pintura t anos após sua compra, (a) defina y em termos de t. (b) Qual o valor da pintura em 1985? (c) Ache a taxa segundo a qual o valor da pintura estava crescendo em 1985.

50. Faça esboços, no mesmo conjunto de eixos, dos gráficos de $y = \log_{10} x$ e $y = \ln x$.

51. Faça esboços, no mesmo conjunto de eixos, dos gráficos de $y = e^x$ e $y = 2^x$. Ache a área da região limitada pelos dois gráficos e pela reta $x = 1$.

52. Ache a área da região limitada pelos gráficos de $y = 3^x$ e pelas retas $x = 1$ e $y = 1$.

53. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 52 em torno do eixo x.

54. Dada $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$. Prove que

$$f(b + c) + f(b - c) = 2f(b)f(c)$$

7.7 APLICAÇÕES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL

Modelos matemáticos envolvendo potências de e ocorrem em muitos campos, tais como Química, Física, Biologia, Psicologia, Sociologia, Administração e Economia. Vamos começar discutindo modelos envolvendo as *leis de crescimento e decaimento*. Essas leis surgem quando a taxa de variação de uma quantidade em relação ao tempo é proporcional à quantidade existente num dado instante. Por exemplo, é possível que a taxa de crescimento da população de uma comunidade seja proporcional à população existente num dado instante. Em Biologia, sob certas circunstâncias, a taxa de crescimento de uma cultura de bactérias é proporcional à quantidade de bactérias presentes em qualquer instante dado. Numa reação química é freqüente o caso em que velocidade da reação é proporcional à quantidade da substância presente; por exemplo, sabe-se experimentalmente que a taxa de decaimento do rádio é proporcional à quantidade de rádio existente num dado momento. Uma aplicação em Administração ocorre quando os juros são compostos continuamente.

Em tais casos, se o tempo for representado por t unidades e se y unidades representar o total da quantidade presente em qualquer instante, então

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

onde k é uma constante e $y > 0$ para todo $t \geqslant 0$. Se y cresce com o aumento de t, então $k > 0$ e temos a **lei de crescimento natural**. Se y decresce quando t aumenta então $k < 0$ e temos a **lei de decaimento natural**.

Se por definição y for um inteiro positivo (por exemplo, se y for a população de certa comunidade), vamos supor que y possa ser um número real qualquer para que y seja uma função contínua de t.

Vamos supor um modelo matemático envolvendo a lei de crescimento ou decaimento natural e a condição inicial de que $y = y_0$ quando $t = 0$. A equação diferencial é

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Separando as variáveis, obtemos

$$\frac{dy}{y} = k\,dt$$

Integrando, teremos

$$\int \frac{dy}{y} = k \int dt$$

$$\ln|y| = kt + \bar{c}$$

$$|y| = e^{kt+\bar{c}}$$

$$|y| = e^{\bar{c}} \cdot e^{kt}$$

Tomando $e^{\bar{c}} = C$ temos $|y| = Ce^{kt}$, e como y é positivo, podemos omitir as barras de valor absoluto, resultando assim

$$y = Ce^{kt}$$

Como $y = y_0$ quando $t = 0$, obtemos $C = y_0$. Então,

$$y = y_0e^{kt}$$

Provamos assim o teorema a seguir.

7.7.1 TEOREMA Suponha que y seja uma função contínua de t com $y > 0$ para todo $t \geqslant 0$. Além disso,

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

onde k é uma constante e $y = y_0$ quando $t = 0$. Então,

$$y = y_0e^{kt}$$

EXEMPLO 1 Numa certa cultura a taxa de crescimento das bactérias é proporcional à população presente. Se existirem 1.000 bactérias inicialmente e a quantidade dobrar em 12 min, quanto tempo levará até que haja 1.000.000 de bactérias?

Tabela 1

t	0	12	T
y	1.000	2.000	1.000.000

Solução Seja t o tempo decorrido e y o número de bactérias presentes em t min. A Tabela 1 dá as condições laterais, onde T min é o tempo necessário para que haja 1.000.000 bactérias.

A equação diferencial é

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

onde k é uma constante e $y = 1.000$ quando $t = 0$. Temos a lei do crescimento natural e, do Teorema 7.7.1,

$$y = 1.000e^{kt} \tag{1}$$

Como $y = 2.000$ quando $t = 12$, obtemos de (1)

$$e^{12k} = 2$$

Assim,

$$\begin{aligned} 12k &= \ln 2 \\ k &= \tfrac{1}{12} \ln 2 \\ k &= 0{,}05776 \end{aligned}$$

Logo, de (1) com esse valor de k temos

$$y = 1.000e^{0{,}05776t}$$

Substituindo t por T e y por 1.000.000, temos

$$\begin{aligned} 1.000.000 &= 1.000e^{0{,}05776T} \\ e^{0{,}05776T} &= 1.000 \\ 0{,}5776T &= \ln 1.000 \\ T &= \frac{\ln 1.000}{0{,}05776} \\ T &= 119{,}6 \end{aligned}$$

Logo, existirão 1.000.000 de bactérias em 119,6 min que é 1 hora, 59 min e 36 s.

EXEMPLO 2 A taxa de crescimento da população de uma certa cidade é proporcional ao número de habitantes. Se a população em 1950 era de 50.000 e em 1980, de 75.000, qual a população esperada em 2010?

Tabela 2

t	0	30	60
y	50.000	75.000	y_{60}

Solução Seja t o tempo em anos, decorrido desde 1950. Seja y a população em t anos. As condições laterais são dadas na Tabela 2, onde y_{60} é a população esperada em 2010.

A equação diferencial é

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

onde k é uma constante e $y = 50.000$ quando $t = 0$. Temos a lei de crescimento natural e, do Teorema 7.7.1,

$$y = 50.000\, e^{kt} \tag{2}$$

Como $y = 75.000$ quando $t = 30$, obtemos de (2)

$$75.000 = 50.000e^{30k}$$

$$e^{30k} = \tfrac{3}{2} \tag{3}$$

Quando $t = 60$, $y = y_{60}$. Logo, de (2),

$$y_{60} = 50.000e^{60k}$$

$$y_{60} = 50.000(e^{30k})^2$$

Substituindo (3) nessa equação, obtemos

$$\begin{aligned} y_{60} &= 50.000(\tfrac{3}{2})^2 \\ &= 112.500 \end{aligned}$$

Portanto, a população esperada em 2010 é de 112.500 habitantes.

No exemplo anterior, como a população cresce com o tempo, temos um caso da lei do crescimento natural. Se a população decresce com o tempo, o que pode ocorrer se a taxa de mortalidade for maior do que a de natalidade, teremos então um caso da lei do decaimento natural (veja o Exercício 3). No próximo exemplo há uma outra situação envolvendo a lei do decaimento natural. Em problemas envolvendo a lei do decaimento natural, a **meia-vida** de uma substância é o tempo para que ela seja reduzida à metade da quantidade inicial.

EXEMPLO 3 A taxa de decaimento do rádio é proporcional à quantidade presente em qualquer instante. Se houver 60 mg de rádio agora e sua meia-vida for 1.690 anos, qual a quantidade de rádio daqui a 100 anos?

Tabela 3

t	0	1.690	100
y	60	30	y_{100}

Solução Seja t o número de anos a partir de agora. Seja y o número de miligramas de rádio presentes em t anos. Das condições laterais dadas na Tabela 3, concluímos que haverá y_{100} mg de rádio daqui a 100 anos.

A equação diferencial é

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

onde k é uma constante e $y = 60$ quando $t = 0$. Temos a lei do decaimento natural e, do Teorema 7.7.1,

$$y = 60e^{kt} \tag{4}$$

Como $y = 30$ quando $t = 1.690$, de (4) temos que $30 = 60e^{1.690k}$, isto é,

$$\begin{aligned} e^{1.690k} &= 0{,}5 \\ 1.690k &= \ln 0{,}5 \\ k &= \frac{\ln 0{,}5}{1.690} \\ k &= -0{,}000410 \end{aligned}$$

Substituindo esse valor de k em (4), obtemos

$$y = 60e^{-0,000410t}$$

Quando $t = 100$, $y = y_{100}$; assim da relação acima,

$$\begin{aligned} y_{100} &= 60e^{-0,0410} \\ &= 57,6 \end{aligned}$$

Logo, daqui a 100 anos haverá 57,6 mg de rádio.

EXEMPLO 4 Há 100 milhões de litros de água fluorada no reservatório que abastece uma cidade e a água contém 700 kg de fluoreto. Para diminuir a concentração de fluoreto, é despejada água pura no reservatório a uma taxa de 3 milhões de litros por dia e a solução de fluoreto homogênea escoa do reservatório à mesma taxa. Quantos quilogramas de fluoreto restarão no reservatório 60 dias depois que a água pura começou a ser despejada no reservatório?

Solução Seja t o número de dias decorridos desde que a água pura começou a ser despejada no reservatório. Seja x kg o número de quilogramas de fluoreto que restam no reservatório em t dias.

Como 100 milhões de litros de água fluorada estão no reservatório o tempo todo, em t dias a quantidade de fluoreto por milhões de litros será de $x/100$ kg. Três milhões de litros de água fluorada escoam do reservatório a cada dia; assim o reservatório perde $3(x/100)$ kg de fluoreto por dia. Como $\dfrac{dx}{dt}$ é a taxa de variação de x em relação a t e x é decrescente com t crescente, temos a equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3x}{100}$$

Essa equação é da forma $\dfrac{dx}{dt} = kx$, onde k é $-0,03$. Portanto, do Teorema 7.7.1

$$x = Ce^{-0,03t}$$

Tabela 4

t	0	60
x	700	x_{60}

Temos as condições iniciais dadas na Tabela 4, onde x_{60} kg é a quantidade de fluoreto no reservatório após 60 dias. Quando $t = 0$, $x = 700$; assim $C = 700$. Tomando $t = 60$ e $x = x_{60}$, temos

$$\begin{aligned} x_{60} &= 700e^{-1,8} \\ &= 700(0,1653) \\ &= 115,7 \end{aligned}$$

Assim, existirão 115,7 kg de fluoreto no reservatório, 60 dias depois que a água pura começou a ser despejada no reservatório.

O Cálculo pode ser muito útil a um economista, para avaliar certas decisões. Porém, para usá-lo precisamos lidar com funções contínuas. Consideremos, por exemplo, a seguinte fórmula que determina A, o número de unidades monetárias da quantia após t anos, se P unidades monetárias forem investidas a uma taxa anual de $100i\%$, compostos m vezes por ano:

$$A = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} \tag{5}$$

Vamos imaginar uma situação na qual os juros sejam continuamente compostos, isto é, consideremos a fórmula (5), onde fazemos o número de períodos de juros por ano crescer indefinidamente. Passando ao limite na fórmula (5), temos

$$A = P \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$$

que pode ser escrita como

$$A = P \lim_{m \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}\right]^{it} \tag{6}$$

Para calcular esse limite pelo Teorema 2.7.1 precisamos determinar primeiro se

$$\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}$$

existe. Tomando $h = i/m$, temos $m/i = 1/h$; e como $m \to +\infty$ é equivalente a $h \to 0^+$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i} &= \lim_{h \to 0^+} (1 + h)^{1/h} \\ &= e\end{aligned}$$

Logo, usando o Teorema 2.7.1, temos

$$\begin{aligned}\lim_{m \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}\right]^{it} &= \left[\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}\right]^{it} \\ &= e^{it}\end{aligned}$$

e assim, (6) torna-se

$$A = Pe^{it} \tag{7}$$

Fazendo t variar no conjunto dos números reais não-negativos, vemos que (7) expressa A como função contínua de t.

Outra maneira de considerar a mesma situação é supor que o investimento de P unidades monetárias cresça segundo uma taxa proporcional a seu tamanho. Essa é a lei do crescimento natural. Então, se A unidades monetárias for a quantia em t anos, teremos

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

onde k é uma constante e $A = P$ quando $t = 0$. Do Teorema 7.7.1

$$A = Pe^{kt}$$

Comparando essa relação com (7) vemos que serão iguais se $k = i$. Assim, se um investimento cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho, dizemos que os juros foram **compostos continuamente** e que a taxa anual de juros é a constante de proporcionalidade.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se P unidades monetárias forem investidas a uma taxa de 8% por ano, compostos continuamente, e A unidades monetárias for o montante do investimento em t anos,

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}08A$$

e

$$A = Pe^{0{,}08t}$$ ◀

Se em (7) tomamos $P = 1$, $i = 1$ e $t = 1$, obtemos $A = e$, que dá uma justificativa para a interpretação econômica do número e como o resultado de um investimento de $ 1 por um ano, a uma taxa de juros de 100% ao ano, composta continuamente.

No exemplo a seguir usaremos o termo *taxa anual efetiva* de juros, que é a taxa que dá a mesma quantia de juros compostos uma vez ao ano.

EXEMPLO 5 Se $ 5.000 forem emprestados a uma taxa de juros de 12% ao ano, compostos continuamente, e o empréstimo tiver que ser pago em uma única vez ao fim de um ano, quanto deverá pagar a pessoa que emprestou? Ache, também, a taxa anual efetiva de juros.

Solução Se A for a quantia a ser paga, como $P = 5.000$, $i = 0{,}12$ e $t = 1$, temos de (7)

$$\begin{aligned} A &= 5.000e^{0{,}12} \\ &= 5.000(1{,}1275) \\ &= 5637{,}50 \end{aligned}$$

Assim, a pessoa deverá pagar $ 5.637,50. Chamando j a taxa anual efetiva de juros, temos

$$\begin{aligned} 5.000(1 + j) &= 5.000e^{0{,}12} \\ 1 + j &= e^{0{,}12} \\ j &= 1{,}1275 - 1 \\ j &= 0{,}1275 \\ j &= 12{,}75\% \end{aligned}$$

A taxa anual efetiva de juros é 12,75%.

Se a função do Teorema 7.7.1 for denotada por f, então $y = f(t)$. Além disso, se $f(0) = B (B > 0)$, então do teorema, quando

$$f'(t) = kt \qquad t \geqslant 0 \tag{8}$$

temos

$$f(t) = Be^{kt} \qquad t \geqslant 0 \tag{9}$$

Se $k > 0$, então (8) será a lei do crescimento natural e (9) definirá uma função que dizemos ter **crescimento exponencial**. Como quando $k > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = B \lim_{t \to +\infty} e^{kt}$$
$$= +\infty$$

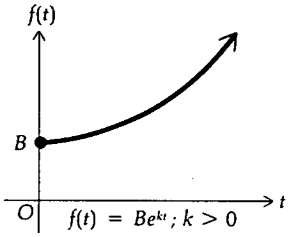


FIGURA 1

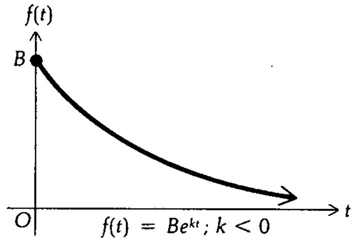


FIGURA 2

então $f(t)$ cresce indefinidamente quando t cresce indefinidamente. Um esboço do gráfico de (9) quando $k > 0$ está na Figura 1.

Se $k < 0$, então (8) será a lei do decaimento natural e (9) definirá uma função que dizemos ter **decaimento exponencial**. Observe em (9) que se $k < 0$.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = B \lim_{t \to +\infty} e^{kt}$$
$$= 0$$

e $f(t)$ tende a zero através de valores positivos. Um esboço do gráfico de (9) quando $k < 0$ é apresentado na Figura 2.

Suponha agora que uma quantidade cresça segundo uma taxa proporcional à diferença entre um número A, positivo, fixo e o seu tamanho. Então, se o tempo for representado por t unidades e y unidades for a quantidade presente em qualquer instante,

$$\frac{dy}{dt} = k(A - y) \tag{10}$$

onde k é uma constante positiva e $y < A$ para todo $t \geqslant 0$. Separando as variáveis em (10), obtemos

$$\frac{dy}{A - y} = kt$$

Integrando, teremos

$$\int \frac{dy}{A - y} = k \int dt$$
$$-\ln|A - y| = kt + C$$
$$\ln|A - y| = -kt - C$$
$$|A - y| = e^{-C}e^{-kt}$$

Seja $e^{-C} = B$. Como $A - y$ é positivo, podemos omitir as barras de valor absoluto. Assim, teremos

$$A - y = Be^{-kt}$$
$$y = A - Be^{-kt} \tag{11}$$

Se nesta igualdade tomarmos $y = f(t)$, teremos

$$f(t) = A - Be^{-kt}$$

onde A, B e k são constante positivas. Essa igualdade descreve um **crescimento limitado**.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} f(t) &= \lim_{t\to+\infty} (A - Be^{-kt})\\ &= A - B \lim_{t\to+\infty} e^{-kt}\\ &= A - B\cdot 0\\ &= A\end{aligned}$$

e $f(t)$ tende a A por valores menores do que A. Logo, da Definição 2.5.4 (i), o gráfico de f tem como assíntota horizontal a reta A unidades acima do eixo t. Note também que

$$\begin{aligned}f(0) &= A - Be^{-k\cdot 0}\\ &= A - B\end{aligned}$$

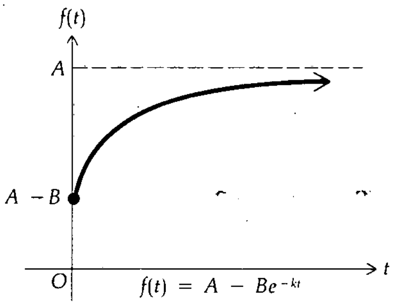


FIGURA 3

Dessa informação obtemos o esboço do gráfico de f na Figura 3. Esse gráfico é chamado algumas vezes de **curva do aprendizado**. O nome é apropriado quando $f(t)$ representa a competência segundo a qual uma pessoa realiza determinada tarefa. Ao iniciar uma atividade, a competência de um indivíduo aumenta rapidamente e depois mais vagarosamente, já que uma experiência adicional tem pouco efeito na habilidade de realizar a tarefa.

EXEMPLO 6 Um operário recém-contratado realiza uma tarefa com maior eficiência a cada dia que passa; de tal forma que se y unidades forem produzidas por dia após t dias no trabalho, então

$$\frac{dy}{dt} = k(80 - y)$$

onde k é uma constante positiva e $y < 80$ para todo $t \geqslant 0$. O empregado produz 20 unidades no primeiro dia de trabalho e 50 unidades por dia após 10 dias de trabalho. (a) Quantas unidades por dia ele estará produzindo após 30 dias de trabalho? (b) Mostre que após 60 dias ele estará produzindo apenas 1 unidade a menos do que seu potencial completo.

Solução A equação diferencial dada é a mesma que (10) com $A = 80$. Logo, a solução geral é da forma de (11) com $A = 80$; assim sendo, ela é

$$y = 80 - Be^{-kt} \qquad (12)$$

Tabela 5

t	0	10	30	60
y	20	50	y_{30}	y_{60}

A Tabela 5 mostra as condições laterais, onde y_{30} unidades são produzidas por dia após 30 dias no trabalho e y_{60} unidades são a produção diária após 60 dias no trabalho. Como $y = 20$ quando $t = 0$, obtemos de (12)

$$20 = 80 - Be^0$$

$$20 = 80 - B$$

$$B = 60$$

Substituindo B por 60 em (12), obtemos

$$y = 80 - 60e^{-kt} \qquad (13)$$

De (13), com $y = 50$ quando $t = 10$, temos

$$50 = 80 - 60e^{-10k}$$
$$e^{-10k} = 0{,}5$$

Substituindo esse valor de e^{-10k} em (13), teremos

$$\begin{aligned} y &= 80 - 60(e^{-10k})^{t/10} \\ &= 80 - 60(0{,}5)^{t/10} \end{aligned} \tag{14}$$

(a) Como $y = y_{30}$ quando $t = 30$, obtemos de (14)

$$\begin{aligned} y_{30} &= 80 - 60(0{,}5)^3 \\ &= 80 - 60(0{,}125) \\ &= 80 - 7{,}5 \\ &= 72{,}5 \end{aligned}$$

Logo, o empregado estará produzindo 72 unidades por dia depois de 30 dias no trabalho.

(b) De (14), com $y = y_{60}$ quando $t = 60$, obtemos

$$\begin{aligned} y_{60} &= 80 - 60(0{,}5)^6 \\ &= 80 - 60(0{,}0156) \\ &= 80 - 0{,}938 \\ &= 79{,}062 \end{aligned}$$

Após 60 dias no trabalho, o empregado estará produzindo 79 unidades por dia. Como

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} [80 - 60(0{,}5)^{t/10}] &= 80 - 60 \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2^{t/10}} \\ &= 80 - 60 \cdot 0 \\ &= 80 \end{aligned}$$

o potencial total é de 80 unidades por dia. Assim, após 60 dias no emprego, o operário estará produzindo apenas 1 unidade a menos do que o seu potencial.

Na Secção 9.6 vamos considerar outro tipo de crescimento limitado, que dá um modelo de crescimento populacional levando em conta os fatores ambientais.

Há uma função importante em Estatística chamada **função densidade de probabilidade normal padrão** que é definida por

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

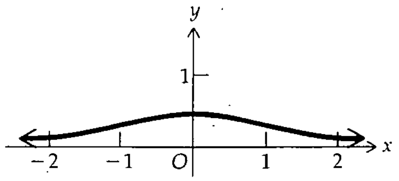


FIGURA 4

Um esboço do gráfico de N está na Figura 4. Ela é uma curva com a forma de sino muito conhecida pelos estatísticos. A curva é simétrica em relação ao eixo y. A Tabela 6 dá valores de $N(x)$ para alguns valores de x.

Observe que quando x cresce indefinidamente ou decresce indefinidamente, então $N(x)$ tende a zero rapidamente. Por exemplo, $N(3) = 0{,}004$ e $N(4) = 0{,}0001$. A probabilidade de que uma escolha aleatória de x esteja no intervalo fechado $[a, b]$ é denotada por $P([a, b])$, e

$$P([a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx \tag{15}$$

A integral definida em (15) é a medida da área da região limitada acima pela curva $y = N(x)$, abaixo pelo eixo x e dos lados pelas retas $x = a$ e $x = b$. Essa integral definida não pode ser calculada pelo segundo teorema fundamental do Cálculo, pois não podemos encontrar uma antiderivada do integrando usando funções elementares. Entretanto, podemos calcular valores aproximados de tal integral definida pela regra do trapézio ou pela regra de Simpson, conforme mostra o exemplo a seguir.

Tabela 6

x	$N(x)$
0	0,40
±0,5	0,35
±1,0	0,24
±1,5	0,13
±2,0	0,05
±2,5	0,02
±3,0	0,004
±3,5	0,001
±4,0	0,0001

EXEMPLO 7 Para a função de densidade de probabilidade normal padrão, determine a probabilidade de que uma escolha ao acaso de x esteja no intervalo $[0, 2]$. Aproxime o valor da integral definida por (a) a regra do trapézio com $n = 4$ e (b) a regra de Simpson com $n = 4$.

Solução A probabilidade de que uma escolha ao acaso de x esteja no intervalo $[0, 2]$ é $P([0, 2])$ e, de (15),

$$P([0, 2]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^2 e^{-x^2/2}\, dx \tag{16}$$

(a) Aproximamos a integral em (16) pela regra do trapézio com $n = 4$. Como $[a, b] = [0, 2]$, $\Delta x = \frac{1}{2}$. Logo, com $f(x) = e^{-x^2/2}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^{-x^2/2}\, dx &\approx \tfrac{1}{4}\left[f(0) + 2f(\tfrac{1}{2}) + 2f(1) + 2f(\tfrac{3}{2}) + f(2)\right] \\
&= \tfrac{1}{4}\left[e^0 + 2e^{-1/8} + 2e^{-1/2} + 2e^{-9/8} + e^{-2}\right] \\
&\approx \tfrac{1}{4}\left[1 + 2(0{,}8825) + 2(0{,}6065) + 2(0{,}3246) + 0{,}1353\right] \\
&= \tfrac{1}{4}(4{,}7625) \\
&\approx 1{,}191
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
P([0, 2]) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1{,}191) \\
&\approx 0{,}475
\end{aligned}$$

(b) Se a regra de Simpson com $n = 4$ for usada para aproximar a integral em (16), teremos

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^{-x^2/2}\, dx &\approx \tfrac{1}{6}\left[f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}) + 2f(1) + 4f(\tfrac{3}{2}) + f(2)\right] \\
&= \tfrac{1}{6}\left[e^0 + 4e^{-1/8} + 2e^{-1/2} + 4e^{-9/8} + e^{-2}\right] \\
&\approx \tfrac{1}{6}\left[1 + 4(0{,}8825) + 2(0{,}6065) + 4(0{,}3246) + 0{,}1353\right] \\
&= \tfrac{1}{6}(7{,}1767) \\
&\approx 1{,}196
\end{aligned}$$

Logo,

$$P([0, 2]) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1{,}196)$$

$$\approx 0{,}477$$

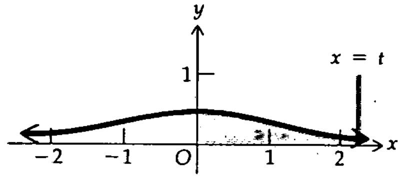


FIGURA 5

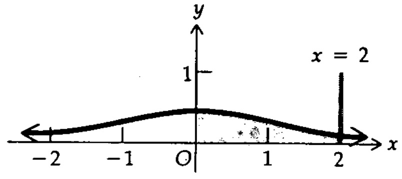


FIGURA 6

Na Figura 5 a região sombreada está no primeiro quadrante e é limitada pelo gráfico da função de densidade de probabilidade normal padrão, pelos eixos coordenados e pela reta $x = t$, onde $t > 0$. Se $A(t)$ unidades quadradas for a área dessa região, pode ser mostrado, embora seja difícil, que $\lim_{t \to \infty} A(t) = 0{,}5$. Assim o valor exato de $P([0, 2])$ é menor do que 0,5, pois é a medida da área da região sombreada da Figura 6. Esse fato está de acordo com os resultados do Exemplo 7.

EXERCÍCIOS 7.7

1. A taxa de crescimento natural da população de certa cidade é proporcional à população. Se a população aumenta de 40.000 para 60.000 em 40 anos, quando a população será de 80.000?
2. A população de determinada cidade dobrou em 60 anos, de 1890 a 1950. Se a taxa de crescimento natural da população em qualquer instante for proporcional à população naquele instante e a população em 1950 era de 60.000, estime a população no ano 2000.
3. A população de uma cidade decresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Em 1975 ela era de 50.000 e em 1985, 44.000. Qual a população esperada em 1995?
4. Após a estréia, a publicidade de determinado filme foi interrompida e a freqüência decresceu numa taxa proporcional. Se no dia da estréia a freqüência num certo cinema era de 5.000 e no terceiro dia, de 2.000, qual a freqüência esperada no sexto dia?
5. Após 1 ano de uso, a taxa de depreciação de um automóvel em qualquer instante é proporcional a seu valor naquele instante. Se um automóvel foi comprado em 1º de junho de 1988 e seus valores em 1º de junho de 1989 e 1990 eram, respectivamente, \$ 7.000 e \$ 5.800, qual o valor esperado do carro em 1º de junho de 1994?
6. Suponha que o valor de certa coleção de antiguidades aumente com a idade e a taxa de valorização em qualquer momento seja proporcional a seu valor naquele momento. Se o valor da coleção há 10 anos era de \$ 25.000 e se o valor atual é de \$ 35.000, em quantos anos espera-se que o valor seja de \$ 50.000?
7. O crescimento das bactérias numa certa cultura se faz segundo uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes. Se inicialmente existem 1.000 bactérias e o número dobra em 30 min, quantas bactérias haverá em 2 horas?
8. Numa certa cultura de bactérias, a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes e esse número triplica a cada hora. Se após 4 horas houver 10 milhões de bactérias, qual o número de bactérias inicialmente?
9. Se a meia-vida do rádio for de 1.690 anos, que porcentagem da quantidade presente agora restará após (a) 100 anos e (b) 1.000 anos?
10. Em 15 anos, 30% de uma substância radioativa desaparecem. Ache a meia-vida da substância.
11. A mortalidade no inverno de uma certa espécie de animal selvagem numa dada região do hemisfério norte apresenta uma taxa proporcional ao número de indivíduos presentes em qualquer momento. Havia 2.400 indivíduos da espécie em 21 de dezembro (primeiro dia de inverno) e 30 dias depois havia 2.000. Quantos indivíduos da espécie deverão sobreviver ao inverno? Isto é, quantos estarão vivendo 90 dias após 21 de dezembro?
12. Quando é removida a força eletromotriz de um circuito elétrico simples, sem capacitores, mas tendo indutores e resistores, a taxa de decaimento da corrente é proporcional à corrente. A corrente é i ampères t s após a remoção e $i = 40$, quando $t = 0$. Se a corrente cair para 15 ampères em 0,01 s, ache i em termos de t.
13. (a) Ache os juros percebidos num investimento de \$ 500 ao final de um ano, se a taxa de juros anual for de 10% compostos continuamente. (b) Qual é a taxa anual efetiva de juros?
14. Um empréstimo de \$ 1.000 deve ser pago em um único pagamento, ao final de um ano. Se a taxa de juros for 8% compostos continuamente, determine (a) a quantia total a ser paga (b) a taxa de juros anual efetiva.
15. Se certa quantia investida dobra em 10 anos a juros compostos continuamente, quanto tempo levará para que a quantia inicial triplique?
16. Se o poder de compra de um dólar decresce a uma taxa de 10% anualmente, compostos continuamente, quanto tempo irá levar para que o poder de compra seja de meio dólar?

17. Quanto tempo levará para que \$ 500 acumulem até \$ 1.000, se o dinheiro for investido a 8% ao ano compostos continuamente?

18. Em Biologia, uma equação usada algumas vezes para descrever o crescimento restrito de uma população é a Equação de Gompertz:

$$\frac{dy}{dt} = ky \ln \frac{a}{y}$$

onde a e k são constantes positivas. Ache a solução geral dessa equação diferencial.

19. Numa certa reação química, a taxa de conversão de uma substância é proporcional à quantidade de substância que ainda não reagiu até aquele instante. Após 10 min, um terço da quantidade da substância original já reagiu e 20 g já reagiram após 15 min. Qual era a quantidade original da substância?

20. O açúcar se dissolve em água a uma taxa proporcional à quantidade que permanece não dissolvida. Se havia 50 kg de açúcar para serem dissolvidos e ao final de 5 h ainda havia 20 kg não dissolvidos, quanto tempo levará para que 90% do açúcar seja dissolvido?

21. Há 100 litros de água salgada em um tanque e essa água contém 70 kg de sal dissolvido. Despeja-se água pura no tanque a uma taxa de 3 L/min e o conteúdo é misturado permanentemente, mantendo-se uniforme, e escoando na mesma taxa. Quantos quilogramas de sal existirão no tanque após uma hora?

22. Um tanque contém 200 litros de água salgada, havendo 3 kg de sal por litro. Deseja-se dissolver essa solução acrescentando-se água salgada com 1 kg de sal por litro, a uma taxa de 4 L/min e fazendo-se a solução escoar na mesma taxa. Quando o tanque conterá $1\frac{1}{2}$kg de sal por litro?

23. O Professor Willard Libby da Universidade da Califórnia em Los Angeles recebeu o Prêmio Nobel de Química por uma descoberta de um método para determinar a data da morte de um fóssil. Ele usou o fato de que no tecido de um organismo vivo estão presentes dois tipos de átomos de carbono: um carbono radioativo comumente notado por ^{14}C e um carbono estável, ^{12}C, sendo que a razão entre a quantidade de ^{14}C e a de ^{12}C é aproximadamente constante. Quando o organismo morre, a lei do decaimento natural aplica-se somente ao ^{14}C. Se for determinado que a quantidade de ^{14}C presente é somente 45% da quantidade original e a meia-vida do ^{14}C é de 5.600 anos, quando morreu o organismo?

24. Refira-se ao Exercício 23. Suponha que um arqueólogo tenha determinado que a quantidade de ^{14}C presente no fóssil seja 25% da quantidade original. Usando o fato de que a meia-vida do ^{14}C é de 5.600 anos, qual a idade do fóssil?

25. Suponha que faltem 3 horas para um estudante fazer um exame e durante esse tempo ele deseja memorizar um conjunto de 60 fatos. De acordo com os psicólogos, a taxa segundo a qual uma pessoa pode memorizar um conjunto de fatos é proporcional ao número de fatos que restam para serem memorizados. Assim, se o estudante memorizar y fatos em t min,

$$\frac{dy}{dt} = k(60 - y)$$

onde k é uma constante positiva e $y < 60$ para todo $t \geqslant 0$. Supõe-se que inicialmente zero fato seja memorizado. Se o estudante memoriza 15 fatos nos 20 primeiros min, quantos fatos ele irá memorizar em (a) 1 h e (b) 3 h?

26. Um trabalhador recém-contratado para uma linha de montagem pode fazer uma determinada tarefa, de tal forma que se y unidades forem completadas por dia após t dias na linha de montagem, então

$$\frac{dy}{dt} = k(90 - y)$$

onde k é uma constante positiva e $y < 90$ para todo $t \geqslant 0$. No primeiro dia de trabalho 60 unidades são completadas e após 5 dias de trabalho, o trabalhador faz 75 unidades por dia. (a) Quantas unidades por dia ele estará fazendo após 9 dias no trabalho? (b) Mostre que após 30 dias ele estará produzindo quase a pleno potencial.

27. Para a função densidade de probabilidade normal padrão determine a probabilidade de que uma escolha ao acaso de x esteja no intervalo $[0, 1]$. Aproxime o valor da integral definida usando (a) a regra do trapézio, com $n = 4$ e (b) a regra de Simpson, com $n = 4$.

28. Para a função densidade de probabilidade normal padrão, determine a probabilidade de que uma escolha ao acaso de x esteja no intervalo $[-3, 3]$. Aproxime o valor da integral definida usando (a) a regra do trapézio, com $n = 6$ e (b) a regra de Simpson, com $n = 6$.

29. A função erro, denotada por fer, é definida por

$$\text{fer}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Ache um valor aproximado da fer (1) para quatro casas decimais, usando a regra de Simpson com $n = 10$.

30. Para a função erro definida no Exercício 29, ache um valor aproximado da fer (10) até quatro casas decimais, usando a regra de Simpson com $n = 10$.

7.8 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

(Suplementar)

Introduzimos equações diferenciais com variáveis separáveis na Secção 5.3, e as aplicações adicionais de tais equações apareceram na Secção 7.7. Agora discutiremos as **equações diferenciais lineares de primeira ordem**, que são equações da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

onde P e Q são contínuas e $y = F(x)$ onde F é diferenciável. Uma função F que satisfaz essa equação é chamada de **solução** da equação. A **solução completa** envolve uma constante arbitrária.

Para chegar a um método que dê a solução completa de (1), começamos tomando $Q(x) = 0$ para obter a equação

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{2}$$

Podemos separar as variáveis e obtemos

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

Integrando ambos os membros, temos

$$\ln|y| + \bar{C} = -\int P(x)\,dx$$

Se tomarmos $\bar{C} = -\ln|C|$, temos

$$\begin{aligned} \ln|y| - \ln|C| &= -\int P(x)\,dx \\ \ln\left|\frac{y}{C}\right| &= -\int P(x)\,dx \\ \frac{y}{C} &= e^{-\int P(x)\,dx} \\ ye^{\int P(x)\,dx} &= C \end{aligned} \tag{3}$$

A solução completa de (2) é dada por (3). Mas lembre-se de que nosso objetivo é resolver a equação (1). Observe que se calcularmos a diferencial do primeiro membro de (3), teremos

$$d(ye^{\int P(x)\,dx}) = dye^{\int P(x)\,dx} + ye^{\int P(x)\,dx}P(x)\,dx$$

$$d(ye^{\int P(x)\,dx}) = e^{\int P(x)\,dx}(dy + P(x)y\,dx) \tag{4}$$

Agora, podemos mostrar que se multiplicarmos ambos os membros de (1) por $e^{\int P(x)\,dx}\,dx$, o primeiro membro se tornará o segundo membro de (4). Fazemos isso escrevendo (1):

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$e^{\int P(x)\,dx}\,dx\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y\right] = e^{\int P(x)\,dx}\,dx[Q(x)]$$

$$e^{\int P(x)\,dx}(dy + P(x)y\,dx) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx$$

Substituindo de (4) nessa equação, obtemos

$$d(ye^{\int P(x)\,dx}) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx$$

Integrando ambos os membros, resulta

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx$$

Se G for uma antiderivada qualquer de $Q(x)e^{\int P(x)\,ax}$, temos

$$ye^{\int P(x)\,dx} = G(x) + C$$

$$y = G(x)e^{-\int P(x)\,dx} + Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = e^{-\int P(x)\,dx}\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Ce^{-\int P(x)\,dx} \tag{5}$$

Sabemos que se a equação (1) tiver uma solução, será da forma (5). Para verificar que (5) é a solução completa de (1), devemos mostrar que qualquer y da forma (5) é a solução de (1). Para fazer isso, multiplicamos primeiro ambos os membros de (5) por $e^{\int P(x)\,dx}$ para obter

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C$$

Diferenciando ambos os membros dessa equação com relação a x, temos

$$\frac{dy}{dx}e^{\int P(x)\,dx} + ye^{\int P(x)\,dx}P(x) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

Agora, multiplicamos ambos os membros por $e^{-\int P(x)\,dx}$ e obtemos

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Provamos o teorema a seguir.

7.8.1 TEOREMA A solução completa da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

onde P e Q são contínuas, é dada por

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

Para aplicar o Teorema 7.8.1, é necessário memorizar a fórmula por y. Entretanto, podemos resolver uma equação linear de primeira ordem calculando primeiro $e^{\int P(x)\,dx}$, que é chamada um **fator de integração** da equação. Então, procedemos da mesma maneira que fizemos para obter (5), ou seja, multiplicamos ambos os lados da equação pelo fator de integração e depois integramos ambos os membros da equação resultante. Ao calcular o fator de integração, tomamos a constante arbitrária como sendo igual a zero, pois qualquer antiderivada de P resultará um fator de integração. Demonstramos esse procedimento na ilustração a seguir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 3x$$

é da forma de (1) onde $P(x) = -2x$ e $Q(x) = 3x$. Para resolver essa equação calculamos primeiro

$$e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$

Multiplicamos ambos os membros da equação dada por esse fator de integração para obter

$$e^{-x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right) + e^{-x^2}(-2xy) = e^{-x^2}(3x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}y) = 3xe^{-x^2}$$

Integrando ambos os membros, temos

$$e^{-x^2}y = \int 3xe^{-x^2}\,dx$$

$$e^{-x^2}y = -\tfrac{3}{2}e^{-x^2} + C$$

Multiplicamos ambos os membros por e^{x^2} e obtemos

$$y = -\tfrac{3}{2} + Ce^{x^2}$$

que é a solução completa da equação diferencial dada. ◀

Observe que a equação diferencial na Ilustração 1 também pode ser resolvida, separando as variáveis após escrevermos a equação na forma

$$\frac{dy}{dx} = x(3 + 2y)$$

Uma equação diferencial linear da forma (1) para a qual $Q(x) = 0$ também pode ser resolvida, separando as variáveis. Na ilustração a seguir resolvemos tal equação por dois métodos.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** (a) Resolvemos a equação

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

como uma equação diferencial linear de primeira ordem da forma (1), onde $P(x) = 2x$ e $Q(x) = 0$. Um fator de integração é

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por e^{x^2}, temos

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y = 0$$

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = 0$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$e^{x^2}y = C$$

$$y = Ce^{-x^2}$$

(b) Resolvemos a mesma equação, separando as variáveis

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int x\,dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + K$$

$$|y| = e^{-x^2}e^K$$

$$y = \pm e^K e^{-x^2}$$

$$y = Ce^{-x^2}$$

onde $C = \pm e^K$. ◀

EXEMPLO 1 Encontre a solução completa da equação diferencial

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^2$$

onde $x \neq 0$.

Solução Para escrever a equação diferencial dada na forma (1) dividimos ambos os membros da equação por x, de modo que o coeficiente dy/dx seja 1. Temos

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x \tag{6}$$

Como $P(x) = -\frac{2}{x}$, um fator de integração é

$$e^{\int(-2/x)\,dx} = e^{-\ln x^2}$$
$$= \frac{1}{x^2}$$

Multiplicando ambos os membros de (6) por $1/x^2$, obtemos

$$\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x^3}y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \frac{1}{x}$$

Integrando ambos os membros resulta

$$\frac{1}{x^2}y = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{x^2}y = \ln|x| + C$$

$$y = x^2\ln|x| + Cx^2$$

que é a solução completa.

EXEMPLO 2 Encontre a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y \operatorname{cotg} x = \cos x$$

se $y = 1$ quando $x = \frac{1}{6}\pi$.

Solução Temos uma equação diferencial linear de primeira ordem para a qual $P(x) = \operatorname{cotg} x$. Portanto, um fator de integração é

$$\begin{aligned} e^{\int \operatorname{cotg} x\, dx} &= e^{\ln|\operatorname{sen} x|} \\ &= |\operatorname{sen} x| \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada por sen x (desprezamos as barras de valor absoluto pois $\operatorname{sen} x > 0$ quando $x = \frac{1}{6}\pi$), obtemos

$$\operatorname{sen} x \frac{dy}{dx} + (\cos x)y = \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(y \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x \cos x$$

Integrando ambos os membros, resulta

$$y \operatorname{sen} x = \int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$$

$$y \operatorname{sen} x = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C \tag{7}$$

Como $y = 1$ quando $x = \frac{1}{6}\pi$, substituímos esses valores por x e y nessa equação e obtemos

$$\begin{aligned} 1 \operatorname{sen} \tfrac{1}{6}\pi &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{6}\pi + C \\ \tfrac{1}{2} &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} + C \\ C &= \tfrac{3}{8} \end{aligned}$$

Substituindo C por $\frac{3}{8}$ em (7), obtemos a solução desejada:

$$y \operatorname{sen} x = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + \tfrac{3}{8}$$

$$8y \operatorname{sen} x = 4 \operatorname{sen}^2 x + 3$$

EXEMPLO 3 Ache a solução completa da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{4x + y^2}$$

onde $y \neq 0$.

Solução Essa equação não é linear em y. Entretanto,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4x + y^2}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{4}{y}x = y \tag{8}$$

Essa é uma equação diferencial de primeira ordem que é linear em x, isto é, é da forma

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

onde $P(y) = -4/y$ e $Q(y) = y$. Portanto, um fator de integração é

$$\begin{aligned} e^{\int(-4/y)\,dy} &= e^{-\ln y^4} \\ &= \frac{1}{y^4} \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros de (8) por $1/y^4$ resulta

$$\frac{1}{y^4}\frac{dx}{dy} - \frac{4}{y^5}x = \frac{1}{y^3}$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y^4}x\right) = \frac{1}{y^3}$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\frac{x}{y^4} = \int \frac{1}{y^3}\,dy$$

$$\frac{x}{y^4} = -\frac{1}{2y^2} + C$$

$$x = -\tfrac{1}{2}y^2 + Cy^4$$

que é a solução completa.

Uma aplicação das equações diferenciais lineares de primeira ordem é encontrada em Física, atribuída à *lei do resfriamento de Newton*, que estabelece que a razão na qual um corpo varia de temperatura é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio ambiente que o cerca.

EXEMPLO 4 Se um corpo estiver no ar, cuja temperatura é 35° e resfria-se de 120° a 60° em 40 min, use a lei do resfriamento de Newton para achar a temperatura do corpo depois de 100 min.

Solução Seja t min o tempo decorrido desde que o corpo começou a esfriar. Seja y graus a temperatura do corpo em t min. A Tabela 1 dá as condições laterais, onde y_{100} graus é a temperatura do corpo após 100 min.

Tabela 1

t	0	40	100
y	120	60	y_{100}

Da lei do resfriamento de Newton temos

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 35)$$

onde k é uma constante e $y > 35$ para todo $t \geqslant 0$.

Escrevendo a equação na forma

$$\frac{dy}{dt} - ky = -35k \tag{9}$$

observamos que se trata de uma equação diferencial linear de primeira ordem para a qual um fator de integração é

$$e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$$

Multiplicando ambos os membros de (9) por e^{-kt} resulta

$$e^{-kt}\frac{dy}{dt} - ke^{-kt}y = -35ke^{-kt}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-kt}y) = -35ke^{-kt}$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$e^{-kt}y = \int -35ke^{-kt}\,dt$$

$$e^{-kt}y = 35e^{-kt} + C$$

$$y = 35 + Ce^{kt}$$

Quando $t = 0$, $y = 120$; assim, $C = 85$. Logo,

$$y = 35 + 85e^{kt} \tag{10}$$

Quando $t = 40$, $y = 60$ e obtemos

$$60 = 35 + 85e^{40k}$$

$$e^{40k} = \tfrac{5}{17}$$

Substituímos esse valor de e^{40k} em (10) e obtemos

$$y = 35 + 85(e^{40k})^{t/40}$$

$$y = 35 + 85(\tfrac{5}{17})^{t/40}$$

Como $y = y_{100}$ quando $t = 100$, da relação anterior temos que

$$y_{100} = 35 + 85(\tfrac{5}{17})^{5/2}$$

$$= 39$$

Logo, após 100 min a temperatura do corpo será 39°.

Outra aplicação das equações diferenciais lineares de primeira ordem surge associada à eletricidade. Suponha que um circuito elétrico simples, mostrado na Figura 1, gere uma voltagem de E volts, com um gerador ou uma bateria. A corrente passa quando o botão em S, na figura, é pressionado, completando o circuito. O físico alemão Gustav Kirchhoff (1824-1887) formulou uma lei, chamada de *segunda lei de Kirchhoff*, estabelecendo que a cada instante, a soma da carga elétrica em torno do circuito elétrico é igual à força eletromotriz naquele instante. No circuito da Figura 1, seja i ampères a corrente em t s. Se L henrys for a indutância, então a carga elétrica passando pelo indutor será $L\frac{di}{dt}$, e se R ohms for a resistência, a carga elétrica que passa pelo resistor será Ri. Portanto, pela segunda lei de Kirchhoff

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \tag{11}$$

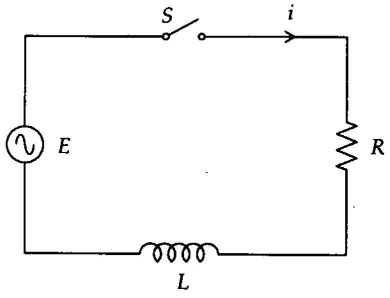


FIGURA 1

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Suponha que um circuito elétrico tenha um gerador fornecendo 150 volts e um resistor de 15 ohms e um indutor de 5 henrys, ligado em série. Além disso, suponha que o interruptor seja acionado quando $t = 0$; isto é, $i = 0$ quando $t = 0$. Da equação (11) com $E = 150$, $R = 15$ e $L = 5$, temos

$$5\frac{di}{dt} + 15i = 150$$

$$\frac{di}{dt} + 3i = 30 \tag{12}$$

Um fator de integração para (12) é $e^{\int 3\,dt} = e^{3t}$. Multiplicando ambos os membros de (12) por e^{3t}, temos

$$e^{3t}\frac{di}{dt} + 3e^{3t}i = 30e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}i) = 30e^{3t}$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$e^{3t}i = \int 30e^{3t}\,dt$$

$$e^{3t}i = 10e^{3t} + C$$

$$i = 10 + Ce^{-3t}$$

Como $i = 0$ quando $t = 0$, $C = -10$. Portanto,

$$i = 10 - 10e^{-3t}$$

$$i = 10(1 - e^{-3t})$$

Como

$$\lim_{t \to +\infty} i = \lim_{t \to +\infty} 10(1 - e^{-3t})$$

$$= 10$$

i é sempre menor que 10 pois aproxima-se de 10 enquanto t aumenta indefinidamente. Embora a corrente na verdade nunca alcance 10 ampères, estabelecemos a corrente teoricamente máxima como sendo de 10 ampères. ◀

O circuito elétrico mostrado na Figura 2 indica que uma força eletromotriz de E volts é ligada em série com um resistor de R ohms e um capacitor de C *farads. Por esse circuito, a carga elétrica passando por um resistor é Ri e a carga elétrica passando por um capacitor é q/C, onde q coulombs é a carga instantânea sobre o capacitor em t s. Pela segunda lei de Kirchhoff

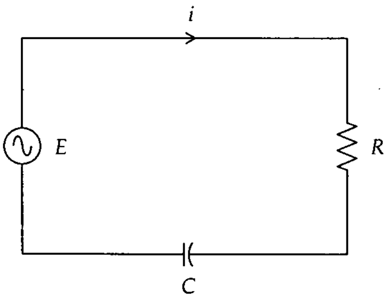


FIGURA 2

$$Ri + \frac{q}{C} = E \tag{13}$$

Como a corrente é a razão da variação da carga em relação ao tempo

$$i = \frac{dq}{dt}$$

---

* **N. do T.**: Unidade de capacidade elétrica

Substutindo dessa equação em (13), obtemos a equação diferencial de primeira ordem

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E \tag{14}$$

EXEMPLO 5 Suponha que um resistor de $(1 + 0{,}1t)$ ohms em t s seja ligado em série com um capacitor de $\frac{1}{5}$farad e uma força eletromotriz de 100 volts. A carga inicial no capacitor é 6 coulombs. Se em t s a carga for q coulombs e a corrente for i ampères, (a) expresse q como função de t e (b) expresse i como função de t. (c) Ache a carga máxima teoricamente.

Solução

(a) De (14) com $E = 100$, $C = \frac{1}{5}$ e $R = 1 + 0{,}1t$, temos

$$(1 + 0{,}1t)\frac{dq}{dt} + 5q = 100$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{5}{1 + 0{,}1t}q = \frac{100}{1 + 0{,}1t}$$

Um fator de integração dessa equação diferencial é

$$e^{\int 5\,dt/(1\,+\,0{,}1t)} = e^{50\ln(1\,+\,0{,}1t)}$$
$$= (1 + 0{,}1t)^{50}$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $(1 + 0{,}1t)^{50}$ resulta

$$(1 + 0{,}1t)^{50}\frac{dq}{dt} + 5(1 + 0{,}1t)^{49}q = 100(1 + 0{,}1t)^{49}$$

$$\frac{d}{dt}[(1 + 0{,}1t)^{50}q] = 100(1 + 0{,}1t)^{49}$$

$$(1 + 0{,}1t)^{50}q = \int 100(1 + 0{,}1t)^{49}\,dt$$

$$(1 + 0{,}1t)^{50}q = 20(1 + 0{,}1t)^{50} + C$$

$$q = 20 + C(1 + 0{,}1t)^{-50}$$

Como a carga inicial é 6, $q = 6$ quando $t = 0$. Substituindo q e t por esses valores na equação acima, temos $C = -14$. Portanto,

$$q = 20 - 14(1 + 0{,}1t)^{-50}$$

(b) Como $i = \dfrac{dq}{dt}$

$$i = \frac{d}{dt}[20 - 14(1 + 0{,}1t)^{-50})$$
$$= 70(1 + 0{,}1t)^{-51}$$

(c) $\lim\limits_{t\to+\infty} q = \lim\limits_{t\to+\infty} [20 - 14(1 + 0{,}1t)^{-50}]$

$$= 20$$

Portanto, a carga máxima teoricamente é 20 ampères por segundo.

EXERCÍCIOS 7.8

Nos Exercícios de 1 a 4, resolva a equação diferencial por dois métodos: (a) use um fator de integração; (b) separe as variáveis.

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 0$

2. $\dfrac{dy}{dx} + y \cos x = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = 0$

4. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

Nos Exercícios de 5 a 16, ache a solução completa da equação diferencial.

5. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^x$

6. $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 5x$

7. $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$

8. $x^2\dfrac{dy}{dx} + 2xy = e^x$

9. $(3y - 2x)\dfrac{dy}{dx} = y$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x + y^4}$

11. $\dfrac{dy}{dx} + 2y \operatorname{cotg} x = \cos x$

12. $\cos x \dfrac{dy}{dx} = 2 + 2y \operatorname{sen} x$

13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - 2xy}{1 + x^2}$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - 2y}{2 \sec x}$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y \ln y}{x + \ln y}$

16. $2y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^{y^2} + x}$

Nos Exercícios de 17 a 22, ache uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição dada.

17. $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3 + 1$; $y = 1$ quando $x = 1$

18. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x^2$; $y = 0$ quando $x = -1$

19. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = y - x$; $y = 2$ quando $x = 1$

20. $\dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \sec x$; $y = 1$ quando $x = 0$

21. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + 2y \operatorname{cotg} x$; $y = 2$ quando $x = \frac{1}{4}\pi$

22. $x\dfrac{dy}{dx} = 2y + 4x^2 \ln x$; $y = 4$ quando $x = 1$

23. Ache uma equação da curva que passa pelo ponto $(\frac{1}{6}\pi, 0)$ e para a qual a inclinação de qualquer ponto (x, y) sobre ela seja $(2y + 4)/\operatorname{tg} x$.

24. Ache uma equação da curva que passa pelo ponto $(1, 2)$ e para a qual a indicação em qualquer ponto (x, y) sobre ela seja $(3 - 2xy)/x^2$.

25. Nas condições do Exemplo 4, depois de quantos minutos a temperatura do corpo será 45°?

26. Se um corpo no ar, a uma temperatura de 0° resfria de 200° para 100° em 40 min, quantos minutos a mais levará para o corpo se resfriar a 50°? Use a lei de resfriamento de Newton.

27. Se um termômetro foi tirado de um ambiente em que a temperatura é 75° para um lugar aberto onde a temperatura é 35° e a leitura do termômetro é 65° após 30 s, (a) quanto tempo após ser removido ele marcará 50°? (b) Qual será a leitura do termômetro após 3 min? Use a lei do resfriamento de Newton.

28. Uma caneca com água fervendo a 100° foi resfriada no ar a uma temperatura de 0°. Após 20 min a temperatura da água passou para 90°. (a) Após quantos minutos a temperatura da água passou para 80°? (b) Qual seria a temperatura após 1 h? Use a lei do resfriamento de Newton.

29. Uma força eletromotriz de 60 volts é aplicada a um circuito elétrico simples consistindo de um resistor de 20 ohms e de um indutor de 4 henrys. Se i ampères for a corrente em t s e $i = 0$ quando $t = 0$, (a) expresse i como uma função de t. (b) Ache a corrente teoricamente máxima.

30. Faça o Exercício 29 se, ao invés da indutância constante, um indutor de L henrys varia com o tempo, de modo que em t s, $L = 0{,}04 + 0{,}01t$ onde $0 < t \leqslant 500$.

31. Um circuito elétrico simples consiste em um indutor de 5 henrys em série com um resistor de 40 ohms, e em t s a força eletromotriz é e^t volts. Se a corrente for i ampères em t s e $i = 0$ quando $t = 0$, expresse i como uma função de t.

32. Faça o Exercício 31 se a indutância for L henrys e a resistência for R ohms, onde L e R são constantes positivas. A força eletromotriz ainda é e^t volts em t s.

33. Um circuito elétrico simples tem um resistor de R ohms, onde $R = 1 + 0{,}01t$ em t s e $0 \leqslant t \leqslant 500$. O resistor é ligado em série com um capacitor de 0,1 farad e uma força eletromotriz de 80 volts. A carga é q coulombs e a corrente é i ampères em t s. Se a carga inicial no capacitor for 4 coulombs, (a) expresse q como uma função de t, e (b) expresse i como função de t. (c) Ache a carga teoricamente máxima.

34. Uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

onde, n é uma constante, é chamada de *equação diferencial de Bernoulli*, em homenagem a James Bernoulli (1654-1705). Mostre que uma equação de Bernoulli pode ser linear em u pela substituição de $u = y^{1-n}$.

Nos Exercícios de 35 a 38, ache a solução completa da equação diferencial de Bernoulli pelo resultado do Exercício 34.

35. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^4}{x^4}$

36. $x^2\dfrac{dy}{dx} - y^2 = 2xy$

37. $e^{x^2}\dfrac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y = xy^3$

38. $\cos x \dfrac{dy}{dx} + y^2 = y \operatorname{sen} x$; $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 7

Nos Exercícios de 1 a 6, determine se a função dada tem uma inversa. Se existir, faça o seguinte: (a) defina e estabeleça o seu domínio e a sua imagem; (b) faça esboços, no mesmo conjunto de eixos, dos gráficos da função e de sua inversa. Se a função não tiver inversa, mostre que uma reta horizontal intercepta o gráfico da função em mais do que um ponto.

1. $f(x) = x^3 - 4$ **2.** $f(x) = 2\sqrt[3]{x} - 1$ **3.** $f(x) = 9 - x^2$

4. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ **5.** $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x}$ **6.** $f(x) = |2x - 3|$

Nos Exercícios 7 e 8, (a) prove que a função dada tem uma inversa, (b) ache $f^{-1}(x)$ e (c) verifique as relações do Teorema 7.1.4 para f e f^{-1}.

7. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$ **8.** $f(x) = \dfrac{2x - 1}{2x + 1}$

Nos Exercícios de 9 a 12, ache $(f^{-1})'(d)$.

9. $f(x) = x^2 - 6x + 8,\ x \geqslant 3;\ d = 3$
10. $f(x) = \sqrt{3x + 4};\ d = 5$
11. $f(x) = 8x^3 + 6x;\ d = 4$
12. $f(x) = x^5 + x - 22;\ d = 12$

Nos Exercícios de 13 a 24, diferencie a função dada.

13. $f(x) = (\ln x^2)^2$ **14.** $f(t) = 3\ \mathrm{sen}(e^{4t})$

15. $g(x) = 2^{\cos 4x}$ **16.** $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$

17. $f(x) = e^{x/(4 + x^2)}$ **18.** $f(x) = 10^{-5x^2}$

19. $f(x) = \sqrt{\log_{10} \dfrac{1 + x}{1 - x}}$ **20.** $g(x) = \ln \sqrt{\dfrac{2x + 1}{x - 3}}$

21. $f(t) = t^{3/\ln t}$ **22.** $F(x) = \log_{10}(x^2 2^{x^2 + 1})$

23. $f(x) = (x)^{x^{e^x}};\ x > 0$ **24.** $f(x) = 3^{x^{x^2}}$

Nos Exercícios de 25 a 32, calcule a integral indefinida.

25. $\displaystyle\int \frac{3e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int e^{2x^2 - 4x}(x - 1)\,dx$

27. $\displaystyle\int (e^{3x} + 2^{3x})\,dx$ **28.** $\displaystyle\int \frac{10^{\ln x^2}}{x}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{xe^{6x^2}}{\sqrt{1 + e^{6x^2}}}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int (x + 1)e^x 7^{xe^x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{3 \cdot 2^x + 4}}$ **32.** $\displaystyle\int \frac{10^x + 1}{10^x - 1}\,dx$

Nos Exercícios de 33 a 38, calcule a integral definida.

33. $\displaystyle\int_0^2 x^2 e^{x^3}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int_0^1 (e^{2x} + 1)^2\,dx$

35. $\displaystyle\int_1^8 \frac{x^{1/3}}{x^{4/3} + 4}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int_{1/3}^{1/2} \frac{4x^{-3} + 2}{x^{-2} - x}\,dx$

37. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x - 5}\,dx$ **38.** $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)}$

39. Ache $\dfrac{dy}{dx}$ se $ye^x + xe^y + x + y = 0$

40. Se $f(x) = \log_{(e^x)}(x + 1)$, ache $f'(x)$.

41. Use diferenciais para encontrar um valor aproximado com três casas decimais de $\log_{10}100.937$. Use o fato de que $\log_{10}e = 0{,}434$ com três casas decimais de precisão.

42. Ache a equação da reta tangente à curva $y = x^{x-1}$ em $(2, 2)$.

43. Uma partícula move-se sobre uma reta, sendo s a distância orientada da partícula a partir da origem, v m/s, a velocidade da partícula e a m/s^2, a aceleração da partícula, em t s. Se $a = e^t + e^{-t}$, $v = 1$ e $s = 2$, quando $t = 0$, ache v e s em termos de t.

44. A área da região limitada pela curva $y = e^{-x}$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = b(b > 0)$ é uma função de b. Se f for essa função, ache uma expressão para $f(b)$. Ache também $\lim\limits_{b \to +\infty} f(b)$.

45. O volume do sólido obtido com a rotação da região do Exercício 44 em torno do eixo x é uma função de b. Se g for essa função encontre uma expressão para $g(b)$. Ache também $\lim\limits_{b \to +\infty} g(b)$.

46. A taxa de crescimento natural da população de uma certa cidade é proporcional ao número de habitantes. Se a população dobra em 60 anos e se a população em 1950 era 60.000, estime a população no ano 2000.

47. A taxa de decaimento de uma substância radioativa é proporcional à quantidade de substância presente. Se metade de um dado depósito da substância desaparece em 1.900 anos, quanto tempo levará para que desapareça 95% do depósito?

48. Prove que o retângulo que tem a base no eixo x e dois vértices na curva $y = e^{-x^2}$, terá a maior área possível se os seus vértices estiverem nos pontos de inflexão do gráfico.

49. Dada $f(x) = \ln|x|$ e $x < 0$. Mostre que f tem uma função inversa. Se g for a função inversa, ache $g(x)$ e o domínio de g.

50. Prove que se $x < 1$, $\ln x < x$ (*Sugestão*: seja $f(x) = x - \ln x$, mostre então que f é decrescente em $(0, 1)$ e ache $f(1)$.)

51. Quando um gás está em expansão ou com pressão adiabática (sem ganho ou perda de calor), então a taxa de variação da pressão em relação ao volume varia diretamente com a pressão e inversamente com o volume. Se a pressão for p N/m^2 quando o volume for v m^3, e a pressão e o volume iniciais forem respectivamente p_0 N/m^2 e v_0m^3, mostre que $pv^k = p_0 v_0^k$.

52. Seja W N/m o trabalho realizado por um gás contra um pistão em um cilindro e P dinas/cm^2 a pressão do gás quando o volume é V cm^3. Mostre que se V_1 cm^3 e V_2 cm^3 forem os volumes inicial e final, respectivamente, então

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV.$$

53. Suponha que um pistão comprima um gás de um volume inicial de 60 cm^3 até um volume de 40 cm^3. Se a lei de Boyle (Exercício 23 nos Exercícios 3.4) for válida e a pressão inicial for 50 dinas/cm^2, ache o trabalho realizado pelo pistão. (Use o resultado do Exercício 52.)

54. A carga elétrica sobre uma superfície esférica escoa a uma taxa proporcional à carga. Inicialmente, a carga elétrica era de 8 coulombs e um quarto escoou em 15 min. Quando restarão apenas 2 coulombs?

55. Quanto tempo levará para se duplicar um investimento se os juros são pagos a uma taxa de 8% ao ano compostos continuamente?

56. Os juros em uma conta remunerada são calculados à taxa de 10% ano compostos continuamente. Se alguém desejar obter $ 1.000 na conta ao final de um ano com um único depósito feito agora, qual deverá ser o montante do depósito?

57. A taxa de crescimento numa certa cultura de bactérias é proporcional ao número de bactérias presentes a cada instante e o número duplica em 20 min. Se ao final de uma hora existirem 1.500.000 bactérias, quantas bactérias havia inicialmente?

58. Consulte o Exercício 23 nos Exercícios 7.7. Um paleontologista descobriu um inseto dentro de um âmbar transparente que é resina de árvore solidificada e foi determinando que a quantidade de ^{14}C presente no inseto era 2% da quantidade original. Use o fato de que a meia-vida de ^{14}C é 5.600 anos, para determinar a idade do inseto quando ele foi descoberto.

59. Um aluno que está estudando uma língua estrangeira tem 50 verbos para serem memorizados. A taxa segundo a qual o estudante pode memorizar esses verbos é proporcional ao número de verbos que restam a ser memorizados, isto é, se o estudante memoriza y verbos em t min

$$\frac{dy}{dt} = k(50 - y)$$

Suponha que inicialmente nenhum verbo tenha sido memorizado e que nos primeiros 30 min 20 verbos foram memorizados. Quantos verbos serão memorizados em (a) 1 hora e (b) 2 horas? (c) Após quantas horas restará apenas um verbo para ser memorizado?

60. Um tanque contém 100 litros de água pura e é despejada no tanque água salgada contendo 2 kg de sal por litro, a uma taxa de 3 litros/min. A mistura, sendo agitada permentemente para se manter uniforme, escoa na mesma taxa. Quantos quilogramas de sal existirão no tanque ao final de 30 min?

61. Um tanque contém 60 litros de água salgada com 120 kg de sal dissolvido. É despejada no tanque água salgada contendo 3 kg de sal por litro, a uma taxa de 2 litros/min. A mistura é agitada para manter-se uniforme, e escoa do tanque na mesma taxa. Quantos tempo irá levar para que restem no tanque 135 kg de sal?

62. Se a população de uma determinada cidade duplica a cada 25 anos, a que percentagem estará crescendo anualmente?

63. Ache o ponto no gráfico de $f(x) = e^x$ para o qual a reta que passa por ele e é tangente ao gráfico passa também pela origem.

64. Ache o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = 2^{-x}$ e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$ em torno do eixo x.

65. Prove, usando a definição de uma derivada, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$$

(*Nota:* compare com o Exercício 53 nos Exercícios 7.3.)

66. Prove, sem usar a definição de uma derivada, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

(*Sugestão*: seja $y = a^x - 1$ e expresse $(a^x - 1)/x$ como função de y, digamos, $g(y)$. Então mostre que $y \to 0$ quando $x \to 0$ e encontre $\lim\limits_{y \to 0} g(y)$.)

67. Use os resultados dos Exercícios 65 e 66 para provar que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^b - 1}{x - 1} = b$$

(*Sugestão:* escreva

$$\frac{x^b - 1}{x - 1} = \frac{e^{b \ln x} - 1}{b \ln x} \cdot \frac{b \ln x}{x - 1}$$

Então tome $s = b \ln x$ e $t = x - 1$.)

68. Prove, usando a definição de uma derivada, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$$

69. Se o domínio de f for o conjunto de todos números reais e $f'(x) = cf(x)$ para todo x onde c é uma constante, prove que existe uma constante k para a qual $f(x) = ke^{cx}$ para todo x. (*Sugestão:* considere a função g para a qual $g(x) = f(x)\, e^{-cx}$ e encontre $g'(x)$.)

70. Prove que

$$D_x^{\,n}(\ln x) = (-1)^{n-1} \frac{(n - 1)!}{x^n}$$

(*Sugestão:* use indução matemática.)

71. Ache $\int_0^t e^{-|x|} dx$ se t for um número real qualquer.

72. Prove que se $x > 0$ e $\int_1^x t^{h-1} dt = 1$, então

$$\lim_{h \to 0} x = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h}$$

73. Faça o Exercício 65 da série de Exercícios de Revisão do Capítulo 5, calculando todas as integrais.

74. Uma função importante em Estatística é a função densidade de probabilidade definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

onde σ e μ são constantes tais que $\sigma > 0$ e μ é um número real qualquer. Ache (a) os extremos relativos de f; (b) os pontos de inflexão do gráfico de f; (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; (d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. (e) Faça um esboço do gráfico de f.

Os Exercícios de 75 a 81 pertencem à Secção Suplementar 7.8. Nos Exercícios 75 e 76, ache a solução completa da equação diferencial.

75. $x^2 \dfrac{dy}{dx} + 2xy = 3x^2 + 1$

76. $\dfrac{dx}{dy} + 2x \operatorname{cotg} y = \sec^2 y$

Nos Exercícios 77 e 78, ache uma solução da equação diferencial, que satisfaça a condição dada.

77. $\cos x \dfrac{dy}{dx} = 1 - y - \operatorname{sen} x$; $y = 2$ quando $x = 0$

78. $x \dfrac{dy}{dx} + y = e^x$; $y = 1$ quando $x = \ln 2$

79. Uma força eletromotriz de 100 volts é aplicada a um circuito elétrico simples, consistindo em um resistor de 10 ohms e um indutor de L henrys, onde L varia com o tempo, de modo que em t s, $L = 0{,}03 + 0{,}01t$ onde $0 \leqslant t \leqslant 1.000$. Se i ampères for a corrente em t s e $i = 0$ quando $t = 0$, (a) expresse i como uma função de t. (b) Ache a corrente máxima, teoricamente.

80. Encontre uma equação da curva que passe pelo ponto $(0, -1)$ e para a qual a inclinação em qualquer ponto (x, y) sobre ela seja $\cos x - y \operatorname{tg} x$.

81. Use a lei do resfriamento de Newton para determinar a temperatura de um corpo num ambiente onde a temperatura é 40°, se 30 min atrás a temperatura do corpo era 150° e 10 min atrás era 90°.

OITO

Funções Trigonométricas Inversas e Funções Hiperbólicas

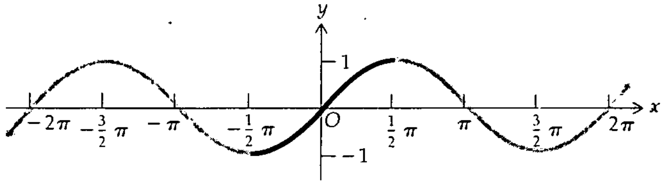
$D_x(\operatorname{sen}^{-1} x)$
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Neste capítulo aparecem mais funções transcendentais. Definimos as *funções trigonométricas inversas* na Secção 8.1. Essas funções desempenham um papel importante em nossa discussão sobre integração por substituição trigonométrica no próximo capítulo. As Secções 8.2 e 8.3 são dedicadas a derivadas e a integrais envolvendo as funções trigonométricas inversas.

As *funções hiperbólicas* envolvem potências de e, e são introduzidas na Secção 8.4. Essas funções têm propriedades similares àquelas das funções trigonométricas. A Secção Suplementar 8.5 trata das funções hiperbólicas inversas, que são usadas basicamente em associação com integração, mais adiante, na Secção Suplementar 9.8.

8.1 AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Lembre-se de que para uma função ter uma inversa, é necessário que ela seja biunívoca. A Figura 1 apresenta um esboço do gráfico da função seno, mostrando que todo número em sua imagem é o valor funcional de mais do que um número em seu domínio. Logo, a função seno não é biunívoca e, portanto, não tem uma inversa. Entretanto, observe na Figura 1 que o seno é crescente no intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Esse fato é decorrência do Teorema 4.4.3, pois se $f(x) = \text{sen } x$, então $f'(x) = \cos x > 0$ para todo x em $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Assim sendo,



$y = \text{sen } x$

FIGURA 1

muito embora a função seno não tenha inversa, segue do Teorema 7.1.5 que a função F para a qual

$$F(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2}\pi \tag{1}$$

tem uma inversa. O domínio de F é $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ e a imagem é $[-1, 1]$. Um esboço do gráfico de F está na Figura 2. A inversa da função definida por (1) é chamada *função inversa do seno.*

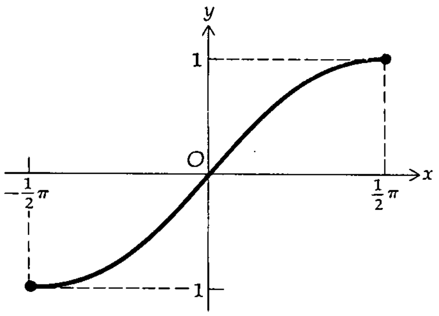


FIGURA 2

8.1.1 DEFINIÇÃO

A função inversa do seno, denotada por sen^{-1}, é assim definida:

$y = \text{sen}^{-1}\, x$ se e somente se $x = \text{sen } y$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\pi$

O domínio de sen^{-1} é o intervalo fechado $[-1, 1]$ e a imagem é o intervalo fechado $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Um esboço do gráfico está na Figura 3.

O uso do símbolo -1 no expoente para representar a função inversa do seno torna necessário denotar o recíproco de $\text{sen } x$ por $(\text{sen } x)^{-1}$, a fim de evitar confusão. Uma convenção similar aplica-se quando estivermos usando qualquer potência de expoente negativo de uma função trigonométrica. Por exemplo

$$\frac{1}{\text{sen } x} = (\text{sen } x)^{-1} \qquad \frac{1}{\text{sen}^2 x} = (\text{sen } x)^{-2} \qquad \frac{1}{\cos^3 x} = (\cos x)^{-3}$$

e assim por diante.

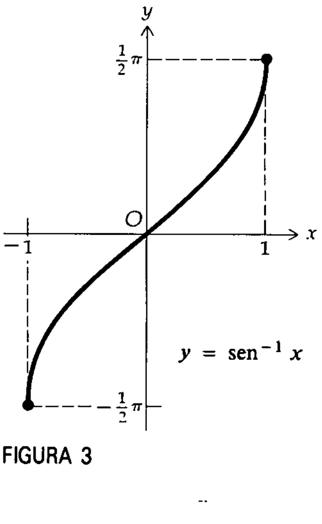


FIGURA 3

▶ ILUSTRAÇÃO 1

(a) $\text{sen}^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}\pi$ (b) $\text{sen}^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{4}\pi$ ◀

Em (1) o domínio de F restringe-se ao intervalo fechado $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, de tal modo que a função seja monótona em seu domínio e, portanto, tenha uma função inversa. No entanto, a função seno tem um período de 2π, sendo crescente em outros intervalos, por exemplo, $[-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi]$ e $[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$. Também, a função

---

***N. do T.**: outra notação muito usada para essa função é: *arc sen.*

é decrescente em certos intervalos fechados, como os intervalos $[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ e $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}]$. Qualquer um desses intervalos poderia ser escolhido para o domínio da função F da equação (1). A escolha do intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, contudo, é mais comum, pois é o maior intervalo contendo o número 0 no qual a função é monótona.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Ao usarmos uma calculadora para determinar $\text{sen}^{-1}(0{,}4695)$, dispomos primeiro a calculadora para cálculos com radianos. Colocamos 0,4695 no visor e então apertamos a tecla $\boxed{\text{sen}^{-1}}$ (ou a tecla $\boxed{\text{INV}}$, seguida da tecla $\boxed{\text{sen}}$) e lemos 0,4887. ◀

Segue da Definição 8.1.1 que

$$\text{sen}\,(\text{sen}^{-1}\,x) = x \quad \text{para } x \text{ em } [-1, 1]$$
$$\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,y) = y \quad \text{para } y \text{ em } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$$

Observe que $\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,y) \neq y$ se y não estiver no intervalo $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Por exemplo, $\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi) = \text{sen}^{-1}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,\frac{7}{4}\pi) = \text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$= \tfrac{1}{4}\pi \qquad\qquad = -\tfrac{1}{4}\pi$$

EXEMPLO 1 Ache (a) $\cos\,[\text{sen}^{-1}\,(-\frac{1}{2})]$; (b) $\text{sen}^{-1}\,(\cos\,\frac{2}{3}\pi)$

Solução Como a imagem da função inversa do seno é $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}\pi$

(a) $\cos\,[\text{sen}^{-1}\,(-\frac{1}{2})] = \cos\,(-\frac{1}{6}\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\text{sen}^{-1}\,(\cos\,\frac{2}{3}\pi) = \text{sen}^{-1}\,(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}\pi$

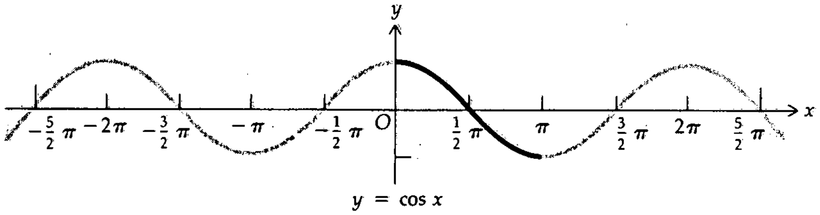


FIGURA 4

Um esboço do gráfico da função co-seno está na Figura 4. A função co-seno não tem uma inversa pois também não é biunívoca. Para definir a inversa da função co-seno restringimos o co-seno a um intervalo no qual a função é monótona. Vamos escolher o intervalo $[0, \pi]$ no qual a função co-seno é decrescente, conforme mostra a Figura 4. Consideremos então a função G definida por

$$G(x) = \cos x \quad \text{e} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

A imagem dessa função G é o intervalo fechado $[-1, 1]$, e seu domínio é o intervalo fechado $[0, \pi]$. Um esboço do gráfico de G está na Figura 5. Como essa função é contínua e decrescente em seu domínio, ela tem uma função inversa chamada a *inversa da função co-seno*.*

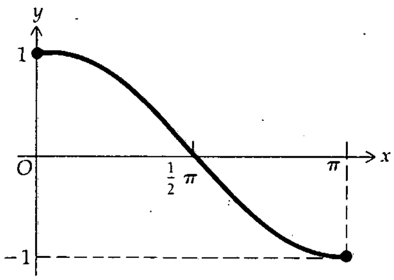
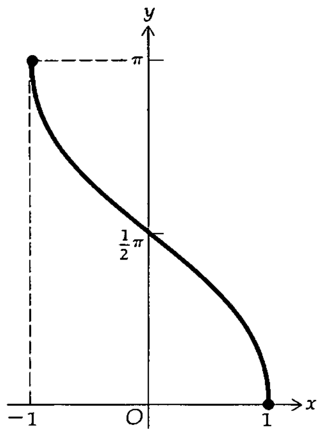


FIGURA 5

***N. do T.**: outra notação muito usada para essa função é: *arc cos*.

8.1.2 DEFINIÇÃO A **função inversa do co-seno** denotada por $\cos^{-1}$, é definida assim:

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{se e somente se} \quad x = \cos y \text{ e } 0 \leqslant y \leqslant \pi$$



$y = \cos^{-1} x$

FIGURA 6

O domínio de $\cos^{-1}$ é o intervalo fechado $[-1, 1]$, e a imagem é o intervalo fechado $[0, \pi]$. Um esboço do gráfico está na Figura 6.

▶ ILUSTRAÇÃO 3

(a) $\cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}\pi$ (b) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{4}\pi$ ◀

Da Definição 8.1.2 segue que

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad \text{para } x \text{ em } [-1, 1]$$
$$\cos^{-1}(\cos y) = y \quad \text{para } y \text{ em } [0, \pi]$$

Note que há, novamente, uma restrição em y, para que tenha a igualdade $\cos^{-1}(\cos y) = y$. Por exemplo, como $\frac{3}{4}\pi$ está em $[0, \pi]$

$$\cos^{-1}(\cos \tfrac{3}{4}\pi) = \tfrac{3}{4}\pi$$

Entretanto,

$$\cos^{-1}(\cos \tfrac{5}{4}\pi) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \cos^{-1}(\tfrac{7}{4}\pi) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \tfrac{3}{4}\pi \qquad\qquad = \tfrac{1}{4}$$

EXEMPLO 2 Ache o valor exato de sen $[2 \cos^{-1}(-\frac{3}{5})]$.

Solução Como queremos obter funções trigonométricas do número $\cos^{-1}(-\frac{3}{5})$, seja t esse número.

$$t = \cos^{-1}(-\tfrac{3}{5})$$

Como a imagem da função inversa do co-seno é $[0, \pi]$ e $\cos t$ é negativo, t está no segundo quadrante. Assim

$$\cos t = -\tfrac{3}{5} \text{ e } \tfrac{1}{2}\pi < t < \pi$$

Queremos encontrar o valor exato do sen $2t$. Da identidade sen $2t = 2$ sen $t \cos t$. Assim, precisamos calcular t. Da identidade $\text{sen}^2\, t + \cos^2 t = 1$, e como sen $t > 0$ uma vez que t está no intervalo $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$, sen $t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$. Assim,

$$\begin{aligned}\text{sen}\, t &= \sqrt{1 - (-\tfrac{3}{5})^2} \\ &= \tfrac{4}{5}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\text{sen}\, 2t &= 2\, \text{sen}\, t \cos t \\ &= 2(\tfrac{4}{5})(-\tfrac{3}{5}) \\ &= -\tfrac{24}{25}\end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\text{sen}\,[2 \cos^{-1}(-\tfrac{3}{5})] = -\tfrac{24}{25}$$

EXEMPLO 3 Prove que

$$\cos^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x \text{ para } |x| \leqslant 1 \qquad (2)$$

Solução Seja x um número pertencente a $[-1, 1]$ e seja

$$t = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x\right) \qquad (3)$$

Aplicando a fórmula de redução $\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - v\right) = \operatorname{sen} v$ com $v = \operatorname{sen}^{-1} x$ no segundo membro de (3) obtemos

$$t = \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right)$$

Como $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right) = x$,

$$t = x$$

Substituindo t por x em (3) resulta

$$x = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x\right) \qquad (4)$$

Como $-\tfrac{1}{2}\pi \leqslant \operatorname{sen}^{-1} x \leqslant \tfrac{1}{2}\pi$, somando $-\tfrac{1}{2}\pi$ a cada membro teremos

$$-\pi \leqslant -\tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{sen}^{-1} x \leqslant 0$$

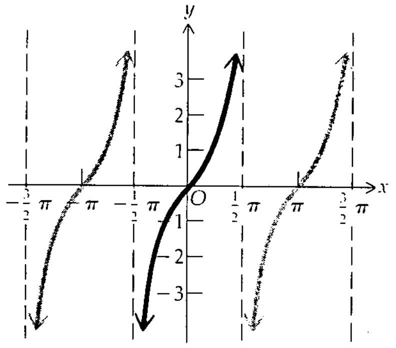
Multiplicando cada membro da desigualdade acima por -1 e invertendo os sentidos das desigualdades obtemos

$$0 \leqslant \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x \leqslant \pi$$

Desssa desigualdade, de (4) e da Definição 8.1.2 segue que

$$\cos^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x \text{ para } |x| \leqslant 1$$

que é (2).



$y = \operatorname{tg} x$

FIGURA 7

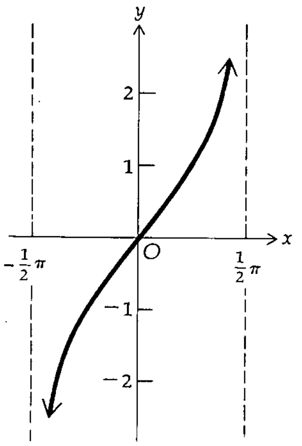
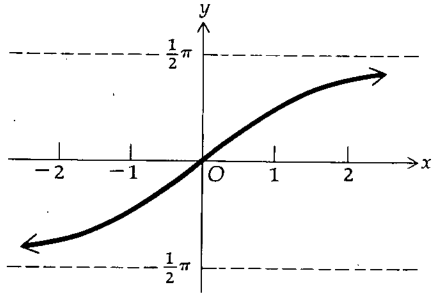


FIGURA 8



$y = \operatorname{tg}^{-1} x$

FIGURA 9

Observe na solução do Exemplo 3 que a identidade depende da escolha de $[0, \pi]$ como a imagem da função inversa do co-seno.

Para obter a função inversa da tangente consideramos primeiro o gráfico da função tangente, dado na Figura 7. A função é contínua e crescente no intervalo aberto $\left(-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\right)$, conforme mostra a figura. Vamos restringir a função tangente a esse intervalo e considerar H como sendo a função definida por

$$H(x) = \operatorname{tg} x \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < x < \tfrac{1}{2}\pi$$

O domínio de H é o intervalo aberto $\left(-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\right)$, e a imagem é o conjunto de todos os números reais. Um esboço de seu gráfico está na Figura 8. Como a função H é crescente e contínua em seu domínio, ela tem uma função inversa, chamada de *função inversa da tangente.**

8.1.3 DEFINIÇÃO **A função inversa da tangente**, denotada por tg^{-1}, é definida da seguinte forma:

$$y = \operatorname{tg}^{-1} x \text{ se e somente se } x = \operatorname{tg} y \text{ e } -\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi$$

O domínio de tg^{-1} é o conjunto de todos os números reais e a imagem é o intervalo aberto $\left(-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\right)$. Um esboço de seu gráfico está na Figura 9.

---

* **N. do T.**: outra notação muito usada para essa função é: *arc tg*.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4**

(a) $\operatorname{tg}^{-1} \sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi$ (b) $\operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{6}\pi$ (c) $\operatorname{tg}^{-1} 0 = 0$ ◀

Da Definição 1.3 temos que

$\operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1} x) = x$ para x em $(-\infty, +\infty)$

$\operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{tg} y) = y$ para y em $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

▶ **ILUSTRAÇÃO 5**

$\operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{4}\pi$ e $\operatorname{tg}^{-1}[\operatorname{tg}(-\frac{1}{4}\pi)] = -\frac{1}{4}\pi$

Entretanto,

$$\operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{tg} \tfrac{3}{4}\pi) = \operatorname{tg}^{-1}(-1) \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{tg} \tfrac{5}{4}\pi) = \operatorname{tg}^{-1} 1$$
$$= -\tfrac{1}{4}\pi \qquad\qquad = \tfrac{1}{4}\pi$$
◀

EXEMPLO 4 Ache o valor exato de $\sec[\operatorname{tg}^{-1}(-3)]$

Solução Resolveremos esse problema tomando $\operatorname{tg}^{-1}(-3)$ como um ângulo. Seja

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}(-3)$$

Como a imagem da função inversa da tangente é $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, e como $\operatorname{tg}\theta$ é negativa, segue que $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$. Assim,

$$\operatorname{tg}\theta = -3 \text{ e } -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < 0$$

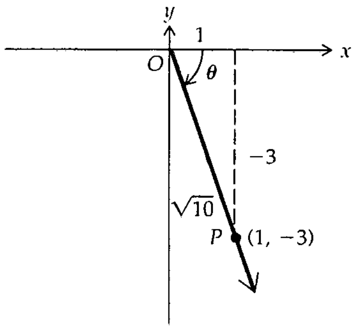


FIGURA 10

A Figura 10 mostra o ângulo cuja medida é θ radianos que satisfaz essas condições. Observe que o ponto P selecionado no extremo de θ é $(1, -3)$. Do Teorema de Pitágoras r é $\sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$. Portanto, $\sec\theta = \sqrt{10}$. Logo,

$$\sec[\operatorname{tg}^{-1}(-3)] = \sqrt{10}$$

Antes de definir a função inversa da co-tangente, vamos nos referir ao Exemplo 3, onde provamos a identidade (2) envolvendo $\cos^{-1}$ e sen^{-1}. Essa identidade pode ser usada para definir a função inversa do co-seno e pode então ser provado que a imagem de $\cos^{-1}$ é $[0, \pi]$. Vamos usar esse tipo de procedimento para discutir a função inversa da co-tangente.

8.1.4 DEFINIÇÃO **A função inversa da co-tangente**, denotada por cotg^{-1}*, é definida por $\operatorname{cotg}^{-1} x = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{tg}^{-1} x$ onde x é um número real qualquer.

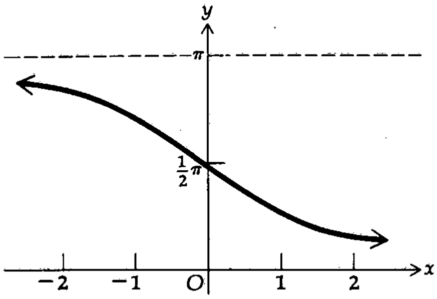
Segue da definição que o domínio de cotg^{-1} é o conjunto R de todos os números reais. Para obter a imagem escrevemos a equação da Definição 8.1.4 da seguinte forma

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{cotg}^{-1} x \tag{5}$$

Como

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \operatorname{tg}^{-1} x < \tfrac{1}{2}\pi$$

***N. do T.**: outra notação muito usada para essa função é: *arc cotg*.



$y = \text{cotg}^{-1}\,x$

FIGURA 11

Substituindo (5) nessa desigualdade, obtemos

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \tfrac{1}{2}\pi - \text{cotg}^{-1}\,x < \tfrac{1}{2}\pi$$

Substraindo $\frac{1}{2}\pi$ de cada membro, obtemos

$$-\pi < -\text{cotg}^{-1}\,x < 0$$

e agora multiplicando cada membro por -1 e invertendo o sentido das desigualdades, obtemos

$$0 < \text{cotg}^{-1}\,x < \pi$$

Logo, a imagem da função inversa da co-tangente é o intervalo aberto $(0, \pi)$. Um esboço de seu gráfico está na Figura 11.

▶ ILUSTRAÇÃO 6

(a) $\text{tg}^{-1}\,1 = \frac{1}{4}\pi$

(b) $\text{tg}^{-1}\,(-1) = -\frac{1}{4}\pi$

(c) $\text{cotg}^{-1}\,1 = \frac{1}{2}\pi - \text{tg}^{-1}\,1$
$= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi$
$= \frac{1}{4}\pi$

(d) $\text{cotg}^{-1}\,(-1) = \frac{1}{2}\pi - \text{tg}^{-1}\,(-1)$
$= \frac{1}{2}\pi - (-\frac{1}{4}\pi)$
$= \frac{3}{4}\pi$ ◀

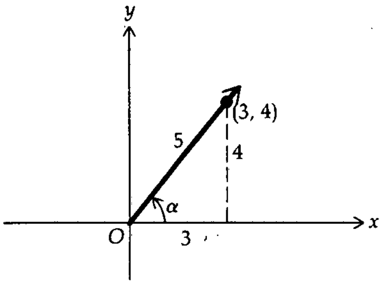


FIGURA 12

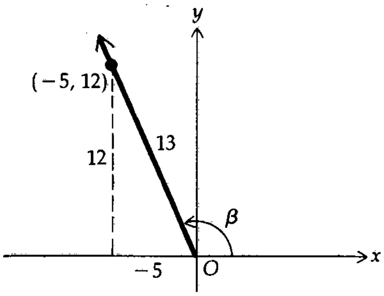


FIGURA 13

EXEMPLO 5 Ache o valor exato de $\cos\,[\text{cotg}^{-1}\,\frac{3}{4} + \text{cotg}^{-1}\,(-\frac{5}{12})]$.

Solução Seja $\alpha = \text{cotg}^{-1}\,\frac{3}{4}$ e $\beta = \text{cotg}^{-1}\,(-\frac{5}{12})$. Então,

$$\text{cotg}\,\alpha = \tfrac{3}{4} \quad \text{e} \quad 0 < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\text{cotg}\,\beta = -\tfrac{5}{12} \quad \text{e} \quad \tfrac{1}{2}\pi < \beta < \pi$$

Queremos encontrar $\cos\,(\alpha + \beta)$. Da fórmula do co-seno da soma,

$$\cos\,(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta = \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \tag{6}$$

Para determinar $\cos\alpha$ e $\text{sen}\,\alpha$, veja a Figura 12, que mostra um ângulo α no primeiro quadrante para o qual $\text{cotg}\,\alpha = \frac{3}{4}$. Da figura,

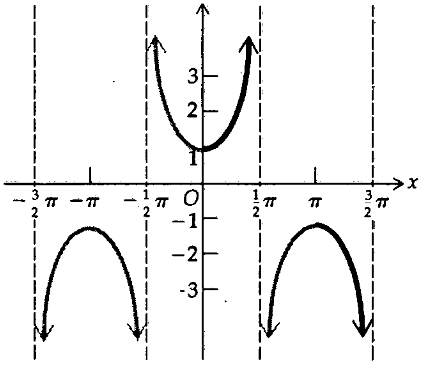
$$\text{sen}\,\alpha = \tfrac{4}{5} \qquad \cos\alpha = \tfrac{3}{5} \tag{7}$$

A Figura 13 mostra um ângulo β no segundo quadrante para o qual $\text{cotg}\,\beta = -\frac{5}{12}$. Da figura,

$$\text{sen}\,\beta = \tfrac{12}{13} \qquad \cos\beta = -\tfrac{5}{13} \tag{8}$$

Substituindo (7) e (8) em (6) temos

$$\begin{aligned}\cos\,(\alpha + \beta) &= \tfrac{3}{5}(-\tfrac{5}{13}) - \tfrac{4}{5}(\tfrac{12}{13})\\ &= -\tfrac{63}{65}\end{aligned}$$



$y = \sec x$

FIGURA 14

Para chegarmos à definição da *função inversa da secante*, vamos considerar primeiro um esboço do gráfico da função secante dado na Figura 14. Observe que ela é crescente no intervalo $[0, \frac{1}{2}\pi)$ e decrescente no intervalo $[\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Além disso, se $x \in [0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$, então $\sec x \in (-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$. Escolhemos o intervalo $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ pois a derivação da função inversa da secante, bem como outros cálculos com ela (na Secção 9.4, por exemplo), tornam-se mais simples se a função inversa da secante for definida de tal forma que quando $x < 0$ então $\pi \leqslant \sec^{-1} x \leqslant \frac{3}{2}\pi$. Assim sendo, daremos a definição a seguir.

8.1.5 DEFINIÇÃO

A função inversa da secante, denotada por $\sec^{-1}$*, é definida da seguinte forma:

$$y = \sec^{-1} x \text{ se e somente se } x = \sec y \text{ e } \begin{cases} 0 \leqslant y < \frac{1}{2}\pi & \text{se } x \geqslant 1 \\ \pi \leqslant y < \frac{3}{2}\pi & \text{se } x \leqslant -1 \end{cases}$$

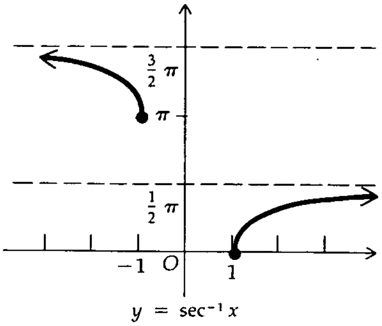


FIGURA 15

O domínio de $\sec^{-1}$ é $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. A imagem de $\sec^{-1}$ é $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Um esboço do gráfico de $\sec^{-1}$ está na Figura 15.

Da Definição 8.1.5 temos

$$\sec(\sec^{-1} x) = x \quad \text{para } x \text{ em } (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$
$$\sec^{-1}(\sec y) = y \quad \text{para } y \text{ em } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi)$$

Vamos definir agora a *função inversa da co-secante* em termos da inversa da função secante.

8.1.6 DEFINIÇÃO

A função inversa da co-secante, denotada por $\operatorname{cosec}^{-1}$**, é definida por

$$\operatorname{cosec}^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \sec^{-1} x \text{ para } |x| \geqslant 1$$

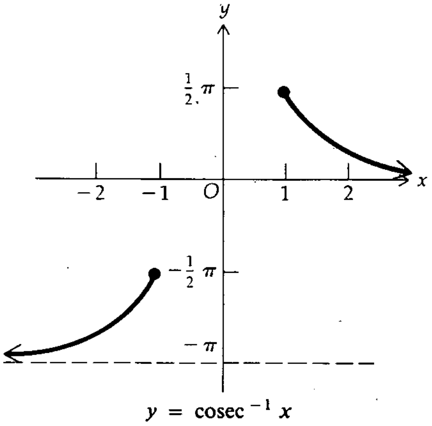


FIGURA 16

Da definição, o domínio de $\operatorname{cosec}^{-1}$ é $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$. A imagem de $\operatorname{cosec}^{-1}$ pode se encontrada de forma análoga à que foi usada para determinar a imagem de cotg^{-1}. A imagem de $\operatorname{cosec}^{-1}$ é $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$, e você deverá mostrar isso no Exercício 53. Um esboço do gráfico de $\operatorname{cosec}^{-1}$ está na Figura 16.

▶ **ILUSTRAÇÃO 7**

(a) $\sec^{-1} 2 = \frac{1}{3}\pi$

(b) $\sec^{-1}(-2) = \frac{4}{3}\pi$

(c)
$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}^{-1} 2 &= \tfrac{1}{2}\pi - \sec^{-1} 2 \\ &= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{3}\pi \\ &= \tfrac{1}{6}\pi \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}^{-1}(-2) &= \tfrac{1}{2}\pi - \sec^{-1}(-2) \\ &= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{4}{3}\pi \\ &= -\tfrac{5}{6}\pi \end{aligned}$$ ◀

EXERCÍCIOS 8.1

Nos Exercícios de 1 a 6, determine o valor funcional exato.

1. (a) $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}$; (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$; (c) $\cos^{-1} \frac{1}{2}$; (d) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$
2. (a) $\operatorname{sen}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (c) $\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$; (d) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. (a) $\operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$; (b) $\operatorname{tg}^{-1}(-\sqrt{3})$; (c) $\sec^{-1} \frac{2}{\sqrt{3}}$; (d) $\sec^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
4. (a) $\operatorname{cotg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$; (b) $\operatorname{cotg}^{-1}(-\sqrt{3})$; (c) $\operatorname{cosec}^{-1} \frac{2}{\sqrt{3}}$; (d) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
5. (a) $\operatorname{sen}^{-1} 1$; (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$; (c) $\operatorname{cosec}^{-1} 1$; (d) $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)$; (e) $\operatorname{sen}^{-1} 0$
6. (a) $\cos^{-1} 1$; (b) $\cos^{-1}(-1)$; (c) $\sec^{-1} 1$; (d) $\sec^{-1}(-1)$; (e) $\cos^{-1} 0$
7. Dado que $x = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{3}$, ache o valor exato de cada uma das funções: (a) $\cos x$; (b) $\operatorname{tg} x$; (c) $\operatorname{cotg} x$; (d) $\sec x$; (e) $\operatorname{cosec} x$.
8. Dado que $x = \cos^{-1} \frac{1}{3}$, ache o valor exato de cada uma das funções: (a) $\operatorname{sen} x$; (b) $\operatorname{tg} x$; (c) $\operatorname{cotg} x$; (d) $\sec x$; (e) $\operatorname{cosec} x$.
9. Faça o Exercício 7 se $x = \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{3})$.
10. Faça o Exercício 8 se $x = \cos^{-1}(-\frac{2}{3})$.
11. Dado que $y = \operatorname{tg}^{-1}(-2)$, ache o valor exato de cada uma das funções: (a) $\operatorname{sen} y$; (b) $\cos y$; (c) $\operatorname{cotg} y$; (d) $\sec y$; (e) $\operatorname{cosec} y$.
12. Dado que $y = \operatorname{cotg}^{-1}(-\frac{1}{2})$, ache o valor exato de cada uma das funções: (a) $\operatorname{sen} y$; (b) $\cos y$; (c) $\operatorname{tg} y$; (d) $\sec y$; (e) $\operatorname{cosec} y$.
13. Dado que $t = \operatorname{cosec}^{-1}(-\frac{3}{2})$, o valor exato de cada uma das funções: (a) $\operatorname{sen} t$; (b) $\cos t$; (c) $\operatorname{tg} t$; (d) $\operatorname{cotg} t$; (e) $\sec t$.

---

* **N. do T.**: outra notação muito usada para essa função é: *arc sec*.

** **N. do T.**: outra notação muito usada para essa função é: *arc cosec*.

14. Dado que $t = \sec^{-1}(-3)$, ache o valor exato de cada uma das funções: (a) sen t; (b) cos t; (c) tg t; (d) cotg t; (e) cosec t.

Nos Exercícios de 15 a 40, ache o valor exato da quantidade dada.

15. (a) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,\frac{1}{6}\pi)$; (b) $\text{sen}^{-1}[\text{sen}\,(-\frac{1}{6}\pi)]$; (c) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi)$; (d) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,\frac{11}{6}\pi)$

16. (a) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,\frac{1}{3}\pi)$; (b) $\text{sen}^{-1}[\text{sen}\,(-\frac{1}{3}\pi)]$; (c) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi)$; (d) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,\frac{5}{3}\pi)$

17. (a) $\cos^{-1}(\cos\frac{1}{3}\pi)$; (b) $\cos^{-1}[\cos(-\frac{1}{3}\pi)]$; (c) $\cos^{-1}(\cos\frac{2}{3}\pi)$; (d) $\cos^{-1}(\cos\frac{4}{3}\pi)$

18. (a) $\cos^{-1}(\cos\frac{1}{4}\pi)$; (b) $\cos^{-1}[\cos(-\frac{1}{4}\pi)]$; (c) $\cos^{-1}(\cos\frac{3}{4}\pi)$; (d) $\cos^{-1}(\cos\frac{5}{4}\pi)$

19. (a) $\text{tg}^{-1}(\text{tg}\,\frac{1}{6}\pi)$; (b) $\text{tg}^{-1}[\text{tg}\,(-\frac{1}{3}\pi]$; (c) $\text{tg}^{-1}(\text{tg}\,\frac{7}{6}\pi)$; (d) $\text{tg}^{-1}[\text{tg}\,(-\frac{4}{3}\pi)]$

20. (a) $\text{tg}^{-1}(\text{tg}\,\frac{1}{3}\pi)$; (b) $\text{tg}^{-1}[\text{tg}\,(-\frac{1}{6}\pi)]$; (c) $\text{tg}^{-1}(\text{tg}\,\frac{4}{3}\pi)$; (d) $\text{tg}^{-1}[\text{tg}\,(-\frac{7}{6}\pi)]$

21. (a) $\text{cotg}^{-1}(\text{cotg}\,\frac{1}{6}\pi)$; (b) $\text{cotg}^{-1}[\text{cotg}\,(-\frac{1}{3}\pi)]$; (c) $\text{cotg}^{-1}(\text{cotg}\,\frac{7}{6}\pi)$; (d) $\text{cotg}^{-1}[\text{cotg}\,(-\frac{4}{3}\pi)]$

22. (a) $\text{cotg}^{-1}(\text{cotg}\,\frac{1}{3}\pi)$; (b) $\text{cotg}^{-1}[\text{cotg}\,(-\frac{1}{6}\pi)]$; (c) $\text{cotg}^{-1}(\text{cotg}\,\frac{4}{3}\pi)$; (d) $\text{cotg}^{-1}[\text{cotg}\,(-\frac{7}{6}\pi)]$

23. (a) $\sec^{-1}(\sec\frac{1}{3}\pi)$; (b) $\sec^{-1}[\sec(-\frac{1}{3}\pi)]$; (c) $\sec^{-1}(\sec\frac{2}{3}\pi)$; (d) $\sec^{-1}(\sec\frac{4}{3}\pi)$

24. (a) $\sec^{-1}(\sec\frac{1}{4}\pi)$; (b) $\sec^{-1}[\sec(-\frac{1}{4}\pi)]$; (c) $\sec^{-1}(\sec\frac{3}{4}\pi)$; (d) $\sec^{-1}(\sec\frac{5}{4}\pi)$

25. (a) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\,\frac{1}{6}\pi)$; (b) $\text{cosec}^{-1}[\text{cosec}\,(-\frac{1}{6}\pi)]$; (c) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\,\frac{5}{6}\pi)$; (d) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\,\frac{11}{6}\pi)$

26. (a) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\,\frac{1}{3}\pi)$; (b) $\text{cosec}^{-1}[\text{cosec}\,(-\frac{1}{3}\pi)]$; (c) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\,\frac{2}{3}\pi)$; (d) $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\,\frac{5}{3}\pi)$

27. (a) $\text{tg}\,[\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{3}]$; (b) $\text{sen}\,[\text{tg}^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{3}]$

28. (a) $\cos[\text{tg}^{-1}(-3)]$; (b) $\text{tg}\,[\sec^{-1}(-3)]$

29. (a) $\cos[\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})]$; (b) $\text{sen}\,[\cos^{-1}(-\frac{1}{2})]$

30. (a) $\text{tg}\,[\text{cotg}^{-1}(-1)]$; (b) $\text{cotg}\,[\text{tg}^{-1}(-1)]$

31. $\cos[2\,\text{sen}^{-1}(-\frac{5}{13})]$

32. $\text{tg}\,[2\sec^{-1}(-\frac{5}{4})]$

33. $\text{sen}\,(\text{sen}^{-1}\frac{2}{3} + \cos^{-1}\frac{1}{3})$

34. $\cos[\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) + \text{sen}^{-1}\frac{1}{4}]$

35. $\cos[\text{sen}^{-1}\frac{2}{3} + 2\,\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{3})]$

36. $\text{tg}\,(\text{tg}^{-1}(-\frac{2}{5}) - \cos^{-1}(-\frac{1}{2}\sqrt{2})]$

37. $\text{tg}\,(\text{tg}^{-1}\frac{3}{4} - \text{sen}^{-1}\frac{1}{2})$

38. $\text{tg}\,[\sec^{-1}\frac{5}{3} + \text{cosec}^{-1}(-\frac{13}{12})]$

39. $\cos(\text{sen}^{-1}\frac{1}{3} - \text{tg}^{-1}\frac{1}{2})$

40. $\text{sen}\,[\cos^{-1}(-\frac{2}{3}) + 2\,\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{3})]$

41. Prove: $\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}} + \cos^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{4}\pi$.

42. Prove: $2\,\text{tg}^{-1}\frac{1}{3} - \text{tg}^{-1}(-\frac{1}{7}) = \frac{1}{4}\pi$.

Nos Exercícios de 43 a 50, faça um esboço do gráfico da função dada.

43. $f(x) = \frac{1}{2}\,\text{sen}^{-1}x$
44. $g(x) = \text{sen}^{-1}\frac{1}{2}x$
45. $g(x) = \text{tg}^{-1}2x$
46. $f(x) = 2\,\text{tg}^{-1}x$
47. $F(x) = \cos^{-1}3x$
48. $G(x) = \frac{1}{2}\sec^{-1}2x$
49. $f(x) = 2\,\text{cotg}^{-1}\frac{1}{2}x$
50. $g(x) = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{2}x$

51. Um peso é suspenso por uma mola e vibra verticalmente, de acordo com a equação $y = 2\,\text{sen}\,4\pi(t + \frac{1}{8})$, onde y cm é a distância orientada do peso a partir de sua posição central t s após começar o movimento e a direção positiva é para cima. (a) Resolva a equação em t. (b) Use a equação da parte (a) para determinar os três menores valores de t para os quais o peso está a 1 cm acima de sua posição central.

52. Uma corrente alternada com 60 ciclos por segundo (Hertz) é descrita pela equação $x = 20\,\text{sen}\,120\pi(t - \frac{11}{720})$, onde x ampères é a corrente em t s. (a) Resolva a equação em t. (b) use a equação da parte (a) para determinar os três menores valores positivos de t para os quais a corrente é 10 ampères.

53. Prove que a imagem de cosec^{-1} é $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi] \cup (0, \frac{1}{2}\pi]$.

54. Prove que $\text{tg}^{-1}x + \text{tg}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\pi$, se $x > 0$. (*Sugestão*: use a identidade $\text{cotg}\,A = \text{tg}\,(\frac{1}{2}\pi - A)$).

8.2 DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Como a função inversa do seno é contínua e crescente em seu domínio, segue do Teorema 7.2.3 que ela tem uma derivada. Para obter a fórmula de sua derivada tomamos

$$y = \text{sen}^{-1}x$$

que é equivalente a

$$x = \text{sen}\,y \quad \text{e} \quad y \text{ está em } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$$

Derivando ambos os membros dessa igualdade com relação a y teremos

$$\frac{dx}{dy} = \cos y \quad \text{e} \quad y \text{ está em } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi] \tag{1}$$

Da identidade $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, substituindo sen y por x, obtemos

$$\cos^2 y = 1 - x^2$$

Se y está em $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, cos y é não-negativo; assim,

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{se } y \text{ estiver em } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$$

Substituindo essa relação em (1), obtemos

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$$

Do Teorema 7.2.3, $\dfrac{dy}{dx}$ é o recíproco de $\dfrac{dx}{dy}$; logo,

$$D_x(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{2}$$

O domínio da derivada da função inversa do seno é o intervalo aberto $(-1, 1)$. De (2) e da regra da cadeia temos o teorema a seguir.

8.2.1 TEOREMA Se u for uma função de x, derivável,

$$D_x(\operatorname{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} D_x u$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se $y = \operatorname{sen}^{-1} x^2$, então

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}}(2x) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}\end{aligned}$$ ◀

Para obter a fórmula para a derivada da função inversa do co-seno, usamos (2) da Secção 8.1, que é

$$\cos^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x$$

Derivando com relação a x teremos

$$D_x(\cos^{-1} x) = D_x(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{sen}^{-1} x)$$

Assim,

$$D_x(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{3}$$

onde x está em $(-1, 1)$.

O próximo teorema segue de (3) e da regra da cadeia.

8.2.2 TEOREMA Se u for uma função de x, derivável,

$$D_x(\cos^{-1} u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

Vamos obter agora a fórmula para a derivada da função inversa da tangente. Se

$$y = \operatorname{tg}^{-1} x$$

então

$$x = \operatorname{tg} y \quad \text{e} \quad y \text{ está em } (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)$$

Derivando ambos os membros da igualdade acima com relação a y iremos obter

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y \quad \text{e} \quad y \text{ está em } (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \tag{4}$$

Da identidade $\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$ e substituindo $\operatorname{tg} y$ por x, temos

$$\sec^2 y = 1 + x^2$$

Substituindo essa equação em (4), obtemos

$$\frac{dx}{dy} = 1 + x^2$$

Assim, do Teorema 7.2.3,

$$D_x(\operatorname{tg}^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{5}$$

O domínio da derivada da função inversa da tangente é o conjunto de todos os números reais.

De (5) e da regra da cadeia obtemos o teorema a seguir.

8.2.3 TEOREMA Se u for uma função de x, derivável,

$$D_x(\operatorname{tg}^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} D_x u$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{1}{x+1}$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\dfrac{1}{(x+1)^2}} \cdot \frac{-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-1}{(x+1)^2+1} \\ &= \frac{-1}{x^2+2x+2} \end{aligned}$$ ◀

Da definição 8.1.4,

$$\operatorname{cotg}^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{tg}^{-1} x$$

Derivando com relação a x, obtemos a fórmula.

$$D_x\,(\operatorname{cotg}^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Dessa fórmula e da regra da cadeia segue o teorema a seguir.

8.2.4 TEOREMA Se u for uma função de x, derivável,

$$D_x\,(\operatorname{cotg}^{-1} u) = -\frac{1}{1 + u^2}\,D_x u$$

EXEMPLO 1 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$y = x^3 \operatorname{cotg}^{-1} \tfrac{1}{3}x$$

Solução

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3x^2 \operatorname{cotg}^{-1} \tfrac{1}{3}x + x^3 \cdot \frac{-1}{1 + \frac{1}{9}x^2} \cdot \frac{1}{3}\\ &= 3x^2 \operatorname{cotg}^{-1} \tfrac{1}{3}x - \frac{3x^3}{9 + x^2}\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ se

$$\ln(x + y) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

Solução Derivando implicitamente ambos os membros da igualdade dada com relação a x, obtemos

$$\frac{1}{x + y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$\frac{1 + \dfrac{dy}{dx}}{x + y} = \frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{y^2 + x^2}$$

$$y^2 + x^2 + (y^2 + x^2)\frac{dy}{dx} = xy + y^2 - (x^2 + xy)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - x^2}{2x^2 + xy + y^2}$$

Para obter a fórmula para a derivada da inversa da função secante seja

$$y = \sec^{-1} x \qquad \text{e } |x| \geqslant 1$$

Então,

$$x = \sec y \qquad \text{e } y \text{ está em } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi) \tag{6}$$

Derivando ambos os membros de (6) com relação a y obtemos

$$\frac{dx}{dy} = \sec y \operatorname{tg} y \qquad \text{e } y \text{ está em } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi) \tag{7}$$

Da identidade $\operatorname{tg}^2 y = \sec^2 y - 1$, $\sec y = x$, obtemos

$$\operatorname{tg}^2 y = x^2 - 1$$

Como y está em $[0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi)$, $\operatorname{tg} y$ é não-negativa. Assim,

$$\operatorname{tg} y = \sqrt{x^2 - 1} \qquad \text{se } y \text{ estiver em } [0, \tfrac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \tfrac{3}{2}\pi)$$

Substituindo (6) e a relação anterior em (7), teremos

$$\frac{dx}{dy} = x\sqrt{x^2 - 1}$$

Assim, do Teorema 7.2.3,

$$D_x(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \tag{8}$$

onde $|x| > 1$. De (8) e da regra da cadeia segue o teorema a seguir.

8.2.5 TEOREMA Se u for uma função de x, derivável,

$$D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Se $f(x) = \sec^{-1}(3e^x)$, então

$$f'(x) = \frac{1}{3e^x\sqrt{(3e^x)^2 - 1}}(3e^x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9e^{2x} - 1}}$$ ◀

Da Definição 8.1.6,

$$\operatorname{cosec}^{-1} x = \tfrac{1}{2}\pi - \sec^{-1} x \qquad \text{para } |x| \geqslant 1$$

Derivando em relação a x, obtemos

$$D_x(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \tag{9}$$

onde $|x| > 1$. De (9) e da regra da cadeia, temos o teorema a seguir.

8.2.6 TEOREMA Se u for uma função de x, derivável,

$$D_x(\operatorname{cosec}^{-1} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$$

EXEMPLO 3 Ache $f'(x)$ se

$$f(x) = x \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x}$$

Solução

$$f'(x) = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x} + x \left[-\frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right]$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x} + \left[\frac{-x^2}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right]$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}}$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x} + \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$$

No exemplo a seguir, um observador está olhando um quadro colocado em uma parede. Veja a Figura 1. Quando o observador está afastado da parede, o ângulo segundo o qual ele vê o quadro é pequeno. À medida que o observador se aproxima da parede, o ângulo irá aumentando, até atingir um valor máximo. Então, se o observador continuar se aproximando, o ângulo diminuirá. Quando o ângulo for máximo, diremos que o observador tem a "melhor visão" do quadro.

EXEMPLO 4 Um quadro com 1 m de altura é colocado em uma parede de tal forma que sua base esteja 2 m acima do nível dos olhos de um observador. Quantos metros o observador deverá se afastar da parede, para obter a melhor visão do quadro, isto é, para que o ângulo segundo o qual ele vê o quadro seja o máximo?

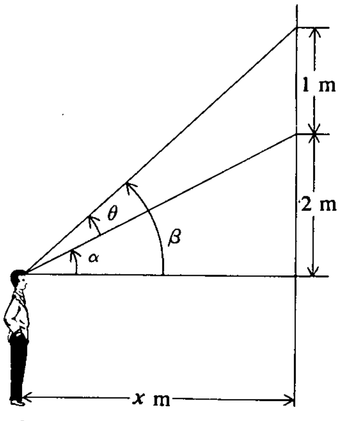


FIGURA 1

Solução Seja x m a distância do observador até a parede, θ a medida em radianos do ângulo segundo o qual o observador vê o quadro, α a medida do ângulo em radianos, segundo o qual o observador vê a parte da parede acima do nível dos olhos e abaixo do quadro, e $\beta = \alpha + \theta$. Veja a Figura 1.

Queremos encontrar o valor de x que irá tornar θ um máximo absoluto. Como x está no intervalo $(0, +\infty)$, o valor máximo absoluto de θ será um valor máximo relativo. Vemos, da figura, que

$$\operatorname{cotg} \beta = \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{x}{2}$$

Como $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$ e $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$

$$\beta = \operatorname{cotg}^{-1} \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad \alpha = \operatorname{cotg}^{-1} \frac{x}{2}$$

Substituindo esses valores de α e β na relação $\theta = \beta - \alpha$, obtemos

$$\theta = \text{cotg}^{-1}\frac{x}{3} - \text{cotg}^{-1}\frac{x}{2}$$

Derivando com relação a x, teremos

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= -\frac{3}{3^2 + x^2} + \frac{2}{2^2 + x^2}$$

Equacionando $\dfrac{d\theta}{dx} = 0$, iremos obter

$$\begin{aligned} 2(3^2 + x^2) - 3(2^2 + x^2) &= 0 \\ -x^2 + (18 - 12) &= 0 \\ x^2 &= 6 \\ x &= 2{,}45 \end{aligned}$$

A solução $-2{,}45$ foi rejeitada por não estar no intervalo $(0, +\infty)$. Os resultados do teste da derivada primeira estão na Tabela 1. Como o valor máximo relativo de θ é um valor máximo absoluto, concluímos que o observador deve ficar a aproximadamente 2,45 m da parede.

Tabela 1

	$\frac{d\theta}{dx}$	conclusão
$0 < x < 12$	+	
$x = 12$	0	θ tem um valor máximo relativo
$12 < x < +\infty$	−	

EXERCÍCIOS 8.2

Nos Exercícios de 1 a 26, ache a derivada da função dada.

1. $f(x) = \text{sen}^{-1}\frac{1}{2}x$
2. $f(x) = \cos^{-1} 3x$
3. $g(x) = \text{tg}^{-1} 2x$
4. $f(x) = \text{cosec}^{-1} 2x$
5. $F(x) = 2\cos^{-1}\sqrt{x}$
6. $g(x) = \frac{1}{2}\,\text{sen}^{-1} x^2$
7. $g(t) = \sec^{-1} 5t + \text{cosec}^{-1} 5t$
8. $f(y) = \text{cotg}^{-1} e^y$
9. $f(x) = \text{sen}^{-1}\sqrt{1 - x^2}$
10. $f(w) = 2\,\text{tg}^{-1}\frac{1}{w}$
11. $F(x) = \text{cotg}^{-1}\frac{2}{x} + \text{tg}^{-1}\frac{x}{2}$
12. $f(x) = \ln(\text{tg}^{-1} 3x)$
13. $h(y) = y\,\text{sen}^{-1} 2y$
14. $f(t) = t^2 \cos^{-1} t$
15. $g(x) = x^2 \sec^{-1}\frac{1}{x}$
16. $g(s) = \cos^{-1} s + \frac{s}{1 - s^2}$
17. $f(x) = \cos^{-1}(\text{sen}\, x)$
18. $h(x) = \text{tg}^{-1}\frac{2x}{1 - x^2}$
19. $F(x) = \ln(\text{tg}^{-1} x^2)$
20. $F(x) = \sec^{-1}\sqrt{x^2 + 4}$
21. $f(x) = 4\,\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}x + x\sqrt{4 - x^2}$
22. $f(t) = a\,\text{sen}^{-1}\frac{t}{a} + \sqrt{a^2 - t^2}$
23. $h(x) = \text{cosec}^{-1}(2e^{3x})$
24. $f(x) = \text{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x$
25. $G(x) = x\,\text{cotg}^{-1} x + \ln\sqrt{1 + x^2}$
26. $f(t) = \text{sen}^{-1}\frac{t - 1}{t + 1}$

Nos Exercícios de 27 a 30, ache $\dfrac{dy}{dx}$.

27. $e^{x+y} = \cos^{-1} x$

28. $\ln(\text{sen}^2 3x) = e^x + \text{cotg}^{-1} y$

29. $x \,\text{sen}\, y + x^3 = \text{tg}^{-1} y$

30. $\text{sen}^{-1}(xy) = \cos^{-1}(x + y)$

31. Ache as equações das retas tangente e normal ao gráfico da equação $y = \sec^{-1}(2x + 1)$ no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\pi)$.

32. No Exemplo 4, mostre que outra equação que define θ em termos de x é

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{7x}{x^2 + 144}$$

Use essa equação para determinar a que distância da parede o observador deve ficar para conseguir a melhor visão do quadro.

33. Um letreiro com 3 m de altura está colocado em uma parede, sendo que sua base está 2 m acima do nível dos olhos de uma mulher que tenta lê-lo. A que distância da parede ela deve ficar para ter a melhor visão do letreiro, isto é, para que o ângulo sob o qual ela vê o letreiro seja máximo?

34. O Exemplo 4 e o Exercício 33 são casos particulares da seguinte situação genérica: um objeto (como uma pintura ou um letreiro de sinalização) com a m de altura, está colocado em uma parede, de tal forma que sua base esteja a b m do nível dos olhos de um observador. Mostre que o observador terá a melhor visão do objeto quando a distância dele até a parede for $\sqrt{b(a + b)}$ m.

35. Um quadro com 40 cm de altura está colocado numa parede, sendo que sua base está a 30 cm acima do nível dos olhos de um observador. Se o observdor está se aproximando da parede a uma velocidade de 40 cm/s com que velocidade a medida do ângulo de visão da pintura estará variando quando o observador estiver a 1 m da parede?

36. Uma escada com 7 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada for puxada horizontalmente de tal forma que se afaste da parede e que o topo escorregue a uma velocidade de 1 m/s, qual a velocidade com que a medida do ângulo entre a escada e o chão estará variando quando o pé da escada estiver a 4 m da parede?

37. Um foco de luz está a 3 km de uma praia reta. Se o foco gira com velocidade angular de 2 rpm, ache a velocidade com que a luz percorre a praia quando o foco estiver a 2 km do ponto da praia mais próximo da luz.

38. Um homem em um cais está puxando um bote por uma corda a uma velocidade de 1 m/s. As mãos do homem estão 6 m acima do ponto em que a corda está amarrada no bote. Com que velocidade estará variando o ângulo formado entre a corda e a superfície da água quando restarem para ser puxados 16 m de corda?

39. Uma mulher está andando com uma velocidade de 1,5 m/s ao longo de um diâmetro de um pátio circular. Uma luz no extremo de um diâmetro perpendicular a seu caminho projeta sua sombra sobre a parede circular do pátio. Com que velocidade a sombra estará se movendo ao longo da parede quando a distância da mulher ao centro do pátio for $\frac{1}{2}r$? (r m é o raio do pátio)

40. No Exercício 39, qual a distância entre a mulher e o centro do pátio quando a velocidade de sua sombra na parede for de 90 cm/s?

41. Uma corda é amarrada a um peso e passa por um gancho que está 8 m acima do chão. A corda é puxada passando pelo gancho, a uma velocidade de $\frac{3}{4}$ m/s e arrasta o peso pelo chão. Se o comprimento da corda entre o peso e o gancho for de x m quando a medida em radianos do ângulo entre a corda e o chão for θ, ache a variação de θ em relação ao tempo, em termos de x.

42. Use diferenciais para encontrar um valor aproximado de sen^{-1} 0,52 com três casas decimais.

43. Resolva o Exemplo 3 da Secção 8.1, mostrando que $\text{sen}^{-1} x$ e $-\cos^{-1} x$ diferem por uma constante e então calcule-a.

44. Resolva o Exercício 54 da série de Exercícios 8.1, mostrando que $\text{tg}^{-1} x$ e $-\text{tg}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ diferem por uma constante e então calcule-a.

45. Dada: $f(x) = \text{tg}^{-1}(1/x) - \text{cotg}^{-1} x$. (a) Mostre que $f'(x) = 0$ para todo x no domínio de f. (b) Prove que não existe uma constante C para a qual $f(x) = C$ para todo x em seu domínio. (c) Por que a afirmação da parte (b) não contradiz o Teorema 5.1.2?

8.3 INTEGRAIS QUE RESULTAM EM FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Dos teoremas sobre as derivadas das funções trigonométricas inversas obtemos os teoremas a seguir que dão algumas fórmulas de integração indefinida.

8.3.1 TEOREMA

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \text{sen}^{-1} u + C \tag{1}$$

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \text{tg}^{-1} u + C \tag{2}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} = \sec^{-1} u + C \tag{3}$$

A demonstração de cada fórmula é imediata, tomando a derivada do segundo membro. Temos também as fórmulas dadas no próximo teorema.

8.3.2 TEOREMA

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a > 0 \qquad (4)$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a \neq 0 \qquad (5)$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a > 0 \qquad (6)$$

Prova Essas fórmulas podem ser demonstradas calculando a derivada do segundo membro e obtendo o integrando. Provamos a fórmula (4).

$$\begin{aligned}
D_u\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}} D_u\left(\frac{u}{a}\right) \\
&= \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2 - u^2}} \cdot \frac{1}{a} \\
&= \frac{a}{\sqrt{a^2 - u^2}} \cdot \frac{1}{a} \qquad \text{se } a > 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} \qquad \text{se } a > 0
\end{aligned}$$

As demonstrações de (5) e (6) serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 38 e 39). ■

As fórmulas do Teorema 8.3.2 também podem ser provadas, com a variação adequada da variável e então, com a aplicação do Teorema 8.3.1 (veja os Exercícios 40-42). Observe que as fórmulas do Teorema 8.3.2 incluem aquelas do Teorema 8.3.1, usando $a = 1$.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$$

Solução

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}} &= \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\sqrt{4 - (3x)^2}} \\
&= \frac{1}{3} \operatorname{sen}^{-1} \frac{3x}{2} + C
\end{aligned}$$

Nos três exemplos a seguir, completamos o quadrado de uma expressão quadrática para indicar o integrando numa forma que nos possibilite usar o Teorema 8.3.2.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5}$$

Solução

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{3(x^2 - \frac{2}{3}x) + 5}$$

Para completar o quadrado de $x^2 - \frac{2}{3}x$ somamos $\frac{1}{9}$ e como $\frac{1}{9}$ deve ser multiplicado por 3, realmente estamos somando $\frac{1}{3}$ ao denominador e assim devemos também subtrair dele $\frac{1}{3}$. Logo, teremos

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5} &= \int \frac{dx}{3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) + 5 - \frac{1}{3}}\\ &= \int \frac{dx}{3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{14}{3}}\\ &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{14}{9}}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\sqrt{14}}\right) + C\\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3x - 1}{\sqrt{14}}\right) + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{(2x + 7)\,dx}{x^2 + 2x + 5}$$

Solução Como $d(x^2 + 2x + 5) = (2x + 2)\,dx$, escrevemos o numerador como $(2x + 2)\,dx + 5\,dx$ e expressamos a integral original como a soma de duas integrais.

$$\begin{aligned}\int \frac{(2x + 7)\,dx}{x^2 + 2x + 5} &= \int \frac{(2x + 2)\,dx}{x^2 + 2x + 5} + 5\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}\\ &= \ln|x^2 + 2x + 5| + 5\int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 4}\\ &= \ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{5}{2}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x + 1}{2} + C\end{aligned}$$

Nota: $x^2 + 2x + 5 > 0$, para todo x $|x^2 + 2x + 5| = x^2 + 2x + 5$.

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \frac{3\,dx}{(x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$$

Solução

$$\int \frac{3\,dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}} = \int \frac{3\,dx}{(x+2)\sqrt{(x^2+4x+4)-1}}$$

$$= 3\int \frac{d(x+2)}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-1}}$$

$$= 3\sec^{-1}(x+2) + C$$

EXEMPLO 5 Ache a área da região no primeiro quadrante limitada pela curva

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

pelo eixo x, eixo y e pela reta $x = 1$.

Solução A Figura 1 mostra a região e um elemento retangular de área. Se a área da região for A unidades de área,

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\xi_i^2} \Delta_i x$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \operatorname{tg}^{-1} x \Big]_0^1$$

$$= \operatorname{tg}^{-1} 1 - \operatorname{tg}^{-1} 0$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi - 0$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi$$

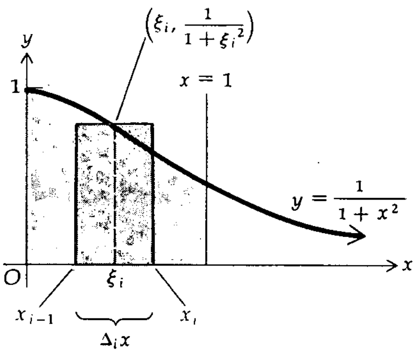


FIGURA 1

EXERCÍCIOS 8.3

Nos Exercícios de 1 a 25, calcule a integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+25}$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+16}$

4. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1-16t^2}}$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{4+(x-1)^2}$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{9+(3-x)^2}$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x\sqrt{x^2-16}}$

8. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+16}$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$

10. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

11. $\displaystyle\int \frac{r\,dr}{\sqrt{16-9r^4}}$

12. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{16u^2-9}}$

13. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{7+e^{2x}}$

14. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

16. $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{2s-s^2}}$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+2}$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+2x+3}$

21. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

22. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$

23. $\displaystyle\int \frac{(2+x)\,dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$

24. $\displaystyle\int \frac{2\,dt}{(t-3)\sqrt{t^2-6t+5}}$

25. $\displaystyle\int \frac{2x^3\,dx}{2x^2-4x+3}$

Nos Exercícios de 26 a 34, calcule a integral definida.

26. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

27. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

29. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{dt}{\sqrt{-t^2-6t-5}}$

30. $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x^2-4x+13}$

31. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ 32. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$

33. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x[1 + (\ln x)^2]}$ 34. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\sec^2 x\, dx}{1 + 9\,\mathrm{tg}^2\, x}$

35. Ache a área da região limitada pela curva $y = 8/(x^2 + 4)$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 2$.

36. Ache a área da região limitada pelas curvas $x^2 = 4ay$ e $y = 8a^3/(x^2 + 4a^2)$.

37. Ache a área da região limitada pelo eixo x, pela curva $y = 1/\sqrt{5 - 4x - x^2}$ e pelas retas $x = -\frac{7}{2}$ e $x = -\frac{1}{2}$.

Nos Exercícios 38 e 39, prove a fórmula dada, mostrando que a derivada do segundo membro é igual ao integrando.

38. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{u}{a} + C$

39. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C \quad \text{se } a > 0$

Nos Exercícios de 40 a 42, prove a fórmula indicada do Teorema 8.3.2, fazendo uma variação adequada da variável e então usando o Teorema 8.3.1.

40. Fórmula (4) 41. Fórmula (5) 42. Fórmula (6)

43. Na Secção 3.10, estabelecemos que uma partícula movendo-se numa reta terá um *movimento harmônico simples* se a medida de sua aceleração for sempre proporcional à medida de seu deslocamento a partir de um ponto fixo sobre a reta e se sua aceleração e deslocamento tiverem sempre sentidos opostos. Logo, se em t s a distância orientada da partícula até a origem for s cm e v cm/s for a velocidade da partícula, então uma equação diferencial para o movimento harmônico simples será

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 s \tag{7}$$

onde k^2 é a constante de proporcionalidade e o sinal menos indica que a aceleração tem sentido oposto ao deslocamento. Como $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$, segue que $\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds}$. Assim sendo, podemos reescrever (7) como

$$v\frac{dv}{ds} = -k^2 s \tag{8}$$

(a) Resolva (8) para v, obtendo $v = \pm k\sqrt{a^2 - s^2}$. *Nota*: Tome a^2k^2 como a constante de integração que é arbitrária, e justifique essa escolha. (b) Tomando $v = \frac{ds}{dt}$ na solução da parte (a), obtemos a equação diferencial

$$\frac{ds}{dt} = \pm k\sqrt{a^2 - s^2} \tag{9}$$

Tomando $t = 0$ no instante em que $v = 0$ (e portanto $s = a$), resolva (9) para obter

$$s = a \cos kt \tag{10}$$

(c) Mostre que o maior valor de $|s|$ é a. O número a é chamado de *amplitude* do movimento. (d) A partícula irá oscilar entre os pontos onde $s = a$ e $s = -a$. Se T s for o tempo necessário para a partícula ir de a até $-a$ e voltar, mostre que $T = 2\pi/k$. O número T é chamado de *período* do movimento.

44. Uma partícula move-se em linha reta de acordo com a equação do movimento $s = 5 - 10 \operatorname{sen}^2 2t$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem no tempo t s. Use o resultado da parte (b) do Exercício 43 para mostrar que o movimento é harmônico simples. Ache a amplitude e o período desse movimento.

45. Prove que o movimento do Exercício 44 é harmônico simples, mostrando que a equação diferencial (7) é satisfeita.

Nos Exercícios de 46 a 48, prove a fórmula, mostrando que a derivada do segundo membro é igual ao integrando.

46. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = -\cos^{-1} u + C$

Essa fórmula é equivalente à fórmula (1)? Por quê?

47. $\displaystyle\int \frac{du}{1 + u^2} = -\mathrm{cotg}^{-1}\, u + C$

Essa fórmula é equivalente à fórmula (2)? Por quê?

48. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} = -\mathrm{cosec}^{-1}\, u + C$

Essa fórmula é equivalente à fórmula (3)? Por quê?

8.4 AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Certas combinações de e^x e e^{-x} aparecem tão freqüentemente nas aplicações de Matemática que receberam nomes especiais. Duas delas são as *funções seno e co-seno hiperbólicos*. No fim desta secção mostraremos que os valores funcionais delas estão relacionados às coordenadas de pontos sobre uma hipérbole equilátera de uma forma similar àquela em que as funções trigonométricas estão relacionadas com pontos sobre uma circunferência. A seguir temos as definições das funções seno e co-seno hiperbólicos.

8.4.1 DEFINIÇÃO A **função seno hiperbólico** é definida por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

O domínio e a imagem são o conjunto de todos os números reais.

8.4.2 DEFINIÇÃO A **função co-seno hiperbólico** é definida por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

O domínio é o conjunto de todos os números reais e a imagem é o conjunto de todos os números no intervalo $[1, +\infty)$.

Como

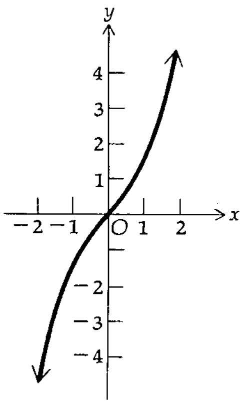
$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} \\ &= -\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= -\operatorname{senh} x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cosh(-x) &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} \\ &= \cosh x \end{aligned}$$

o seno hiperbólico é uma função ímpar e o co-seno hiperbólico é uma função par.

As fórmulas das derivadas das funções seno e co-seno hiperbólicos são obtidas aplicando as Definições 8.4.1 e 8.4.2 e derivando as expressões envolvendo funções exponenciais. Assim

$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{senh} x) &= D_x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D_x(\cosh x) &= D_x\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \operatorname{senh} x \end{aligned}$$

Dessas fórmulas e da regra da cadeia temos o teorema a seguir.



$y = \operatorname{senh} x$

FIGURA 1

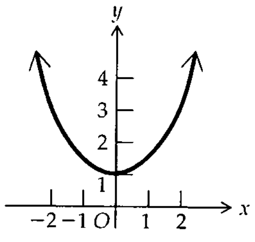
8.4.3 TEOREMA Se u for uma função derivável de x,

$$D_x(\operatorname{senh} u) = \cosh u \, D_x u$$

$$D_x(\cosh u) = \operatorname{senh} u \, D_x u$$

Como $D_x(\operatorname{senh} x) > 0$ para todo x, a função seno hiperbólico é crescente em todo o seu domínio. Com essa informação, com o conhecimento de que ela é uma função ímpar e com alguns valores obtidos da tabela de funções hiperbólicas no apêndice, traçamos o gráfico da função seno hiperbólico da Figura 1.

A função co-seno hiperbólico é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ pois $D_x(\cosh x) < 0$ se $x < 0$ e é crescente no intervalo $[0, +\infty)$ pois $D_x(\cosh x) > 0$ se $x > 0$. Além disso, o co-seno hiperbólico é uma função par. Com estas informações e com alguns valores do cosh x encontrados com uma calculadora, traçamos o gráfico da função co-seno hiperbólico da Figura 2.



$y = \cosh x$

FIGURA 2

As quatro funções hiperbólicas remanescentes são definidas em termos das funções seno e co-seno hiperbólicos. Observe que elas satisfazem identidades semelhantes àquelas satisfeitas pelas funções trigonométricas.

8.4.4 DEFINIÇÃO As **funções tangente, co-tangente, secante e co-secante hiperbólicas** são definidas da seguinte forma:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \tag{1}$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} \tag{2}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \tag{3}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} \tag{4}$$

As funções hiperbólicas da Definição 8.4.4 podem ser expressas em termos das funções exponenciais, usando as Definições 8.4.1 e 8.4.2. Temos

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Um esboço do gráfico da função tangente hiperbólica está na Figura 3. Note que das Figuras 1, 2 e 3 podemos concluir que essas funções, ao contrário das funções trigonométricas correspondentes, não são periódicas.

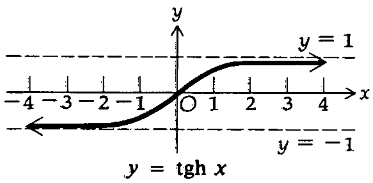


FIGURA 3

Existem identidades satisfeitas pelas funções hiperbólicas que são similares àquelas satisfeitas pelas funções trigonométricas. Quatro delas foram dadas na Definição 8.4.4. As outras quatro identidades fundamentais são as seguintes:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{1}{\operatorname{cotgh} x} \tag{5}$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \tag{6}$$

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x \tag{7}$$

$$1 - \operatorname{cotgh}^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x \tag{8}$$

A identidade (5) segue imediatamente de (1) e (2). A seguir está a demonstração de (6).

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^0 - e^{-2x}) \\ &= 1\end{aligned}$$

A identidade (7) pode ser demonstrada usando as fórmulas de tgh x e sech x em termos de e^x e e^{-x} como na prova acima, ou então uma demonstração alternativa pode ser feita usando outras identidades, como:

$$\begin{aligned}1 - \operatorname{tgh}^2 x &= 1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}\\ &= \operatorname{sech}^2 x\end{aligned}$$

A demonstração de (8) será deixada como exercício (veja o Exercício 1). A partir das oito identidades fundamentais, podemos provar outras. Algumas delas estão nos exercícios. Outras identidades, tais como as funções hiperbólicas da soma e da diferença de dois números e as funções hiperbólicas do dobro e da metade de um número, são similares às identidades trigonométricas correspondentes. Às vezes é muito útil o emprego das seguintes relações que decorrem das Definições 8.4.1 e 8.4.2.

$$\boxed{\begin{aligned}\cosh x + \operatorname{senh} x &= e^x \qquad (9)\\ \cosh x - \operatorname{senh} x &= e^{-x} \qquad (10)\end{aligned}}$$

Elas são usadas na demonstração da seguinte identidade:

$$\boxed{\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y} \qquad (11)$$

Da Definição 8.4.1

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}(x+y) &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}\\ &= \frac{e^x e^y - e^{-x}e^{-y}}{2}\end{aligned}$$

Aplicando (9) e (10) ao segundo membro da igualdade acima, obtemos

$$\operatorname{senh}(x+y) = \tfrac{1}{2}[(\cosh x + \operatorname{senh} x)(\cosh y + \operatorname{senh} y) - (\cosh x - \operatorname{senh} x)(\cosh y - \operatorname{senh} y)]$$

Efetuando os cálculos do segundo membro da igualdade acima e combinando os termos obteremos a identidade (11).

Da mesma forma podemos provar

$$\boxed{\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y} \qquad (12)$$

Se em (11) e (12) y for substituído por x, iremos obter as fórmulas

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{senh} 2x &= 2 \operatorname{senh} x \cosh x \qquad (13)\\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x \qquad (14)\end{aligned}}$$

A fórmula (14), combinada com a identidade (6), dá duas fórmulas alternativas para cosh $2x$, que são

$$\boxed{\begin{aligned}\cosh 2x &= 2 \operatorname{senh}^2 x + 1 \qquad (15)\\ \cosh 2x &= 2 \cosh^2 x - 1 \qquad (16)\end{aligned}}$$

Resolvendo (15) e (16) em senh x e cosh x, respectivamente, e substituindo x por $\frac{1}{2}x$, iremos obter

$$\operatorname{senh}\frac{x}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{2}} & \text{se } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{2}} & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{17}$$

$$\cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} \tag{18}$$

Não temos um símbolo ± no segundo membro de (18) pois a imagem da função co-seno hiperbólico é $[1, +\infty)$. Os detalhes das demonstrações de (12) até (18) serão deixados como exercícios (veja os Exercícios 2, 4 e 5).

Para encontrar a derivada da função tangente hiperbólica usamos algumas das identidades.

$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{tgh} x) &= D_x\left(\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right) \\ &= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} \\ &= \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}$$

As fórmulas de derivação das funções hiperbólicas remanescentes são as seguintes: $D_x(\operatorname{cotgh} x) = -\operatorname{cosech}^2 x$; $D_x(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$; $D_x(\operatorname{cosech} x) = -\operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh} x$. As demonstrações serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 15 e 16).

Dessas fórmulas e da regra da cadeia temos o teorema a seguir.

8.4.5 TEOREMA

Se u for uma função de x derivável,

$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{tgh} u) &= \operatorname{sech}^2 u D_x u \\ D_x(\operatorname{cotgh} u) &= -\operatorname{cosech}^2 u D_x u \\ D_x(\operatorname{sech} u) &= -\operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u D_x u \\ D_x(\operatorname{cosech} u) &= -\operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u D_x u \end{aligned}$$

Observe que todas as fórmulas das derivadas das funções hiperbólicas seno, co-seno e tangente têm um sinal mais, enquanto que as derivadas da co-tangente, secante e co-secante hiperbólicas todas têm um sinal menos. Esta é a única diferença entre as fórmulas de derivação das funções hiperbólicas e trigonométricas.

EXEMPLO 1 Ache $\dfrac{dy}{dx}$ sendo

$$y = \operatorname{tgh}(1 - x^2)$$

Solução

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \operatorname{sech}^2(1-x^2)\cdot D_x(1-x^2)\\ &= -2x\operatorname{sech}^2(1-x^2)\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Ache $f'(x)$ sendo

$$f(x) = \ln \operatorname{senh} x$$

Solução

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\operatorname{senh} x}\cdot\cosh x\\ &= \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}\\ &= \operatorname{cotgh} x\end{aligned}$$

As fórmulas de integração indefinida do próximo teorema decorrem das fórmulas de derivação dos Teoremas 8.4.3 e 8.4.5.

8.4.6 TEOREMA

$$\begin{aligned}\int \operatorname{senh} u\,du &= \cosh u + C\\ \int \cosh u\,du &= \operatorname{senh} u + C\\ \int \operatorname{sech}^2 u\,du &= \operatorname{tgh} u + C\\ \int \operatorname{cosech}^2 u\,du &= -\operatorname{cotg} u + C\\ \int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\,du &= -\operatorname{sech} u + C\\ \int \operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u\,du &= \operatorname{cosech} u + C\end{aligned}$$

Os métodos usados para integrar as funções hiperbólicas são similares àqueles usados para funções trigonométricas. Os exemplos a seguir ilustram o método.

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \operatorname{senh} x \cosh^2 x\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{senh} x\cosh^2 x\,dx &= \int \cosh^2 x\,(\operatorname{senh} x\,dx)\\ &= \tfrac{1}{3}\cosh^3 x + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Calcule

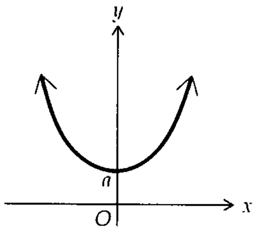
$$\int \operatorname{tgh}^2 x \, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tgh}^2 x \, dx &= \int (1 - \operatorname{sech}^2 x) \, dx \\ &= \int dx - \int \operatorname{sech}^2 x \, dx \\ &= x - \operatorname{tgh} x + C\end{aligned}$$

Catenária é a curva formada por um cabo flexível com densidade uniforme, pendurado entre dois pontos, sob a ação de seu próprio peso. Alguns cabos de suspensão de pontes e fios de telefone presos a dois postes apresentam essa forma. Se o ponto mais baixo da catenária for $(0, a)$, podemos mostrar que a equação dela é

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \qquad a > 0 \tag{19}$$



$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ $\quad a > 0$

FIGURA 4

Um esboço da catenária está na Figura 4.

EXEMPLO 5 Ache o comprimento do arco da catenária definida por (19) entre os pontos $(0, a)$ e (x_1, y_1), onde $x_1 > 0$.

Solução Se

$$f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{então} \quad f'(x) = a \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)$$
$$= \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Do Teorema 6.3.3, se o comprimento do arco dado for L unidades,

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \\ &= \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)} \, dx \\ &= \int_0^{x_1} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)} \, dx \qquad \text{(de (6))} \\ &= \int_0^{x_1} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx \qquad \left(\text{pois } \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \geqslant 1\right) \\ &= a \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\Big]_0^{x_1} \\ &= a \operatorname{senh}\left(\frac{x_1}{a}\right) - a \operatorname{senh} 0 \\ &= a \operatorname{senh}\left(\frac{x_1}{a}\right)\end{aligned}$$

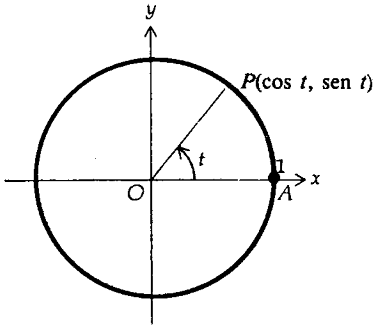


FIGURA 5

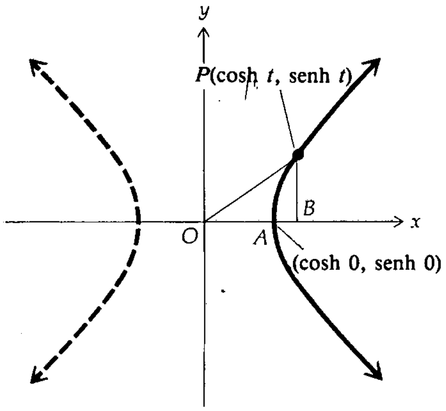


FIGURA 6

Na Secção 1.6 as funções seno e co-seno foram definidas como as coordenadas de um ponto na circunferência de círculo unitário

$$x^2 + y^2 = 1$$

Lembre-se da Definição 1.6.2 que se t for a medida em radianos do ângulo entre o eixo x e a reta que passa pela origem e pelo ponto $D(x, y)$ na circunferência de círculo unitário então

$$\text{sen } t = y \qquad \cos t = x$$

Veja a Figura 5. Substituindo os valores de x e y na equação da circunferência de círculo unitário, iremos obter a identidade

$$\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$$

Na Secção 10.3 será mostrado que a curva

$$x^2 - y^2 = 1$$

é uma hipérbole equilátera, chamada de hipérbole unitária. Veja a Figura 6. Se t for um número real qualquer, então o ponto $(\cosh t, \text{senh } t)$ estará sobre essa hipérbole pois

$$\cosh^2 t - \text{senh}^2 t = 1$$

Observe que como $\cosh t$ nunca é menor do que 1, todos os pontos $(\cosh t, \text{senh } t)$ estão no ramo direito da hipérbole.

Vamos mostrar agora como as áreas sombreadas das Figuras 5 e 6 estão relacionadas. Como a área de um setor circular de raio r unidades e ângulo central com medida t rad é dada por $\frac{1}{2}r^2t$ unidades de área, a área do setor circular da Figura 5 será $\frac{1}{2}t$ unidades de área, pois $r = 1$. O setor AOP da Figura 6 é a região limitada pelo eixo x, pela reta OP e pelo arco AP da hipérbole unitária. Se A_1 unidades de área for a área do setor AOP, A_2 unidades de área for a área do triângulo OBP e A_3 unidades de área for a área da região ABP, teremos:

$$A_1 = A_2 - A_3 \tag{20}$$

Da fórmula para determinar a área do triângulo obtemos

$$A_2 = \tfrac{1}{2}\cosh t \text{ senh } t \tag{21}$$

Vamos encontrar A_3 por integração:

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_0^t \text{senh } u \; d(\cosh u) \\ &= \int_0^t \text{senh}^2 u \; du \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^t (\cosh 2u - 1)\, du \\ &= \tfrac{1}{4} \text{ senh } 2u - \tfrac{1}{2}u\Big]_0^t \end{aligned}$$

Logo,

$$A_3 = \tfrac{1}{2}\cosh t \text{ senh } t - \tfrac{1}{2}t$$

Substituindo essa igualdade e (21) em (20), teremos

$$\begin{aligned} A_1 &= \tfrac{1}{2} \cosh t \text{ senh } t - (\tfrac{1}{2} \cosh t \text{ senh } t - \tfrac{1}{2}t) \\ &= \tfrac{1}{2}t \end{aligned}$$

Assim sendo, tanto o número de unidades de área da área do setor circular *AOP* da Figura 5 quanto o número de unidades de área da área do setor *AOP* da Figura 6 são, em cada caso, a metade do valor do parâmetro associado ao ponto *P*. Para a circunferência de círculo unitário, o parâmetro t é a medida em radianos do ângulo *AOP*. Para a hipérbole unitária, t não é interpretado como a medida de um ângulo; entretanto, algumas vezes o termo *radiano hiperbólico* é usado para t.

Mostramos que os valores funcionais de sen h e cos h têm a mesma relação com a hipérbole unitária que os valores funcionais de seno e co-seno têm com a circunferência de círculo unitário. Assim, como seno e co-seno são chamados de *funções circulares*, senh e cosh são chamados de funções hiperbólicas.

EXERCÍCIOS 8.4

Nos Exercícios de 1 a 10, prove a identidade.

1. $1 - \operatorname{cotgh}^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$

2. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

3. $\operatorname{tgh}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{tgh} y}{1 + \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$

4. (a) $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$; (b) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$;
(c) $\cosh 2x = 2 \operatorname{senh}^2 x + 1$; (d) $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$

5. (a) $\cosh \frac{1}{2}x = \sqrt{\dfrac{\cosh x + 1}{2}}$;
(b) $\operatorname{senh} \frac{1}{2}x = \pm\sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{2}}$

6. $\operatorname{cosech} 2x = \frac{1}{2} \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x$

7. (a) $\operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh} x$; (b) $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$

8. $\operatorname{senh} 3x = 3 \operatorname{senh} x + 4 \operatorname{senh}^3 x$

9. $\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3 \cosh x$

10. $\operatorname{senh}^2 x - \operatorname{senh}^2 y = \operatorname{senh}(x + y) \operatorname{senh}(x - y)$

11. Prove: $(\operatorname{senh} x + \cosh x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$, se n for inteiro positivo. (*Sugestão*: use a fórmula (9).)

12. Prove que a função tangente hiperbólica é ímpar e que a função secante hiperbólica é par.

13. Prove: $\operatorname{tgh}(\ln x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

14. Prove: $\dfrac{1 + \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh} x} = e^{2x}$

15. Prove: (a) $D_x(\operatorname{senh} x) = \cosh x$; (b) $D_x(\operatorname{cotgh} x) = -\operatorname{cosech}^2 x$.

16. Prove: (a) $D_x(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$;
(b) $D_x(\operatorname{cosech} x) = -\operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh} x$.

Nos Exercícios de 17 a 30, ache a derivada da função dada.

17. $f(x) = \operatorname{tgh} \dfrac{4x + 1}{5}$

18. $g(t) = \cosh t^3$

19. $f(y) = \operatorname{senh} e^{2y}$

20. $f(x) = \operatorname{cotgh}(\ln x)$

21. $f(w) = \operatorname{sech}^2 4w$

22. $g(x) = \ln(\operatorname{senh} x^3)$

23. $f(x) = e^x \cosh x$

24. $h(x) = \operatorname{cotgh} \dfrac{1}{x}$

25. $h(t) = \ln(\operatorname{tgh} t)$

26. $F(x) = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} x^2)$

27. $G(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{tgh} x^2)$

28. $f(x) = \ln(\operatorname{cotgh} 3x - \operatorname{cosech} 3x)$

29. $f(x) = x^{\operatorname{senh} x}$; $x > 0$

30. $g(x) = (\cosh x)^x$

31. Prove: (a) $\int \operatorname{tgh} u \, du = \ln|\cosh u| + C$;
(b) $\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$.

32. Prove: $\int \operatorname{sech} u \, du = 2 \operatorname{tg}^{-1} e^u + C$.

33. Prove: $\int \operatorname{cosech} u \, du = \ln|\operatorname{tgh} \frac{1}{2}u| + C$.

Nos Exercícios de 34 a 43, calcule a integral indefinida.

34. $\int \operatorname{senh}^4 x \cosh x \, dx$

35. $\int e^t \cosh(e^t) \operatorname{senh}(e^t) \, dt$

36. $\int e^x \operatorname{cosech}^2 e^x \, dx$

37. $\int \dfrac{\operatorname{senh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

38. $\int x \operatorname{sech}^2 x^2 \, dx$

39. $\int \operatorname{cotgh}^2 3x \, dx$

40. $\int \operatorname{sech}^3 x \operatorname{tg} h\, x \, dx$

41. $\int \operatorname{sech}^2 x \operatorname{tgh}^5 x \, dx$

42. $\int \dfrac{e^{\cosh t}}{\operatorname{cosech} t} \, dt$

43. $\int \operatorname{tgh} x \ln(\cosh x) \, dx$

Nos Exercícios de 44 a 47, calcule a integral definida.

44. $\int_0^{\ln 2} \operatorname{tgh} z \, dz$

45. $\int_0^{\ln 3} \operatorname{sech}^2 t \, dt$

46. $\int_{-1}^{1} (\cosh x - \operatorname{senh} x) \, dx$

47. $\int_0^2 \operatorname{senh}^3 x \cosh x \, dx$

48. Faça um esboço do gráfico da função co-tangente hiperbólica. Ache as equações das assíntotas.

49. Faça um esboço do gráfico da função secante hiperbólica. Ache os extremos relativos da função, os pontos de inflexão do gráfico, os intervalos nos quais o gráfico é côncavo para cima e para baixo.

50. Prove que a catenária é côncava para cima em todo ponto.

51. Ache a área da região limitada pela catenária do Exemplo 5, pelo eixo y, pelo eixo x e pela reta $x = x_1$ onde $x_1 > 0$.

52. Ache o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região do Exercício 51 em torno do eixo x.

53. Uma partícula move-se ao longo de uma linha reta, de acordo com a equação de movimento $s = e^{-ct/2}(A \text{ senh } t + B \cosh t)$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t s. Se v cm/s e a cm/s^2 forem a velocidade e a aceleração, respectivamente, da partícula em t s, ache v e a. Mostre também que a é a soma de dois números, um dos quais é proporcional a s e o outro proporcional a v.

54. Prove que a função seno hiperbólico é contínua e crescente em todo o seu domínio.

55. Prove que a função tangente hiperbólica é contínua e crescente em todo o seu domínio.

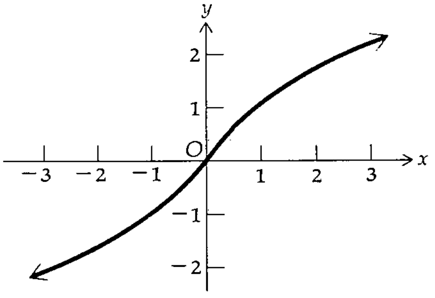
56. Prove que a função co-seno hiperbólico é contínua em todo o seu domínio, mas não é monótona. Ache os intevalos nos quais a função é crescente e onde é decrescente.

8.5 AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS *(Suplementar)*

Do gráfico da função seno hiperbólico (Figura 1 da Secção 8.4) vemos que uma reta horizontal intercepta o gráfico em um e somente um ponto; logo, a função seno hiperbólico é biunívoca. Além disso, a função seno hiperbólico é contínua e crescente em seu domínio (veja o Exercício 54 nos Exercícios 8.4). Logo, pelo Teorema 7.1.5, a função tem uma inversa.

8.5.1 DEFINIÇÃO A **função inversa do seno hiperbólico**, denotada por $\text{senh}^{-1}\, x$, é definida da seguinte forma:

$y = \text{senh}^{-1}\, x$ se e somente se $x = \text{senh}\, y$



$y = \text{senh}^{-1}\, x$

FIGURA 1

Um esboço do gráfico da função inversa do seno hiperbólico está na Figura 1. Seu domínio é o conjunto R de todos os números reais e sua imagem é também o conjunto R.

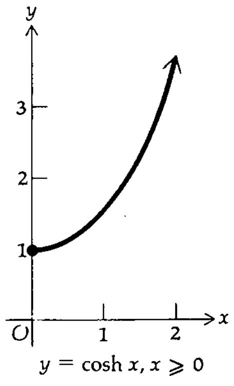
Segue, da Definição 8.5.1, que

$\text{senh}\,(\text{senh}^{-1}\, x) = x$ e $\text{senh}^{-1}\,(\text{senh}\, y) = y$

Da Figura 2 na Secção 8.4 observamos que uma rea horizontal $y = k$, onde $k > 1$, intercepta o gráfico da função co-seno hiperbólico em dois pontos. Logo, para cada número maior do que 1 na imagem dessa função correspondem dois números em seu domínio. Assim, a função co-seno hiperbólico não é biunívoca e não possui uma inversa. Entretanto, definimos uma função F da seguinte maneira:

$F(x) = \cosh x$ para $x \geqslant 0$

O domínio de F é o intervalo $[0, +\infty)$ e a imagem de F é o intervalo $[1, +\infty)$. Um esboço do gráfico de F está na Figura 2. A função F é contínua e crescente em seu domínio, assim sendo, pelo Teorema 7.1.5 F tem uma inversa a qual chamaremos de *função inversa do co-seno hiperbólico*.



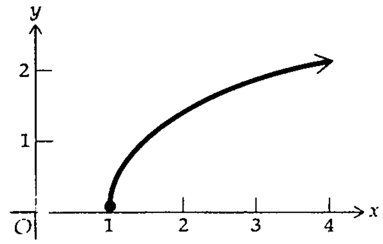
$y = \cosh x, x \geqslant 0$

FIGURA 2

8.5.2 DEFINIÇÃO

A função inversa do co-seno hiperbólico, denotada por $\cosh^{-1}$, é definida da seguinte maneira:

$y = \cosh^{-1} x$ se e somente se $x = \cosh y$ e $y \geqslant 0$



$y = \cosh^{-1} x$

FIGURA 3

Um esboço do gráfico da função inversa do co-seno hiperbólico está na Figura 3. O domínio dessa função é o intervalo $[1, +\infty)$, e a imagem é o intervalo $[0, +\infty)$. Da Definição 8.5.2,

$\cosh(\cosh^{-1} x) = x$ se $x \geqslant 1$

e

$\cosh^{-1}(\cosh y) = y$ se $y \geqslant 0$

Da mesma forma que ocorria com a função seno hiperbólico, uma reta horizontal intercepta os gráficos das funções tangente, co-tangente e co-secante hiperbólicas em um único ponto. No caso da função tangente hiperbólica, isto pode ser visto na Figura da Secção 8.4.3. Cada uma dessas funções é, portanto, biunívoca e, além disso, elas são contínuas e monótonas em seu domínio. Dessa forma, cada uma tem uma função inversa.

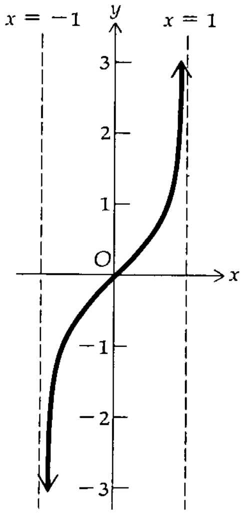
8.5.3 DEFINIÇÃO

A função inversa da tangente hiperbólica, a **função inversa da co-tangente hiperbólica** e a **função inversa da co-secante hiperbólica**, denotadas respectivamente por tgh^{-1}, cotgh^{-1} e cosech^{-1}, são definidas da seguinte forma:

$y = \text{tgh}^{-1} x$ se e somente se $x = \text{tgh}\, y$

$y = \text{cotgh}^{-1} x$ se e somente se $x = \text{cotgh}\, y$

$y = \text{cosech}^{-1} x$ se e somente se $x = \text{cosech}\, y$



$y = \text{tgh}^{-1} x$

FIGURA 4

Um esboço do gráfico da função inversa da tangente hiperbólica está na Figura 4.

Como $\text{sech}\, x = 1/\cosh x$ e a função co-seno hiperbólico não é biunívoca, segue que a função secante hiperbólica não é biunívoca. Logo, ela não tem uma inversa. Entretanto, procedendo da mesma forma que fizemos com a função co-seno hiperbólico, vamos definir uma nova função que tenha inversa. Seja G a função definida por

$G(x) = \text{sech}\, x$ para $x \geqslant 0$

Podemos mostrar que G é contínua e monótona em seu domínio, logo, G tem uma inversa, que é chamada de *função inversa da secante hiperbólica*.

8.5.4 DEFINIÇÃO

A função inversa da secante hiperbólica, denotada por sech^{-1}, é definida da seguinte maneira:

$y = \text{sech}^{-1} x$ se e somente se $x = \text{sech}\, y$ e $y \geqslant 0$

As funções inversas hiperbólicas podem ser expressas em termos de logaritmos naturais. Isso não surpreende, pois as funções hiperbólicas são definidas em termos da função exponencial e a função logaritmo natural é a inversa da função exponencial.

A seguir estão estas expressões para senh^{-1}, $\cosh^{-1}$, tgh^{-1} e $\operatorname{cotgh}^{-1}$

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad x \text{ um número real qualquer} \qquad (1)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad x \geqslant 1 \qquad (2)$$

$$\operatorname{tgh}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x} \qquad |x| < 1 \qquad (3)$$

$$\operatorname{cotgh}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x + 1}{x - 1} \qquad |x| > 1 \qquad (4)$$

Vamos provar (2) e deixar a demonstração das demais fórmulas como exercícios (veja os Exercícios de 1 a 3).

Para provar (a), seja $y = \cosh^{-1} x$, $x \geqslant 1$. Então, da Definição 8.5.2, temos que $x = \cosh y$, $y \geqslant 0$. Aplicando a Definição 8.4.2 para $\cosh y$ teremos

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \qquad y \geqslant 0$$

do que obtemos

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \qquad y \geqslant 0$$

Resolvendo essa equação para e^y, teremos

$$\begin{aligned} e^y &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} \\ &= x \pm \sqrt{x^2 - 1} \qquad y \geqslant 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Sabemos que $y \geqslant 0$ e $x \geqslant 1$. Logo $e^y \geqslant 1$. Quando $x = 1$, $x + \sqrt{x^2 - 1} = 1$ e $x - \sqrt{x^2 - 1} = 1$. Além disso, quando $x > 1$, temos $0 < x - 1 < x + 1$; assim $\sqrt{x - 1} < \sqrt{x + 1}$. Logo,

$$\sqrt{x - 1}\sqrt{x - 1} < \sqrt{x - 1}\sqrt{x + 1}$$

resultando $x - 1 < \sqrt{x^2 - 1}$. Logo, quando $x > 1$, $x - \sqrt{x^2 - 1} < 1$. Conseqüentemente, podemos desconsiderar o sinal negativo em (5). Como $y = \cosh^{-1} x$, temos

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad x \geqslant 1$$

que é (2).

EXEMPLO 1 Expresse em termos de logaritmo natural cada um dos valores funcionais dados. (a) $\operatorname{senh}^{-1} 2$; (b) $\operatorname{tgh}^{-1}(-\frac{4}{5})$.

Solução

(a) De (1),

$$\operatorname{senh}^{-1} 2 = \ln(2 + \sqrt{5})$$

(b) De (3),

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}^{-1}(-\tfrac{4}{5}) &= \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{5}} \\ &= \tfrac{1}{2}\ln 3^{-2} \\ &= -\ln 3 \end{aligned}$$

Para obter a fórmula da derivada da função inversa do seno hiperbólico, seja $y = \operatorname{senh}^{-1} x$, e então $x = \operatorname{senh} y$. Assim, como $\dfrac{dx}{dy} = \cosh y$ e $\dfrac{dy}{dx}$ é o recíproco de $\dfrac{dx}{dy}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} \tag{6}$$

Da identidade $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ obtemos $\cosh y = \sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1}$, onde, ao tomarmos a raiz quadrada, desconsideramos o sinal negativo pois $\cosh y \geqslant 1$. Logo, como $x = \operatorname{senh} y$, $\cosh y = \sqrt{x^2 + 1}$. Substituindo esse valor de $\cosh y$ em (6), obtemos

$$D_x(\operatorname{senh}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Essa fórmula também pode ser obtida a partir de (1), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{senh}^{-1} x) &= D_x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

As fórmulas para as derivadas das outras cinco funções hiperbólicas inversas são obtidas de forma análoga à que foi empregada para a derivada da função inversa do seno hiperbólico. Serão propostos exercícios para a sua obtenção (veja os Exercícios de 4 até 8). Dessas fórmulas e da regra da cadeia segue o próximo teorema.

8.5.5 TEOREMA

Se u for uma função de x derivável,

$$D_x(\operatorname{senh}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} D_x u \tag{7}$$

$$D_x(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} D_x u \qquad u > 1 \tag{8}$$

$$D_x(\operatorname{tgh}^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} D_x u \qquad |u| < 1 \tag{9}$$

$$D_x(\operatorname{cotgh}^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} D_x u \qquad |u| > 1 \tag{10}$$

$$D_x(\operatorname{sech}^{-1} u) = -\frac{1}{u\sqrt{1 - u^2}} D_x u \qquad 0 < u < 1 \tag{11}$$

$$D_x(\operatorname{cosech}^{-1} u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{1 + u^2}} D_x u \qquad u \neq 0 \tag{12}$$

EXEMPLO 2 Ache $f'(x)$ sendo

$$f(x) = \text{tgh}^{-1}(\cos 2x)$$

Solução De (9)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 - \cos^2 2x}(-2 \text{ sen } 2x) \\ &= \frac{-2 \text{ sen } 2x}{\text{sen}^2 2x} \\ &= \frac{-2}{\text{sen } 2x} \\ &= -2 \text{ cosec } 2x \end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Comprove que $D_x(x \cosh^{-1} x - \sqrt{x^2 - 1}) = \cosh^{-1} x$.

Solução

$$\begin{aligned} D_x(x \cosh^{-1} x - \sqrt{x^2 - 1}) &= \cosh^{-1} x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \cosh^{-1} x \end{aligned}$$

A principal aplicação das funções hiperbólicas inversas é na integração. Tal tópico será objeto da Secção Suplementar 9.8.

EXERCÍCIOS 8.5.

Nos Exercícios de 1 a 8, prove a fórmula indicada desta Secção.

1. Fórmula (1) **2.** Fórmula (3) **3.** Fórmula (4)
4. Fórmula (8) **5.** Fórmula (9) **6.** Fórmula (10)
7. Fórmula (11) **8.** Fórmula (12)

Nos Exercícios de 9 a 10, expresse a quantidade dada em termos do logaritmo natural.

9. (a) $\text{senh}^{-1} \frac{1}{4}$; (b) $\text{tgh}^{-1} \frac{1}{2}$

10. (a) $\cosh^{-1} 3$; (b) $\text{cotgh}^{-1}(-2)$

Nos Exercícios de 11 a 28, encontre a derivada da função dada.

11. $f(x) = \text{senh}^{-1} x^2$ **12.** $G(x) = \cosh^{-1} \frac{1}{3}x$
13. $F(x) = \text{tgh}^{-1} 4x$ **14.** $h(w) = \text{tgh}^{-1} w^3$
15. $a(x) = \text{cotgh}^{-1}(3x + 1)$ **16.** $f(r) = \text{cosech}^{-1} \frac{1}{2}r^2$
17. $f(x) = x^2 \cosh^{-1} x^2$ **18.** $h(x) = (\text{sech}^{-1} x)^2$
19. $f(x) = \text{senh}^{-1}(\text{tg } x)$ **20.** $g(x) = \text{tgh}^{-1}(\text{sen } 3x)$
21. $h(x) = \cosh^{-1}(\text{cosec } x)$ **22.** $F(x) = \text{cotgh}^{-1}(\cosh x)$
23. $f(z) = (\text{cotgh}^{-1} z^2)^3$ **24.** $f(t) = \text{senh}^{-1} e^{2t}$
25. $g(x) = \text{tgh}^{-1}(\cos e^x)$ **26.** $h(x) = \cosh^{-1}(\ln x)$
27. $G(x) = x \text{ senh}^{-1} x - \sqrt{1 + x^2}$
28. $H(x) = \ln\sqrt{x^2 + 1} - x \text{ tgh}^{-1} x$

Nos Exercícios de 29 a 31, faça um esboço do gráfico da função indicada.

29. A função inversa da co-tangente hiperbólica.
30. A função inversa da secante hiperbólica.
31. A função inversa da co-secante hiperbólica.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 8

1. Dado $x = \text{sen}^{-1} \frac{3}{5}$ e $y = \cos^{-1}(-\frac{4}{5})$, ache o valor exato de cada uma das seguintes funções: (a) cos x; (b) sen y; (c) tg x; (d) tg y.

2. Dado $x = \cos^{-1} \frac{7}{25}$ e $y = \text{tg}^{-1}(-\frac{7}{24})$, ache o valor exato de cada uma das seguintes funções: (a) sen x; (b) sen y; (c) cos y; (d) tg x.

Nos exercícios 3 e 4 ache o valor exato da quantidade dada.

3. (a) $\text{sen}[2 \cos^{-1}(-\frac{12}{13})]$;
(b) $\text{tg}[\cos^{-1} \frac{3}{5} + \text{sen}^{-1}(-\frac{7}{25})]$

4. (a) $\text{tg}[2 \text{ sen}^{-1}(-\frac{24}{25})]$;
(b) $\cos[\text{tg}^{-1} \frac{4}{3} - \text{sen}^{-1}(-\frac{5}{13})]$

Nos Exercícios de 5 a 16, ache a derivada da função dada.

5. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} 2^x$ **6.** $g(x) = x^2 \operatorname{sen}^{-1} 2x$
7. $F(x) = \operatorname{senh}^3 2x$ **8.** $h(x) = e^x(\cosh x + \operatorname{senh} x)$
9. $f(x) = \sec^{-1}\sqrt{x^2+1}$ **10.** $G(w) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{w-3}{3w+1}\right)$
11. $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{tgh}\sqrt{x})$ **12.** $f(x) = \operatorname{sech}(\operatorname{tg} 3x)$
13. $h(x) = \operatorname{cosech}^2 e^{2x}$ **14.** $g(x) = \cos^{-1}(\operatorname{tgh} 2x)$
15. $f(x) = (\cosh x)^{1/x}$ **16.** $f(x) = \sec^{-1}(\cosh x)$

Nos Exercícios 17 e 18, faça um esboço do gráfico da função dada.

17. $f(x) = 2 \operatorname{tgh} \frac{1}{2}x$ **18.** $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} 3x$

Nos Exercícios 19 e 20 ache dy/dx por derivação implícita.

19. $\operatorname{cotg}^{-1}\dfrac{x^2}{3y} + xy^2 = 0$ **20.** $\operatorname{tg}^{-1}(x+3y) = \ln y$

Nos Exercícios de 21 a 28, calcule a integral indefinida.

21. $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ **22.** $\displaystyle\int x \operatorname{cotgh} \tfrac{1}{2}x^2\,dx$

23. $\displaystyle\int \operatorname{tgh}^2 3x\,dx$ **24.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7+5x-2x^2}}$

25. $\displaystyle\int \frac{dt}{2t^2+3t+5}$ **26.** $\displaystyle\int \frac{dy}{9e^y+e^{-y}}$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-8}}$ **28.** $\displaystyle\int \frac{\cosh t\,dt}{\sqrt{\operatorname{senh} t}}$

Nos Exercícios de 29 a 32, calcule a integral definida.

29. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(t+2)\,dt}{\sqrt{4t-t^2}}$ **30.** $\displaystyle\int_0^2 \operatorname{sech}^2 \tfrac{1}{2}x\,dx$

31. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\cosh y}\,dy$ **32.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{(2x+6)\,dx}{x^2+2x+5}$

33. Num circuito elétrico, a força eletromotriz é x volts em t s, onde $E = 20 \cos 120\pi t$. (a) Resolva a equação em t. Use a equação da parte (a) para achar o menor valor positivo de t para o qual a força eletromotriz é (b) 10 volts; (c) 5 volts (d) -10 volts; (e) -5 volts.

34. Um peso é suspenso por uma mola e vibra verticalmente de acordo com a equação $y = 4 \operatorname{sen} 2\pi\left(t + \frac{1}{6}\right)$, onde y cm é a distância orientada do peso, a partir de sua posição de equilíbrio t s após começar o movimento e a direção positiva é para cima. (a) Resolva a equação em t. Use a equação da parte (a) para determinar o menor valor positivo de t para o qual o deslocamento do peso em relação à sua posição de equilíbrio é (b) 2 cm e (c) 3 cm.

35. Mostre que $\cosh(\ln x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$

36. Prove: (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{cotgh} x = 1$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{cosech} x = 0$.

37. Ache a área da região limitada pela curva $y = 9/\sqrt{9-x^2}$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 2\sqrt{2}$.

38. Ache o comprimento da catenária $y = \cosh x$ de $(\ln 2, \frac{5}{4})$ até $(\ln 3, \frac{5}{3})$.

39. Ache o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = \sqrt{\operatorname{senh} x}$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = \ln 2$, em torno do eixo x.

40. A *gudermaniana*, assim chamada em homenagem ao matemático alemão Christoph Gudermann (1798-1852), é a função definida por $\operatorname{gd} x = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} x)$. Mostre que $D_x(\operatorname{gd} x) = \operatorname{sech} x$.

41. Um holofote está a $\frac{1}{2}$ km de uma estrada reta e mantém sua luz focalizada em um automóvel que está viajando a uma velocidade escalar constante de 60 km/h. Ache a taxa segundo a qual o feixe de luz está mudando de direção (a) quando o carro está no ponto da estrada mais perto do holofote e (b) quando o carro está a $\frac{1}{2}$ km desse ponto.

42. Um quadro com 150 cm é colocado numa parede com sua base a 210 cm do nível dos olhos de um observador. Se o observador está se aproximando da parede com uma velocidade de 90 cm/s, com que velocidade a medida do ângulo segundo o qual o observador vê o quadro estará variando quando o observador estiver a 3 m da parede?

43. Um avião está voando a uma velocidade de 300 km/h, a uma altitude de 4 km. Se um observador está no chão, ache a taxa de variação no tempo da medida do ângulo de elevação do avião em relação ao observador, quando ele está sobre um ponto do solo a 2 km do observador.

44. Um helicóptero deixa o solo num ponto a 250 m de um observador e sobe verticalmente a 7,5 m/s. Ache a taxa de variação no tempo da medida do ângulo de elevação do helicóptero quando ele estiver a 180 m do solo.

45. Dois pontos, A e B, são diametralmente opostos nas praias de um lago circular com 1 km de diâmetro. Uma pessoa deseja ir do ponto A ao ponto B. Ela pode remar a uma velocidade de $1\frac{1}{2}$ km/h e andar a uma velocidade de 5 km/h. Ache qual o menor tempo gasto para ir de A até B.

46. Resolva o Exercício 45 caso a pessoa possa remar e andar com as velocidades de 2 e 4 km/h, respectivamente.

Os Exercícios de 47 a 55 pertencem à Secção Supementar 8.5. Nos Exercícios 47 e 48, expresse as quantidades dadas em termos do logaritmo natural.

47. $\cosh^{-1} 2$ **48.** $\operatorname{tgh}^{-1}\frac{1}{4}$

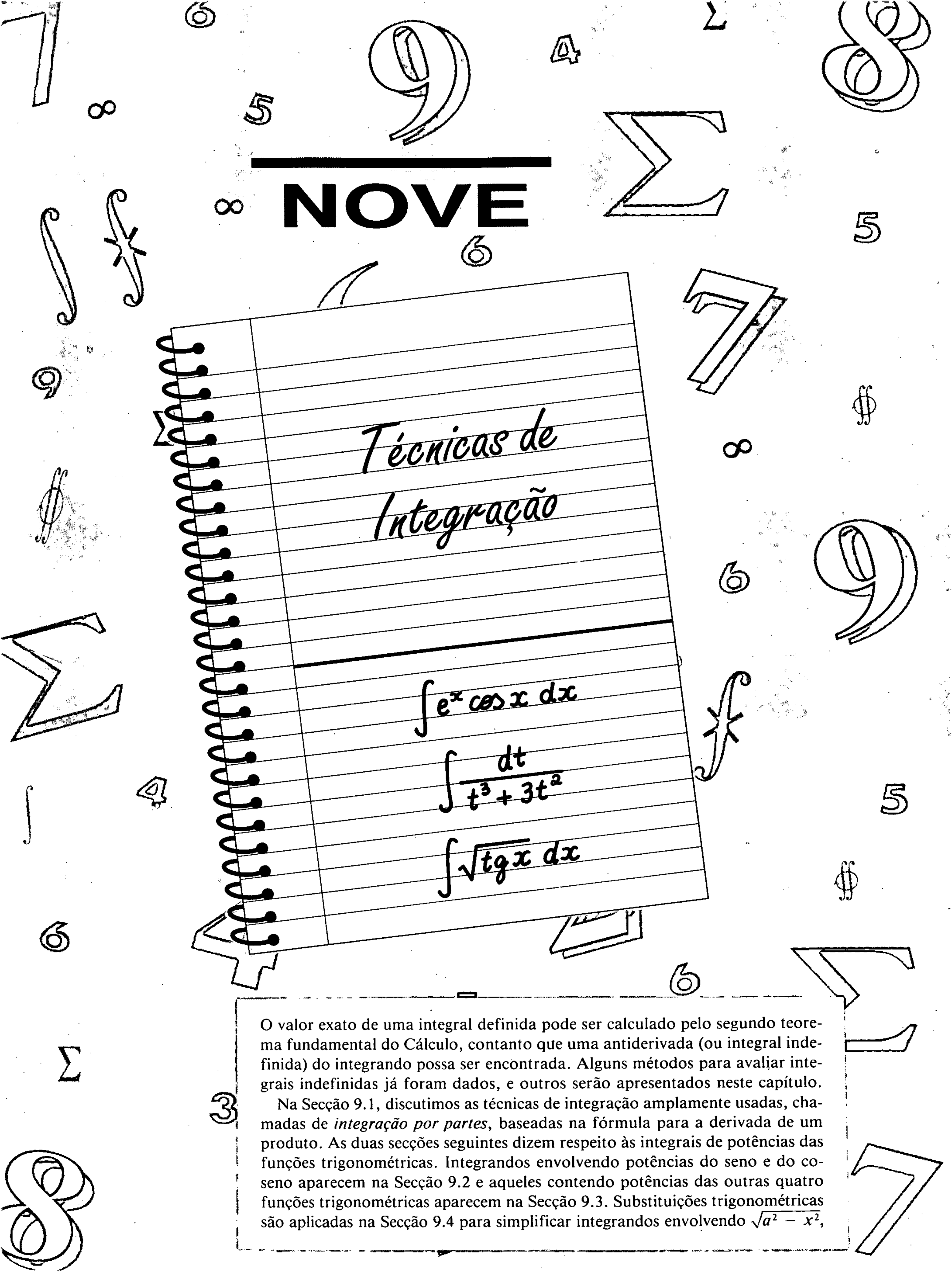
Nos Exercícios de 49 a 52, ache a derivada da função dada.

49. $h(w) = w^2 \operatorname{senh}^{-1} 2w$
50. $f(x) = \operatorname{tgh}^{-1}(\operatorname{sen}\sqrt{x})$
51. $f(x) = \operatorname{sech}^{-1} e^{-2x}$
52. $g(t) = \cosh^{-1}\sqrt{t^2+1}$
53. O gráfico da equação

$$x = a \operatorname{senh}^{-1}\sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

é chamado de *tratroz*. Prove que a inclinação da curva em qualquer ponto (x, y) é $-y/\sqrt{a^2-y^2}$.

NOVE



Técnicas de Integração

$$\int e^{x} \cos x \, dx$$

$$\int \frac{dt}{t^{3}+3t^{2}}$$

$$\int \sqrt{\operatorname{tg} x} \, dx$$

O valor exato de uma integral definida pode ser calculado pelo segundo teorema fundamental do Cálculo, contanto que uma antiderivada (ou integral indefinida) do integrando possa ser encontrada. Alguns métodos para avaliar integrais indefinidas já foram dados, e outros serão apresentados neste capítulo.

Na Secção 9.1, discutimos as técnicas de integração amplamente usadas, chamadas de *integração por partes*, baseadas na fórmula para a derivada de um produto. As duas secções seguintes dizem respeito às integrais de potências das funções trigonométricas. Integrandos envolvendo potências do seno e do coseno aparecem na Secção 9.2 e aqueles contendo potências das outras quatro funções trigonométricas aparecem na Secção 9.3. Substituições trigonométricas são aplicadas na Secção 9.4 para simplificar integrandos envolvendo $\sqrt{a^2 - x^2}$,

$\sqrt{a^2 + x^2}$ e $\sqrt{x^2 - a^2}$. As frações parciais são usadas para integrar funções racionais nas Secções 9.5 e 9.6. Mais substituições para avaliar integrais indefinidas são dadas na Secção 9.7. Os integrandos naquela secção envolvem potências fracionárias de uma variável ou são potências racionais do seno e do coseno. Na Secção Suplementar 9.8 as funções hiperbólicas inversas são aplicadas na integração para dar novas formas de resultados obtidos anteriormente através de outros métodos.

Às vezes pode ser preferível fazer uso de uma tabela de integrais, em vez de efetuar uma integração complicada. Uma pequena tabela de integrais pode ser encontrada ao final deste volume e a Secção A.1 no apêndice dá instruções de como usá-la. Algumas vezes é necessário empregar técnicas de integração para expressar o integrando na forma em que ele aparece na tabela. Assim sendo, você deverá adquirir a capacidade de reconhecer qual a técnica a ser empregada numa dada integral. Além disso, é importante desenvolver habilidades de cálculo em todos os ramos da Matemática e os exercícios deste capítulo são uma boa oportunidade de treino. Por essas razões aconselhamos o uso das tabelas de integrais somente depois que você dominar a integração.

Na prática, não é sempre possível calcular uma integral definida através do cálculo de uma integral indefinida. Isto é, podemos ter uma integral definida que exista, mas o integrando não tem uma antiderivada que possa ser expressa em termos das funções elementares. Um exemplo de tal integral definida é

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\, dt$$

Uma calculadora programável ou um computador utilizando os métodos numéricos discutidos na Secção 5.10 podem ser usados para aproximar o valor dessa integral definida. Outro procedimento é dado no Exemplo 2 da Secção 13.3, onde uma série infinita é usada.

As fórmulas de integração indefinida que foram dadas nos capítulos anteriores e que são usadas com maior freqüência são dadas abaixo e foram numeradas para referências posteriores.

1. $\int du = u + C$

2. $\int a\, du = au + C$ onde a é uma constante qualquer

3. $\int [f(u) + g(u)]\, du = \int f(u)\, du + \int g(u)\, du$

4. $\int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

6. $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ onde $a > 0$ e $a \neq 1$

7. $\int e^u\, du = e^u + C$

8. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$

9. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$

10. $\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C$

11. $\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\operatorname{cotg} u + C$

12. $\int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u + C$

13. $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$

14. $\int \operatorname{tg} u \, du = \ln|\sec u| + C$

15. $\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

16. $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

17. $\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a > 0$

19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a \neq 0$

20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \text{onde } a > 0$

21. $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$

22. $\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$

23. $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + C$

24. $\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\operatorname{cotgh} u + C$

25. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + C$

26. $\int \operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u \, du = -\operatorname{cosech} u + C$

9.1 INTEGRAÇÃO POR PARTES

Da fórmula da derivada do produto de duas funções obtemos um método de integração muito útil chamado *integração por partes*. Se f e g forem funções diferenciáveis, então

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \qquad f(x)g'(x) = D_x[f(x)g(x)] - g(x)f'(x)$$

Integrando ambos os membros, iremos obter

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int D_x[f(x)g(x)]\,dx - \int g(x)f'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx} \tag{1}$$

Chamaremos (1) de **fórmula de integração por partes**. Para propósitos de cálculo existe uma maneira mais conveniente de escrever essa fórmula, tomando

$$u = f(x) \qquad \text{e} \qquad v = g(x)$$

Então

$$du = f'(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad dv = g'(x)\,dx$$

assim sendo, (1) torna-se

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \tag{2}$$

Essa fórmula expressa a integral $\int u\,dv$ em termos de uma outra integral, $\int v\,du$. Escolhendo adequadamente u e dv, pode ser mais fácil calcular a segunda integral do que a primeira. Quando escolhemos as substituições para u e dv, em geral pretendemos que dv seja o fator do integrando mais complicado que se possa integrar diretamente, e que u seja uma função cuja derivada seja uma função mais simples. A seguir estão exemplos e ilustrações mostrando o método.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Queremos calcular

$$\int x \ln x\,dx$$

Para determinar quais as substituições para u e dv, devemos ter em mente que para encontrar v precisamos saber integrar dv. Isso sugere que $dv = x\,dx$ e $u = \ln x$. Então,

$$v = \frac{x^2}{2} + C_1 \quad \text{e} \quad du = \frac{dx}{x}$$

Da fórmula (2)

$$\begin{aligned}
\int x \ln x\,dx &= \ln x\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) - \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\frac{dx}{x} \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x + C_1 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx - C_1 \int \frac{dx}{x} \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x + C_1 \ln x - \frac{x^2}{4} - C_1 \ln x + C_2 \\
&= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C_2
\end{aligned}$$

◀

Na Ilustração 1, observe que a primeira constante de integração C_1 não aparece na resposta final. C_1 foi usada somente para mostrar que todas as escolhas de v da forma $\frac{1}{2}x^2 + C_1$ produzem o mesmo resultado para $\int x \ln x\,dx$. Essa situação vale em geral e provamos isso da seguinte forma: escrevendo $v + C_1$ na fórmula (2), teremos

$$\begin{aligned}
\int u\,dv &= u(v + C_1) - \int (v + C_1)\,du \\
&= uv + C_1u - \int v\,du - C_1 \int du \\
&= uv + C_1u - \int v\,du - C_1u \\
&= uv - \int v\,du
\end{aligned}$$

Assim sendo, é desnecessário escrever C_1 quando calcularmos v a partir de dv.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A resposta na Ilustração 1 pode ser escrita como

$$\tfrac{1}{2}x^2(\ln x - \tfrac{1}{2}) + C$$

Verificamos esse resultado calculando a derivada de um produto.

$$\begin{aligned} D_x\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x - 1)\right] &= \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}x + x\ln x - \tfrac{1}{2}x \\ &= x\ln x \end{aligned}$$

◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Para calcular

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx$$

usamos integração por partes com $dv = xe^{x^2}\,dx$ e $u = x^2$. Então

$$v = \tfrac{1}{2}e^{x^2} \qquad \text{e} \qquad du = 2x\,dx$$

Da fórmula (2)

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2}\,dx &= x^2(\tfrac{1}{2}e^{x^2}) - \int(\tfrac{1}{2}e^{x^2})2x\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2e^{x^2} - \int xe^{x^2}\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2e^{x^2} - \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C \end{aligned}$$

◀

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int x\cos x\,dx$$

Solução Seja $u = x$ e $dv = \cos x\,dx$. Então

$$du = dx \text{ e } v = \operatorname{sen} x$$

Assim

$$\begin{aligned} \int x\cos x\,dx &= x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx \\ &= x\operatorname{sen} x + \cos x + C \end{aligned}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** No Exemplo 1, se em vez de nossas escolhas de u e dv conforme está acima, tivéssemos tomado

$$u = \cos x \qquad \text{e} \qquad dv = x\,dx$$

então

$$du = -\operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{e} \qquad v = \tfrac{1}{2}x^2$$

Assim

$$\int x\cos x\,dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \frac{1}{2}\int x^2\operatorname{sen} x\,dx$$

A integral do segundo membro é mais complicada do que a que tínhamos inicialmente, indicando assim que as escolhas feitas para u e dv não são boas. ◀

Pode acontecer que determinada integral exija repetidas aplicações da integração por partes. Isso está ilustrado no exemplo abaixo.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int x^2 e^x \, dx$$

Solução Seja $u = x^2$ e $dv = e^x\,dx$. Então

$$du = 2x\,dx \quad \text{e} \quad v = e^x$$

Temos, então,

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx$$

Vamos aplicar a integração por partes ao segundo membro. Seja $\bar{u} = x$ e $d\bar{v} = e^x\,dx$. Então,

$$d\bar{u} = dx \quad \text{e} \quad \bar{v} = e^x$$

Obtemos assim

$$\begin{aligned}\int x e^x\,dx &= xe^x - \int e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x + \bar{C}\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x\,dx &= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x + \bar{C}) \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C \qquad \text{onde } C = -2\bar{C}\end{aligned}$$

A integração por partes é freqüentemente usada quando o integrando envolve logaritmos, funções trigonométricas inversas e produtos de funções.

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \operatorname{tg}^{-1} x\,dx$$

Solução Seja $u = \operatorname{tg}^{-1} x$ e $dv = dx$. Então

$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \quad \text{e} \quad v = x$$

Assim

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^{-1} x\,dx &= x \operatorname{tg}^{-1} x - \int \frac{x\,dx}{1 + x^2} \\ &= x \operatorname{tg}^{-1} x - \tfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C\end{aligned}$$

Uma situação que ocorre às vezes quando estamos usando integração por partes é mostrada no Exemplo 4.

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

Solução Seja $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Então

$$du = e^x \, dx \quad \text{e} \quad v = -\cos x$$

Logo,

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

A integral do segundo membro é semelhante à primeira integral, exceto que em vez de sen x temos cos x. Aplicamos a integração por partes novamente, sendo $\bar{u} = e^x$ e $d\bar{v} = \cos x \, dx$. Então,

$$d\bar{u} = e^x \, dx \quad \text{e} \quad \bar{v} = \operatorname{sen} x$$

Assim,

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \left(e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx\right)$$

Agora temos no segundo membro a mesma integral que no primeiro. Assim, se somarmos $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ a ambos os membros da igualdade, teremos

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x + 2C$$

Observe que o segundo membro da igualdade acima tem uma constante arbitrária, pois no primeiro membro temos uma integral indefinida. Essa constante arbitrária foi escrita como $2C$; assim, quando dividirmos por 2 os membros da igualdade, a constante arbitrária na resposta será C. Assim, temos

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Ao aplicarmos a integração por partes em uma dada integral, um determinado par de escolhas para u e dv pode funcionar, enquanto que outro par pode falhar. Vimos isso na Ilustração 4 e um outro caso ocorre na Ilustração 5.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** No Exemplo 4, na etapa em que tínhamos

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

se calcularmos a integral à direita tomando $\bar{u} = \cos x$ e $d\bar{v} = e^x \, dx$, temos

$$d\bar{u} = -\operatorname{sen} x \, dx \quad \text{e} \quad \bar{v} = e^x$$

Assim, iremos obter

$$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen} x \, dx &= -e^x \cos x + \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx\right) \\ &= \int e^x \operatorname{sen} x \, dx\end{aligned}$$

◀

Nos Exercícios 53 e 54 será pedido que você derive as seguintes fórmulas, onde a e n são números reais não-nulos.

$$\int e^{au} \operatorname{sen} nu\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2}(a \operatorname{sen} nu - n \cos nu) + C \tag{3}$$

$$\int e^{au} \cos nu\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2}(a \cos nu + n \operatorname{sen} nu) + C \tag{4}$$

Integrais da forma daquelas em (3) e (4) são freqüentes em problemas envolvendo circuitos elétricos como nos Exercícios 55-57, pertencentes à Secção Suplementar 7.8.

EXERCÍCIOS 9.1

Nos Exercícios de 1 a 24, calcule a integral indefinida.

1. $\int xe^{3x}\, dx$
2. $\int x \cos 2x\, dx$
3. $\int x \sec x \operatorname{tg} x\, dx$
4. $\int x\, 3^x\, dx$
5. $\int \ln x\, dx$
6. $\int \operatorname{sen}^{-1} w\, dw$
7. $\int (\ln x)^2\, dx$
8. $\int x \sec^2 x\, dx$
9. $\int x \operatorname{tg}^{-1} x\, dx$
10. $\int x^2 \ln x\, dx$
11. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\, dx$
12. $\int x^2 \operatorname{sen} 3x\, dx$
13. $\int \operatorname{sen} x \ln(\cos x)\, dx$
14. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$
15. $\int e^x \cos x\, dx$
16. $\int x^5 e^{x^2}\, dx$
17. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$
18. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{e^x}\, dx$
19. $\int x^2 \operatorname{senh} x\, dx$
20. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^x}}\, dx$
21. $\int \frac{\operatorname{cotg}^{-1} \sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, dz$
22. $\int \cos^{-1} 2x\, dx$
23. $\int \cos \sqrt{x}\, dx$
24. $\int \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{x}\, dx$

Nos Exercícios de 25 a 34, calcule a integral definida.

25. $\int_0^2 x^2 3^x\, dx$
26. $\int_{-1}^{2} \ln(x + 2)\, dx$
27. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} 3x \cos x\, dx$
28. $\int_0^{\pi^2/2} \cos \sqrt{2x}\, dx$
29. $\int_0^2 xe^{2x}\, dx$
30. $\int_{-\pi}^{\pi} z^2 \cos 2z\, dz$
31. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \operatorname{sen} 4x\, dx$
32. $\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$
33. $\int_2^4 \sec^{-1} \sqrt{t}\, dt$
34. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} x \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x\, dx$

35. Ache a área da região limitada pela curva $y = \ln x$, pelo eixo x e pela reta $x = e^2$.

36. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 35 em torno do eixo x.

37. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 35 em torno do eixo y.

38. Ache a área da região limitada pela curva $y = x \operatorname{cosec}^2 x$, pelo eixo x e pelas retas $x = \frac{1}{6}\pi$ e $x = \frac{1}{4}\pi$.

39. Ache a área da região limitada pela curva $y = 2xe^{-x/2}$, pelo eixo x e pela reta $x = 4$.

40. Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x da região do Exercício 39.

41. A densidade linear de uma barra num ponto a x m de um extremo é $2e^{-x}$ kg/m. Se a barra tiver 6 m de comprimento, ache a massa e o centro de massa da barra.

42. Ache o centróide da região limitada pela curva $y = e^x$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 3$.

43. Ache o centróide da região no primeiro quadrante, limitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e pelo eixo y.

44. A região no primeiro quadrante, limitada pela curva $y = \cos x$ e pelas retas $y = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$, gira em torno da da reta $x = \frac{\pi}{2}$. Ache o volume do sólido gerado.

45. Um tanque cheio de água tem a forma de um sólido de revolução formado quando a região limitada pela curva $y = e^{-x}$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 4$ gira em torno do eixo x. Ache o trabalho realizado ao bombear toda a água para a borda do tanque. A distância é medida em metros. Tome o eixo x vertical e orientado para baixo.

46. Uma partícula move-se ao longo de uma reta sendo a distância da partícula a partir da origem em t s igual a s m. Se v m/s for a velocidade em t s, $s = 0$ quando $t = 0$, e $v \cdot s = t \operatorname{sen} t$, ache s em termos de t e também s quando $t = \frac{\pi}{2}$.

47. A função custo marginal é C' e $C'(x) = \ln x$, onde $x > 1$. Ache a função custo total se $C(x)$ for o custo total da produção de x unidades e $C(1) = 5$.

48. Um fabricante descobriu que se $100x$ unidades de uma mercadoria forem produzidas por semana, o custo marginal será determinado por $x2^{x/2}$, e o rendimento marginal será determinado por $8 \cdot 2^{-x/2}$, onde o custo de produção e o rendimento são em milhares. Se os custos fixados semanalmen-

te chegam a $ 2.000, ache o lucro semanal máximo que poderá ser obtido.

49. (a) Deduza a seguinte fórmula, onde r é um número real qualquer.

$$\int x^r \ln x\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{r+1}}{r+1}\ln x - \dfrac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C & \text{se } r \neq -1 \\ \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C & \text{se } r = -1 \end{cases}$$

(b) Use a fórmula da parte (a) para calcular $\int x^3 \ln x\, dx$.

50. (a) Deduza a seguinte fórmula, onde r e q são números reais quaisquer:

$$\int x^r(\ln x)^q\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{r+1}(\ln x)^q}{r+1} - \dfrac{q}{r+1}\displaystyle\int x^r(\ln x)^{q-1}\, dx & \text{se } r \neq -1 \\ \dfrac{(\ln x)^{q+1}}{q+1} + C & \text{se } r = -1 \text{ e } q \neq -1 \end{cases}$$

(b) Use a fórmula deduzida em (a) para calcular $\int x^4(\ln x)^2\, dx$

51. (a) Mostre que se $m \geqslant 2$ e m for inteiro,

$$\int \sec^m x\, dx = \frac{\sec^{m-2} x \operatorname{tg} x}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \sec^{m-2} x\, dx$$

(b) Use a fórmula da parte (a) para calcular $\int \sec^6 x\, dx$.

52. (a) Deduza a seguinte fórmula, onde r é qualquer número real:

$$\int x^r e^x\, dx = x^r e^x - r\int x^{r-1}e^x\, dx$$

(b) Use a fórmula derivada em (a) para encontrar $\int x^4 e^x\, dx$.

53. Deduza a fórmula (3).

54. Deduza a fórmula (4).

Os Exercícios de 55 a 57 referem-se à Secção Suplementar 7.8.

55. Um circuito elétrico tem uma força eletromotriz de 10 sen 10 t volts em t s e um resistor de 3 ohms, além de um indutor de 1 henry ligado em série. Se a corrente for i ampères em t s e $i = 0$, quando $t = 0$, encontre (a) i quando $t = 0{,}1$ e (b) i quando $t = 3$.

56. Um circuito elétrico tem uma força eletromotriz de 100 sen 200 t volts em t s e um resistor de 10 ohms, além de um indutor de 0,1 henry ligado em série. (a) Se a corrente for i ampères em t s e $i = 0$ quando $t = 0$, expresse i como uma função de t. (b) Dê um valor aproximado de i para valores maiores de t em termos de funções seno e co-seno.

57. Faça o Exercício 56 se o circuito elétrico tiver uma força eletromotriz de 120 sen $120\pi t$ volts e um resistor de 100 ohms; as demais condições são as mesmas.

9.2 INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DE SENO E CO-SENO

Vamos considerar quatro casos de integrais indefinidas envolvendo potências de seno e co-seno, conforme as potências sejam pares ou ímpares.

Caso 1: $\int \operatorname{sen}^n u\, du$ ou $\int \cos^n u\, du$, onde n é um inteiro ímpar.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1**

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x(\cos x\, dx) \\ &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x\, dx) \\ &= \int \cos x\, dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx \qquad (1) \end{aligned}$$

Para a segunda integral do lado direito de (1) observe que sendo $d(\operatorname{sen} x) = \cos x\, dx$, temos

$$\int \operatorname{sen}^2 x(\cos x\, dx) = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C_1$$

Como a primeira integral do lado direito de (1) é sen $x + C_2$,

$$\int \cos^3 x\, dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$ ◀

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x\,dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx\\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx\\ &= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x\,dx\\ &= \int \operatorname{sen} x\,dx - 2\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx + \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\,dx\\ &= -\cos x + 2\int \cos^2 x(-\operatorname{sen} x\,dx) - \int \cos^4 x(-\operatorname{sen} x\,dx)\\ &= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + C\end{aligned}$$

Caso 2: $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx$, onde pelo menos um dos expoentes é ímpar.

A solução desse caso é semelhante à do Caso 1.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2**

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x(\operatorname{sen} x\,dx)\\ &= \int (1 - \cos^2 x)\cos^4 x(\operatorname{sen} x\,dx)\\ &= \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\,dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x\,dx\\ &= -\tfrac{1}{5}\cos^5 x + \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C\end{aligned}$$ ◀

Caso 3: $\int \operatorname{sen}^n u\,du$ e $\int \cos^n u\,du$, onde n é um inteiro par.

O método usado no Caso 1 e no Caso 2 não funciona neste caso. Usaremos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 3**

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C\end{aligned}$$ ◀

Caso 4: $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx$, ambos m e n são pares.

A solução deste caso é semelhante à do Caso 3.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx
&= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x \, dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \, dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x \, dx \\
&= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8}\int (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x \, dx \\
&= \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} - \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{1}{8}\int \cos 2x \, dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x \, dx \\
&= \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C \\
&= \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx$$

Solução Se usarmos a identidade $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$, teremos

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^4 2x \, dx \\
&= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{64}\int dx - \frac{1}{32}\int \cos 4x \, dx + \frac{1}{64}\int \cos^2 4x \, dx \\
&= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{1}{64}\int \frac{1 + \cos 8x}{2} dx \\
&= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C \\
&= \frac{3x}{128} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Ache o centróide da região no primeiro quadrante, à esquerda da reta $x = \frac{\pi}{2}$ e limitada pela curva $y = \operatorname{sen} x$, pelo eixo x e pela reta $x = \frac{\pi}{2}$.

Solução Vamos usar os símbolos A, M_x, M_y, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ definidos na Secção 6.4. A região e o i-ésimo elemento retangular estão na Figura 1. Primeiro vamos calcular a área da região.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} \gamma_i \, \Delta_i x \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\cos x \Big]_0^{\pi/2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aplicamos a Definição 6.4.2 para calcular M_x e M_y. Para calcular M_y, usaremos integração por partes com $u = x$ e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$.

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen} \gamma_i]^2 \, \Delta_i x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \tfrac{1}{4} \Big[x - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{2}\pi] \\ &= \tfrac{1}{8}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \operatorname{sen} \gamma_i \, \Delta_i x \\ &= \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -x \cos x \Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \operatorname{sen} x \Big]_0^{\pi/2} \\ &= -\tfrac{1}{2}\pi \cos \tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

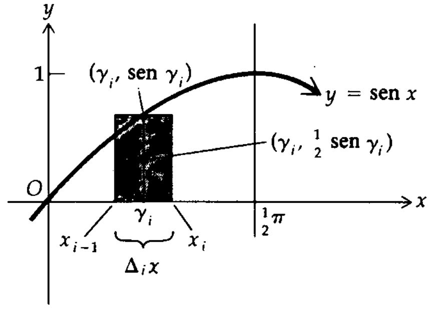

y
1
$(\gamma_i, \operatorname{sen} \gamma_i)$
$y = \operatorname{sen} x$
$(\gamma_i, \frac{1}{2} \operatorname{sen} \gamma_i)$
O
x
γ_i
x_{i-1}
x_i
$\Delta_i x$
$\frac{1}{2}\pi$

FIGURA 1

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{A} & \bar{y} &= \frac{M_x}{A} \\ &= \frac{1}{1} & &= \frac{\frac{1}{8}\pi}{1} \\ &= 1 & &= \tfrac{1}{8}\pi \end{aligned}$$

Assim, o centróide está no ponto $(1, \frac{1}{8}\pi)$.

O próximo exemplo envolve um outro tipo de integral contendo um produto de seno e co-seno.

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \, dx$$

Solução Vamos usar a seguinte identidade trigonométrica:

$$\text{sen } mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\text{ sen}(m-n)x + \tfrac{1}{2}\text{ sen}(m+n)x$$

$$\begin{aligned}\int \text{sen } 3x \cos 2x\, dx &= \int (\tfrac{1}{2}\text{ sen } x + \tfrac{1}{2}\text{ sen } 5x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int \text{sen } x\, dx + \tfrac{1}{2}\int \text{sen } 5x\, dx \\ &= -\tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{10}\cos 5x + C\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 9.2

Nos Exercícios de 1 a 24, calcule a integral indefinida.

1. $\int \text{sen}^4 x \cos x\, dx$
2. $\int \text{sen}^5 x \cos x\, dx$
3. $\int \cos^3 4x \text{ sen } 4x\, dx$
4. $\int \cos^6 \tfrac{1}{2}x \text{ sen } \tfrac{1}{2}x\, dx$
5. $\int \text{sen}^3 x\, dx$
6. $\int \text{sen}^2 3x\, dx$
7. $\int \text{sen}^4 z\, dz$
8. $\int \cos^5 x\, dx$
9. $\int \cos^2 \tfrac{1}{2}x\, dx$
10. $\int \text{sen}^3 x \cos^3 x\, dx$
11. $\int \text{sen}^2 x \cos^3 x\, dx$
12. $\int \cos^6 x\, dx$
13. $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$
14. $\int \text{sen}^2 2t \cos^4 2t\, dt$
15. $\int \text{sen}^2 3t \cos^2 3t\, dt$
16. $\int \sqrt{\cos z}\, \text{sen}^3 z\, dz$
17. $\int \dfrac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\text{sen } 3x}}\, dx$
18. $\int \text{sen}^3 \tfrac{1}{2}y \cos^2 \tfrac{1}{2}y\, dy$
19. $\int \cos 4x \cos 3x\, dx$
20. $\int \text{sen } 2x \cos 4x\, dx$
21. $\int \text{sen } 3y \cos 5y\, dy$
22. $\int \cos t \cos 3t\, dt$
23. $\int (\text{sen } 3t - \text{sen } 2t)^2\, dt$
24. $\int \text{sen } x \text{ sen } 3x \text{ sen } 5x\, dx$

Nos Exercícios de 25 a 32, calcule a integral definida.

25. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$
26. $\int_0^1 \text{sen}^3 \tfrac{1}{2}\pi t\, dt$
27. $\int_0^1 \text{sen}^4 \tfrac{1}{2}\pi x\, dx$
28. $\int_0^{\pi/3} \text{sen}^3 t \cos^2 t\, dt$
29. $\int_0^1 \text{sen}^2 \pi t \cos^2 \pi t\, dt$
30. $\int_0^{\pi/6} \text{sen } 2x \cos 4x\, dx$
31. $\int_0^{\pi/8} \text{sen } 3x \cos 5x\, dx$
32. $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}x \cos^2 \tfrac{1}{2}x\, dx$

33. Calcule $\int 2 \text{ sen } x \cos x\, dx$ por três métodos: (a) fazendo a substituição $u = \text{sen } x$; (b) fazendo a substituição $u = \cos x$; (c) usando a identidade de $2 \text{ sen } x \cos x = \text{sen } 2x$. Explique a aparência diferente das respostas obtidas em (a), (b) e (c).

34. Se n for um inteiro positivo qualquer, prove que

$$\int_0^\pi \text{sen}^2 nx\, dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

35. Se n for um inteiro positivo ímpar, prove que

$$\int_0^\pi \cos^n x\, dx = 0$$

Nos Exercícios de 36 a 38, m e n são inteiros positivos; mostre que a fórmula dada é verdadeira.

36. $\int_{-1}^1 \cos n\pi x \cos m\pi x\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$

37. $\int_{-1}^1 \cos n\pi x \text{ sen } m\pi x\, dx = 0$

38. $\int_{-1}^1 \text{sen } n\pi x \text{ sen } m\pi x\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$

39. Ache a área da região limitada pela curva $y = \text{sen}^2 x$ e pelo eixo x de $x = 0$ a $x = \pi$.

40. Ache o volume do sólido gerado pela rotação de um arco da senóide em torno do eixo x.

41. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 39 em torno do eixo x.

42. A região no primeiro quadrante limitada pela curva $y = \cos x$ e pelas retas $y = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$ gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.

43. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 39 em torno da reta $y = 1$.

44. A região limitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido de revolução gerado.

45. Ache o centróide da região de $x = 1$ a $x = \frac{\pi}{2}$, limitada pela curva $y = \cos x$ e pelo eixo x.

46. Ache o centróide da região descrita no Exercício 44.

47. Prove

$$\int \text{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} u\, du$$

se n for um inteiro positivo maior que 1.

48. Prove

$$\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u\, du$$

se n for um inteiro positivo maior que 1.

O Exercício 49 refere-se à Secção Suplementar 6.7.

49. A face de um dique tem a forma de um arco da curva $y = -100 \cos \frac{1}{200}\pi x$, $x \in [-100, 100]$, e a superfície da água chega até a borda do dique. Ache a força decorrente da pressão da água na face do dique se a distância for medida em metros.

9.3 INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DA TANGENTE, CO-TANGENTE, SECANTE E CO-SECANTE

Vamos lembrar as seguintes fórmulas envolvendo tangente, co-tangente, secante e co-secante:

$$\int \operatorname{tg} u\, du = \ln|\sec u| + C \qquad \int \operatorname{cotg} u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C \qquad \int \operatorname{cosec} u\, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C$$

$$\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C \qquad \int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\operatorname{cotg} u + C$$

$$\int \sec u \operatorname{tg} u\, du = \sec u + C \qquad \int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\, du = -\operatorname{cosec} u + C$$

Com essas fórmulas e as identidades trigonométricas

$$1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$$

podemos calcular integrais da forma

$$\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\, du \quad \text{e} \quad \int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\, du \tag{1}$$

onde m e n são inteiros não-negativos.

▶ ILUSTRAÇÃO 1

(a)
$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 x\, dx &= \int (\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \sec^2 x\, dx - \int dx \\ &= \operatorname{tg} x - x + C\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx &= \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx - \int dx \\ &= -\operatorname{cotg} x - x + C\end{aligned}$$

◀

Vamos distinguir agora os vários casos das integrais da forma (1).

Caso 1: $\int \operatorname{tg}^n u\, du$ ou $\int \operatorname{cotg}^n u\, du$ onde n é um inteiro positivo.

Escrevemos

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^n u &= \operatorname{tg}^{n-2} u \operatorname{tg}^2 u \\ &= \operatorname{tg}^{n-2} u(\sec^2 u - 1)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\operatorname{cotg}^n u &= \operatorname{cotg}^{n-2} u \operatorname{cotg}^2 u \\ &= \operatorname{cotg}^{n-2} u(\operatorname{cosec}^2 u - 1)\end{aligned}$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3 x\,dx &= \int \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)\,dx\\ &= \int \operatorname{tg} x \sec^2 x\,dx - \int \operatorname{tg} x\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \operatorname{cotg}^4 3x\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cotg}^4 3x\,dx &= \int \operatorname{cotg}^2 3x(\operatorname{cosec}^2 3x - 1)\,dx\\ &= \int \operatorname{cotg}^2 3x \operatorname{cosec}^2 3x\,dx - \int \operatorname{cotg}^2 3x\,dx\\ &= \tfrac{1}{9}(-\operatorname{cotg}^3 3x) - \int (\operatorname{cosec}^2 3x - 1)\,dx\\ &= -\tfrac{1}{9}\operatorname{cotg}^3 3x + \tfrac{1}{3}\operatorname{cotg} 3x + x + C\end{aligned}$$

Caso 2: $\int \sec^n u\,du$ ou $\int \operatorname{cosec}^n u\,du$, onde n é um inteiro par positivo. Escrevemos

$$\begin{aligned}\sec^n u &= \sec^{n-2} u \sec^2 u & \operatorname{cosec}^n u &= \operatorname{cosec}^{n-2} u \operatorname{cosec}^2 u\\ &= (\operatorname{tg}^2 u + 1)^{(n-2)/2}\sec^2 u & &= (\operatorname{cotg}^2 u + 1)^{(n-2)/2}\operatorname{cosec}^2 u\end{aligned}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \operatorname{cosec}^6 x\,dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cosec}^6 x\,dx &= \int (\operatorname{cotg}^2 x + 1)^2 \operatorname{cosec}^2 x\,dx\\ &= \int \operatorname{cotg}^4 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx + 2\int \operatorname{cotg}^2 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx\\ &= -\tfrac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x - \tfrac{2}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \operatorname{cotg} x + C\end{aligned}$$

Caso 3: $\int \sec^n u\,du$ ou $\int \operatorname{cosec}^n u\,du$, onde n é um inteiro ímpar positivo.

Para integrar portências ímpares de secante e co-secante, usaremos integração por partes. O procedimento está ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \sec^3 x\,dx$$

Solução Seja $u = \sec x$ e $dv = \sec^2 x\,dx$. Então

$$du = \sec x \operatorname{tg} x\,dx \quad \text{e} \quad v = \operatorname{tg} x$$

Logo,

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

Somando $\int \sec^3 x\, dx$ a ambos os membros, obtemos

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + 2C$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

Caso 4: $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\, du$ ou $\int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\, du$, onde n é um inteiro par positivo.

Esse caso está ilustrado pelo exemplo a seguir.

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x\, dx &= \int \operatorname{tg}^5 x(\operatorname{tg}^2 x + 1)\sec^2 x\, dx\\ &= \int \operatorname{tg}^7 x \sec^2 x\, dx + \int \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x\, dx\\ &= \tfrac{1}{8}\operatorname{tg}^8 x + \tfrac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x + C\end{aligned}$$

Caso 5: $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\, du$ ou $\int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\, du$, onde m é um inteiro ímpar positivo.

O próximo exemplo ilustra esse caso.

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x\, dx &= \int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x \sec x \operatorname{tg} x\, dx\\ &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x(\sec x \operatorname{tg} x\, dx)\\ &= \int \sec^{10} x(\sec x \operatorname{tg} x\, dx) - 2\int \sec^8 x(\sec x \operatorname{tg} x\, dx) + \int \sec^6 x(\sec x \operatorname{tg} x\, dx)\\ &= \tfrac{1}{11}\sec^{11} x - \tfrac{2}{9}\sec^9 x + \tfrac{1}{7}\sec^7 x + C\end{aligned}$$

Caso 6: $\int \text{tg}^m u \sec^n u\, du$ ou $\int \text{cotg}^m u \,\text{cosec}^n u\, du$, onde m é um inteiro par positivo e n é um inteiro ímpar positivo.

O integrando pode ser expresso em termos de potências ímpares de secante ou co-secante. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\int \text{tg}^2 x \sec^3 x\, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x\, dx\\ &= \int \sec^5 x\, dx - \int \sec^3 x\, dx\end{aligned}$$

Para calcular cada uma dessas integrais usamos integração por partes, conforme foi indicado no Caso 3.

EXERCÍCIOS 9.3

Nos Exercícios de 1 a 30, calcule a integral indefinida.

1. $\int \text{tg}^2 5x\, dx$
2. $\int \text{cotg}^2 4t\, dt$
3. $\int x\, \text{cotg}^2 2x^2\, dx$
4. $\int e^x\, \text{tg}^2(e^x)\, dx$
5. $\int \text{cotg}^3 t\, dt$
6. $\int \text{tg}^4 x\, dx$
7. $\int \text{tg}^6 3x\, dx$
8. $\int \text{cotg}^5 2x\, dx$
9. $\int \sec^4 x\, dx$
10. $\int \text{cosec}^4 x\, dx$
11. $\int \text{cosec}^3 x\, dx$
12. $\int \sec^5 x\, dx$
13. $\int e^x\, \text{tg}^4(e^x)\, dx$
14. $\int \dfrac{\sec^4(\ln x)}{x}\, dx$
15. $\int \text{tg}^6 x \sec^4 x\, dx$
16. $\int \text{tg}^5 x \sec^3 x\, dx$
17. $\int \text{cotg}^2 3x\, \text{cosec}^4 3x\, dx$
18. $\int (\sec 5x + \text{cosec}\, 5x)^2\, dx$
19. $\int (\text{tg}\, 2x + \text{cotg}\, 2x)^2\, dx$
20. $\int \dfrac{dx}{1 + \cos x}$
21. $\int \dfrac{2 \,\text{sen}\, w - 1}{\cos^2 w}\, dw$
22. $\int \dfrac{\text{tg}^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
23. $\int \text{tg}^5 3x\, dx$
24. $\int \dfrac{\text{tg}^4 y}{\sec^5 y}\, dy$
25. $\int \dfrac{du}{1 + \sec \frac{1}{2}u}$
26. $\int \dfrac{\text{cosec}^4 x}{\text{cotg}^2 x}\, dx$
27. $\int \dfrac{\sec^3 x}{\text{tg}^4 x}\, dx$
28. $\int \dfrac{\text{sen}^2 \pi x}{\cos^6 \pi x}\, dx$
29. $\int \dfrac{\text{tg}^3(\ln x) \sec^6(\ln x)}{x}\, dx$
30. $\int \dfrac{\sec^4 w}{\sqrt{\text{tg}\, w}}\, dw$

Nos Exercícios de 31 a 36, calcule a integral definida.

31. $\int_{\pi/16}^{\pi/12} \text{tg}^3 4x\, dx$
32. $\int_{\pi/8}^{\pi/6} 3 \sec^4 2t\, dt$
33. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^6 x\, dx$
34. $\int_0^{\pi/3} \dfrac{\text{tg}^3 x}{\sec x}\, dx$
35. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{\cos^4 t}{\text{sen}^6 t}\, dt$
36. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \text{cotg}^3 w\, dw$
37. Ache a área da região limitada pela curva $y = \text{tg}^2 x$, pelo eixo x e pela reta $x = \frac{1}{4}\pi$.
38. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = 3\, \text{cosec}^3 x$, pelo eixo x e pelas retas $x = \frac{1}{6}\pi$ e $x = \frac{1}{2}\pi$ em torno do eixo x.
39. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = \sec^2 x$, pelos eixos e pela reta $x = \frac{1}{4}\pi$ em torno do eixo x.
40. Prove: $\int \text{cotg}\, x\, \text{cosec}^n x\, dx = -\dfrac{\text{cosec}^n x}{n} + C$, se $n \neq 0$.
41. Prove: $\int \text{tg}^n x\, dx = \dfrac{\text{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \text{tg}^{n-2} x\, dx$, se n for um inteiro positivo maior do que 1.
42. Deduza uma fórmula similar àquela do Exercício 40 para $\int \text{tg}\, x \sec^n x\, dx$, se $n \neq 0$.
43. Deduza uma fórmula similar àquela do Exercício 41 para $\int \text{cotg}^n x\, dx$, se n for um inteiro positivo maior do que 1.

9.4 INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Se o integrando contiver expressões do tipo $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$, ou $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde $a > 0$, em geral é possível efetuar a integração através de uma substituição trigonométrica que levará a uma integral envolvendo funções trigonométricas. Vamos considerar cada forma como um caso separado.

Caso 1: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, onde $a > 0$.

Vamos introduzir uma nova variável θ tomando $u = a \operatorname{sen} \theta$, onde

$$0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant 0 \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant \theta < 0 \quad \text{se } u < 0$$

Então $du = a \cos \theta \, d\theta$, e

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} \\ &= a\sqrt{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

Como $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $\cos \theta \geqslant 0$. Então $\sqrt{\cos^2 \theta} = \cos \theta$, e

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$$

Como $\operatorname{sen} \theta = u/a$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$,

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a}$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \, dx$$

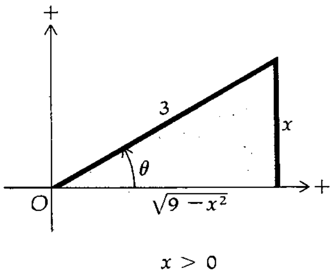


FIGURA 1

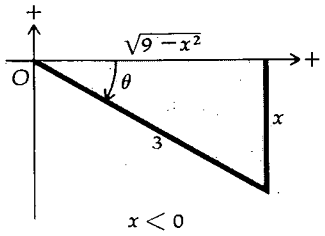


FIGURA 2

Solução Seja $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, onde $0 < \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$ se $x > 0$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta < 0$ se $x < 0$. Então $dx = 3 \cos \theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned} \sqrt{9 - x^2} &= \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= 3\sqrt{\cos^2 \theta} \\ &= 3 \cos \theta \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \, dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{9 \operatorname{sen}^2 \theta} (3 \cos \theta \, d\theta) \\ &= \int \operatorname{cotg}^2 \theta \, d\theta \\ &= \int (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) \, d\theta \\ &= -\operatorname{cotg} \theta - \theta + C \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}x$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{3}x$. Para encontrar $\operatorname{cotg} \theta$, consulte as Figuras 1 (para $x > 0$) e 2 (para $x < 0$). Observe que em ambos os casos $\operatorname{cotg} \theta = \sqrt{9 - x^2}/x$. Logo,

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} \, dx = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{3} + C$$

Caso 2: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, onde $a > 0$. Introduzimos uma nova variável θ fazendo $u = a \operatorname{tg} \theta$, onde

$$0 \leqslant \theta < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant 0 \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < 0 \quad \text{se } u < 0$$

Então $du = a \sec^2 \theta \, d\theta$, e

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + u^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \\ &= a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \\ &= a\sqrt{\sec^2 \theta}\end{aligned}$$

Como $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, $\sec \theta \geqslant 1$. Assim $\sqrt{\sec^2 \theta} = \sec \theta$, e

$$\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$$

Como $\operatorname{tg} \theta = u/a$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$,

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{a}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \sqrt{x^2 + 5} \, dx$$

Solução Substituímos $x = \sqrt{5} \operatorname{tg} \theta$, onde $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x \geqslant 0$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 0$. Então $dx = \sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 5} &= \sqrt{5 \operatorname{tg}^2 \theta + 5} \\ &= \sqrt{5}\sqrt{\sec^2 \theta} \\ &= \sqrt{5} \sec \theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + 5} \, dx &= \int \sqrt{5} \sec \theta (\sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta) \\ &= 5 \int \sec^3 \theta \, d\theta\end{aligned}$$

Usando o resultado do Exemplo 4 da Secção 9.3, temos

$$\int \sqrt{x^2 + 5} \, dx = \tfrac{5}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \tfrac{5}{2} \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C$$

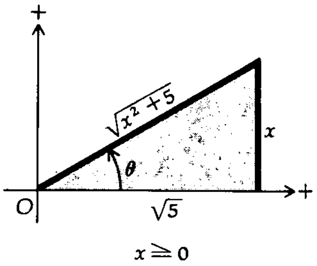


FIGURA 3

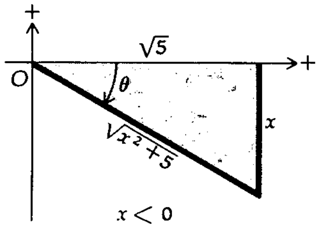


FIGURA 4

Determinamos $\sec \theta$ das Figuras 3 (para $x \geqslant 0$) e 4 (para $x < 0$), onde $\operatorname{tg} \theta = x/\sqrt{5}$. Em ambos os casos vemos que $\sec \theta = \sqrt{x^2 + 5}/\sqrt{5}$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + 5} \, dx &= \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}}\right| + C \\ &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 5} + \tfrac{5}{2} \ln|\sqrt{x^2 + 5} + x| - \tfrac{5}{2} \ln \sqrt{5} + C \\ &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 5} + \tfrac{5}{2} \ln(\sqrt{x^2 + 5} + x) + C_1\end{aligned}$$

Observe que substituímos $-\frac{5}{2} \ln \sqrt{5} + C$ pela constante arbitrária C_1. Além disso, como $\sqrt{x^2 + 5} + x > 0$, retiramos as barras de valor absoluto.

Caso 3: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde $a > 0$. Introduzimos uma nova variável fazendo $u = a \sec \theta$, onde

$$0 \leqslant \theta < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant a \quad \text{e} \quad \pi \leqslant \theta < \tfrac{3}{2}\pi \quad \text{se } u \leqslant -a$$

Então $du = a \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{u^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2}\\ &= \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)}\\ &= a\sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta}\end{aligned}$$

Como $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$ ou $\pi \leqslant \theta < \frac{3}{2}\pi$, $\operatorname{tg} \theta \geqslant 0$. Assim, $\sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta} = \operatorname{tg} \theta$, e temos

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a \operatorname{tg} \theta$$

Como $\sec \theta = u/a$ e θ está em $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$,

$$\theta = \sec^{-1} \frac{u}{a}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}}$$

Solução Seja $x = 3 \sec \theta$, onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 3$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -3$. Então $dx = 3 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 9} &= \sqrt{9 \sec^2 \theta - 9}\\ &= 3\sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta}\\ &= 3 \operatorname{tg} \theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}} &= \int \frac{3 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta}{27 \sec^3 \theta \cdot 3 \operatorname{tg} \theta}\\ &= \tfrac{1}{27} \int \cos^2 \theta \, d\theta\\ &= \tfrac{1}{54} \int (1 + \cos 2\theta) \, d\theta\\ &= \tfrac{1}{54}(\theta + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta) + C\\ &= \tfrac{1}{54}(\theta + \operatorname{sen}\theta \cos \theta) + C\end{aligned}$$

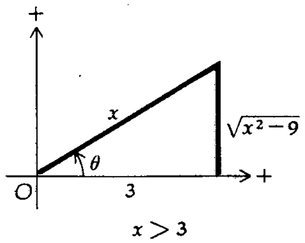


FIGURA 5

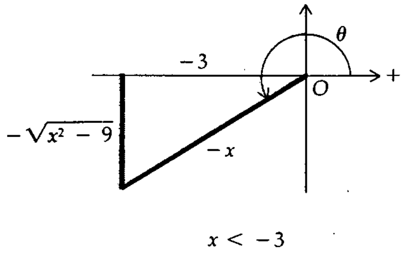


FIGURA 6

Como $\sec \theta = \frac{1}{3}x$ e θ está em $(0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $\theta = \sec^{-1} \frac{1}{3}x$. Quando $x > 3$, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, e obtemos $\operatorname{sen} \theta$ e $\cos \theta$ da Figura 5. Quando $x < -3$, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$, e obtemos $\operatorname{sen} \theta$ e $\cos \theta$ da Figura 6. Em ambos os casos $\operatorname{sen} \theta = \sqrt{x^2 - 9}/x$ e $\cos \theta = 3/x$. Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 9}} &= \frac{1}{54}\left(\sec^{-1} \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} \cdot \frac{3}{x}\right) + C\\ &= \frac{1}{54} \sec^{-1} \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{18x^2} + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$$

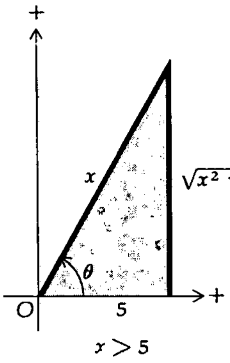


FIGURA 7

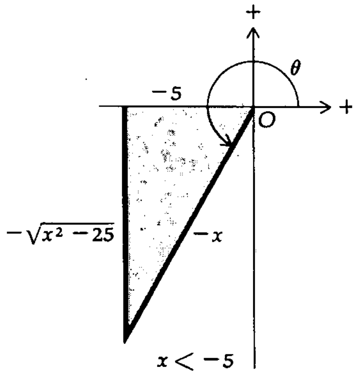


FIGURA 8

Solução Seja $x = 5 \sec \theta$, onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 5$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -5$. Então $dx = 5 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 25} &= \sqrt{25 \sec^2 \theta - 25} \\ &= 5\sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta} \\ &= 5 \operatorname{tg} \theta\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} &= \int \frac{5 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta}{5 \operatorname{tg} \theta} \\ &= \int \sec \theta \, d\theta \\ &= \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C\end{aligned}$$

Para encontrar $\operatorname{tg} \theta$, consulte a Figura 7 (para $x > 5$) e a Figura 8 (para $x < -5$). Em ambos os casos, $\sec \theta = \frac{1}{5}x$ e $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{5}\sqrt{x^2 - 25}$. Temos, então,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} &= \ln\left|\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5}\right| + C \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 - 25}| - \ln 5 + C \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 - 25}| + C_1\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int_1^2 \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}}$$

Solução Para calcular a integral indefinida $\int dx/(6 - x^2)^{3/2}$ fazemos a substituição $x = \sqrt{6} \operatorname{sen} \theta$. Nesse caso, podemos restringir θ ao intervalo $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, pois estamos calculando uma integral definida para a qual $x > 0$, uma vez que x está em $[1, 2]$. Assim, $x = \sqrt{6} \operatorname{sen} \theta$, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, e $dx = \sqrt{6} \cos \theta \, d\theta$. Além disso,

$$\begin{aligned}(6 - x^2)^{3/2} &= (6 - 6 \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2} \\ &= 6\sqrt{6}(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2} \\ &= 6\sqrt{6}(\cos^2 \theta)^{3/2} \\ &= 6\sqrt{6} \cos^3 \theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} &= \int \frac{\sqrt{6} \cos \theta \, d\theta}{6\sqrt{6} \cos^3 \theta} \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{6} \int \sec^2 \theta \, d\theta \\ &= \tfrac{1}{6} \operatorname{tg} \theta + C\end{aligned}$$

Encontramos tg θ da Figura 9, na qual sen $\theta = x/\sqrt{6}$ e $0 < \theta \frac{1}{2}\pi$. Assim, tg $\theta = x/\sqrt{6 - x^2}$, e portanto

$$\int \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{6\sqrt{6 - x^2}} + C$$

Logo,

$$\int_1^2 \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{6\sqrt{6 - x^2}}\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{5}}{30}$$

$$= \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}{30}$$

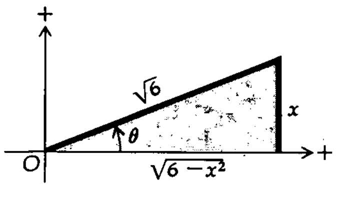


FIGURA 9

EXERCÍCIOS 9.4

Nos Exercícios de 1 a 24, calcule a integral indefinida.

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$

2. $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2}\, dx$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$

4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 6}}$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}}$

6. $\int \sqrt{1 - u^2}\, du$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

8. $\int \frac{dw}{w^2\sqrt{w^2 - 7}}$

9. $\int \frac{x^2\, dx}{(x^2 + 4)^2}$

10. $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^{3/2}}$

11. $\int \frac{dx}{(4x^2 - 9)^{3/2}}$

12. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{16 + x^2}}$

13. $\int \frac{2\, dt}{t\sqrt{t^4 + 25}}$

14. $\int \frac{x^3\, dx}{(25 - x^2)^2}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x + x^2}}$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

17. $\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{3/2}}$

18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 - 4}}$

19. $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{(4 - \operatorname{tg}^2 x)^{3/2}}$

20. $\int \frac{e^{-x}\, dx}{(9e^{-2x} + 1)^{3/2}}$

21. $\int \frac{\ln^3 w\, dw}{w\sqrt{\ln^2 w - 4}}$

22. $\int \frac{dz}{(z^2 - 6z + 18)^{3/2}}$

23. $\int \frac{e^t\, dt}{(e^{2t} + 8e^t + 7)^{3/2}}$

24. $\int \frac{\sqrt{16 - e^{2x}}}{e^x}\, dx$

Nos Exercícios de 25 a 32, calcule a integral definida.

25. $\int_0^2 \frac{x^3\, dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

26. $\int_0^4 \frac{dx}{(16 + x^2)^{3/2}}$

27. $\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 9}}$

28. $\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

29. $\int_4^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 4}}$

30. $\int_1^3 \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 + 3}}$

31. $\int_0^5 x^2\sqrt{25 - x^2}\, dx$

32. $\int_4^8 \frac{dw}{(w^2 - 4)^{3/2}}$

33. Use os métodos das secções anteriores (isto é, sem substituição trigonométrica) para calcular as integrais:

(a) $\int \frac{3\, dx}{x\sqrt{4x^2 - 9}}$ (b) $\int \frac{5x\, dx}{\sqrt{3 - 2x^2}}$

34. Ache a área da região limitada pela curva $y = \sqrt{x^2 - 9}/x^2$, pelo eixo x e pela reta $x = 5$.

35. Ache o comprimento do arco da curva $y = \ln x$ entre $x = 1$ e $x = 3$.

36. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região do Exercício 34 em torno do eixo y.

37. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região à direita do eixo y, limitada pela curva $y = x\sqrt[4]{9 - x^2}$ e pelo eixo x, em torno do eixo x.

38. Ache o comprimento do arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

39. Ache o centro de massa de uma barra com 8 cm se a densidade linear num ponto a x cm do extremo esquerdo é $\rho(x)$ g/cm onde $\rho(x) = \sqrt{x^2 + 36}$.

40. A densidade linear de uma barra num ponto a x m de um extremo é $\sqrt{9 + x^2}$ kg/m. Ache a massa e o centro de massa da barra, sabendo que ela tem 3 m.

41. Ache o centróide da região limitada pela curva $yx^2 = \sqrt{x^2 - 9}$, pelo eixo x e pela reta $x = 5$.

42. Use integração para obter πr^2 unidades de área para a área da região cercada por uma circunferência com r unidades de raio.

Os Exercícios de 43 a 45 referem-se à Secção Suplementar 6.7.

43. Uma tubulação horizontal cilíndrica tem um diâmetro interno de 4 m e tem uma extremidade fechada por um registro circular que se ajusta à tubulação. Se a tubulação contiver água até uma profundidade de 3 m, ache a força no registro, exercida pela pressão da água.

44. Uma comporta num canal de irrigação tem a forma de um segmento de círculo com 40 cm de raio. A parte superior da comporta é horizontal e 30 cm acima do ponto mais baixo. Se o nível da água estiver 20 cm acima da borda da comporta, ache a força sobre ela, exercida pela pressão da água.

45. Um tanque de automóvel tem a forma de um cilindro circular reto com 8 cm de raio, com um eixo horizontal. Ache a força total num extremo, quando a gasolina atingir 12 cm de profundidade, sabendo que a densidade da gasolina é ρ g/cm³.

9.5 INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS QUANDO O DENOMINADOR TEM SOMENTE FATORES LINEARES

Da definição de função racional, H será racional se $H(x) = P(x)/Q(x)$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios. Vimos previamente que se o grau do numerador não for menor do que o grau do denominador, temos uma fração imprópria e, nesse caso, dividimos o numerador pelo denominador até obter uma fração própria, isto é, uma fração cujo numerador tenha grau menor do que o grau do denominador. Por exemplo,

$$\frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} = x^2 - 6 + \frac{3x - 23}{x^2 - 4}$$

Assim, se quisermos integrar

$$\int \frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4}\,dx$$

o problema se reduz a integrar

$$\int (x^2 - 6)\,dx + \int \frac{3x - 23}{x^2 - 4}\,dx$$

Em geral, então, estamos interessados em calcular integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

onde o grau de $P(x)$ é menor do que o grau de $Q(x)$.

Para fazer isso, em geral é necessário escrever $P(x)/Q(x)$ como a soma de *frações parciais*. Os denominadores das frações parciais são obtidos fatorando $Q(x)$ num produto de fatores lineares e quadráticos onde os fatores quadráticos não têm zeros reais. Algumas vezes pode ser difícil encontrar esses fatores de $Q(x)$; porém, um teorema de Álgebra Avançada estabelece que teoricamente isso sempre pode ser feito.

Após fatorar $Q(x)$ num produto de fatores lineares e quadráticos, o método de determinar as frações parciais irá depender da natureza desses fatores. Vamos considerar separadamente os vários casos. Os resultados de Álgebra Avançada, que não estão provados aqui, fornecem a forma da fração parcial em cada caso.

Caso 1: Os fatores de $Q(x)$ são todos lineares e nenhum é repetido. Isto é,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\ldots(a_nx + b_n)$$

onde não existem dois fatores idênticos. Nesse caso escrevemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \ldots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

onde A_1, A_2, ..., A_n são constantes a serem determinadas.

Observe que na igualdade acima, em vez de = usamos $\equiv$ (que se lê idêntico), pois (1) é uma identidade.

A ilustração a seguir mostra como obter os valores de A_i.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Para calcular

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{x^3 - x^2 - 2x}$$

fatoramos o denominador obtendo

$$\frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x} \equiv \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}$$

Assim,

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \tag{1}$$

Como (1) é uma identidade, deve ser válida para todo x exceto 0, 2 e -1. De (1),

$$x - 1 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) \tag{2}$$

A igualdade (2) é uma identidade válida para todos os valores de x inclusive 0, 2 e -1. Queremos encontrar as constantes A, B e C. Substituindo x por 0 em (2), obtemos

$$-1 = -2A \quad \Leftrightarrow \quad A = \tfrac{1}{2}$$

Substituindo x por 2 em (2), obtemos

$$1 = 6B \quad \Leftrightarrow \quad B = \tfrac{1}{6}$$

Substituindo x por -1 em (2), obtemos

$$-2 = 3C \quad \Leftrightarrow \quad C = -\tfrac{2}{3}$$

Há um outro método para encontrar os valores de A, B e C. Se no segundo membro de (2) agruparmos os termos,

$$x - 1 \equiv (A + B + C)x^2 + (-A + B - 2C)x - 2A$$

Como temos uma identidade, os coeficientes do primeiro membro devem ser iguais aos coeficientes correspondentes do segundo membro. Assim,

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -A + B - 2C &= 1 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Resolvendo essas equações simultaneamente, obtemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$, e $C = -\frac{2}{3}$. Substituindo esses valores em (1), teremos

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{3}}{x+1}$$

Assim, a integral dada pode ser expressa da seguinte forma:

$$\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{6}\ln|x-2| - \tfrac{2}{3}\ln|x+1| + \tfrac{1}{6}\ln C$$

$$= \tfrac{1}{6}(3\ln|x| + \ln|x-2| - 4\ln|x+1| + \ln C)$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{Cx^3(x-2)}{(x+1)^4}\right| \qquad \blacktriangleleft$$

Caso 2: Os fatores de $Q(x)$ são todos lineares e alguns são repetidos.

Suponha que $(a_i x + b_i)$ seja um fator que se repete p vezes. Então, correspondendo a esse fator haverá a soma de p frações parciais

$$\frac{A_1}{(a_i x + b_i)^p} + \frac{A_2}{(a_i x + b_i)^{p-1}} + \dots + \frac{A_{p-1}}{(a_i x + b_i)^2} + \frac{A_p}{a_i x + b_i}$$

onde A_1, A_2, ..., A_p são constantes a serem determinadas.

O Exemplo 1 a seguir ilustra esse caso e o método de determinar cada A_i.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{(x^3-1)\,dx}{x^2(x-2)^3}$$

Solução A fração no integrando pode ser escrita como soma de frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{x-2} \tag{3}$$

Multiplicando ambos os membros de (3) pelo mínimo múltiplo comum, teremos

$$x^3 - 1 \equiv A(x-2)^3 + Bx(x-2)^3 + Cx^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2(x-2)^2 \tag{4}$$

Substituindo x por 2 em (4), obtemos

$$7 = 4C \quad \Leftrightarrow \quad C = \tfrac{7}{4}$$

Substituindo x por 0 em (4), obtemos

$$-1 = -8A \quad \Leftrightarrow \quad A = \tfrac{1}{8}$$

Substituímos esses valores de A e C em (4) e expandindo as potências dos binômios, teremos

$$x^3 - 1 \equiv \tfrac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + Bx(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + \tfrac{7}{4}x^2 + Dx^3 - 2Dx^2 + Ex^2(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^3 - 1 \equiv (B + E)x^4 + (\tfrac{1}{8} - 6B + D - 4E)x^3 + (-\tfrac{3}{4} + 12B + \tfrac{7}{4} - 2D + 4E)x^2 + (\tfrac{3}{2} - 8B)x - 1$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de x, obtemos

$$B + E = 0$$

$$\tfrac{1}{8} - 6B + D - 4E = 1$$

$$-\tfrac{3}{4} + 12B + \tfrac{7}{4} - 2D + 4E = 0$$

$$\tfrac{3}{2} - 8B = 0$$

Resolvendo, obtemos

$$B = \tfrac{3}{16} \qquad D = \tfrac{5}{4} \qquad E = -\tfrac{3}{16}$$

Logo, de (3)

$$\frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} \equiv \frac{\frac{1}{8}}{x^2} + \frac{\frac{3}{16}}{x} + \frac{\frac{7}{4}}{(x-2)^3} + \frac{\frac{5}{4}}{(x-2)^2} + \frac{-\frac{3}{16}}{x-2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3}\,dx &= \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x} + \frac{7}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^3} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x-2} \\ &= -\frac{1}{8x} + \frac{3}{16}\ln|x| - \frac{7}{8(x-2)^2} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{3}{16}\ln|x-2| + C \\ &= \frac{-11x^2 + 17x - 4}{8x(x-2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2}$$

Solução

$$\frac{1}{u^2 - a^2} \equiv \frac{A}{u-a} + \frac{B}{u+a}$$

Multiplicando por $(u - a)(u + a)$, obtemos

$$1 \equiv A(u + a) + B(u - a)$$

$$1 \equiv (A + B)u + Aa - Ba$$

Igualando os coeficientes, teremos

$$A + B = 0$$

$$Aa - Ba = 1$$

Resolvendo simultaneamente, obtemos

$$A = \frac{1}{2a} \qquad B = -\frac{1}{2a}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u^2 - a^2} &= \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u+a} \\ &= \frac{1}{2a}\ln|u-a| - \frac{1}{2a}\ln|u+a| + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C\end{aligned}$$

O tipo de integral do exemplo acima ocorre com uma freqüência tal que justifica ser dado como fórmula. Não é necessário memorizá-la pois trata-se de uma integração por frações parciais extremamente simples.

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C}$$

Se tivermos $\int du/(a^2 - u^2)$, escreveremos

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{a^2 - u^2} &= -\int \frac{du}{u^2 - a^2}\\ &= -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C\\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C\end{aligned}$$

Essa integração será também dada como fórmula.

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C}$$

Na Secção 7.7 discutimos o crescimento exponencial que ocorre quando a taxa de crescimento de uma grandeza é proporcional à quantidade da grandeza existente num dado instante. Obtemos o modelo matemático

$$f(t) = Be^{kt} \tag{5}$$

onde k é uma constante positiva, B unidades representa a quantidade presente inicialmente e $f(t)$ unidades é o quanto existirá após t unidades de tempo, onde $f(t) \geqslant B$ para $t \geqslant 0$. Também foi discutido na Secção 7.7 o crescimento limitado, o qual ocorre quando uma grandeza cresce a uma taxa proporcional à diferença entre um número positivo fixo A e o seu tamanho. Um modelo matemático que descreve a situação é

$$f(t) = A - Be^{-kt} \tag{6}$$

onde B e k são constantes positivas e $A - B \leqslant f(t) < A$ para $t \geqslant 0$. As Figuras 1 e 2 apresentam esboços dos gráficos de (5) e (6), respectivamente.

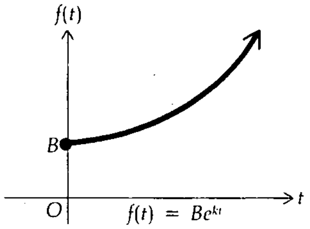


FIGURA 1

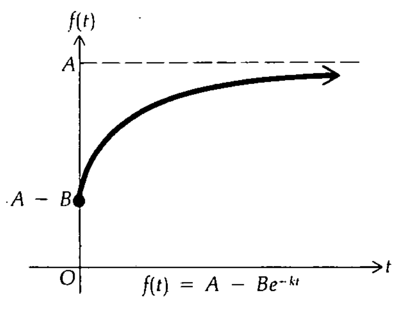


FIGURA 2

Considere agora o crescimento de uma população que é afetado pelo meio ambiente, o qual impõe uma limitação superior em seu tamanho. Por exemplo, espaço ou reprodução podem ser fatores limitados pelo meio ambiente. Em tais casos, o modelo matemático do tipo (5) não se aplica, pois a população não cresce além de um certo ponto. Um modelo que leva em conta os fatores ambientais é obtido quando uma quantidade está crescendo a uma taxa conjuntamente propocional a seu tamanho e à diferença entre um número A, positivo fixo, e seu tamanho. Assim, se y unidades for a quantidade de uma grandeza presente em t unidades de tempo,

$$\frac{dy}{dt} = ky(A - y) \tag{7}$$

onde k é uma constante positiva, e $0 < y < A$ para $t \geqslant 0$.

Para resolver (7) primeiro separamos as variáveis, obtendo

$$\frac{dy}{y(A - y)} = k\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y(A - y)} = k \int dt \tag{8}$$

Escrevendo o integrando à esquerda como soma de frações parciais, teremos

$$\frac{1}{y(A-y)}=\frac{1}{A}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{A-y}\right)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int\frac{dy}{y(A-y)}&=\frac{1}{A}\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{A-y}\right)dy\\&=\frac{1}{A}(\ln|y|-\ln|A-y|)+C_1\end{aligned}$$

Logo, de (8), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{A}(\ln|y|-\ln|A-y|)&=kt+C_2\\\ln|A-y|-\ln|y|&=-Akt-AC_2\\\ln\left|\frac{A-y}{y}\right|&=-Akt-AC_2\\\left|\frac{A-y}{y}\right|&=e^{-Akt}e^{-AC_2}\end{aligned}$$

Como $0 < y < A$, $(A - y)/y > 0$. Assim sendo, podemos omitir as barras de valor absoluto. Com $B = e^{-AC_2}$ temos

$$\begin{aligned}A-y&=Bye^{-Akt}\\y(1+Be^{-Akt})&=A\\y&=\frac{A}{1+Be^{-Akt}}\end{aligned}\tag{9}$$

Se tomarmos $y = f(t)$, então essa igualdade pode ser escrita como

$$f(t)=\frac{A}{1+Be^{-Akt}}\qquad t\geqslant 0\tag{10}$$

onde A, B e k são constantes positivas. Para fazer um esboço do gráfico de f, consideremos primeiro $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. De (10),

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}f(t)&=\frac{A}{1+B\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-Akt}}\\&=\frac{A}{1+B\cdot 0}\\&=A\end{aligned}$$

e $f(t)$ está tendendo a A através de valores menores que A. Logo, a reta $f(x)$ A é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Como $f(0) = \dfrac{A}{1+B}$, o gráfico

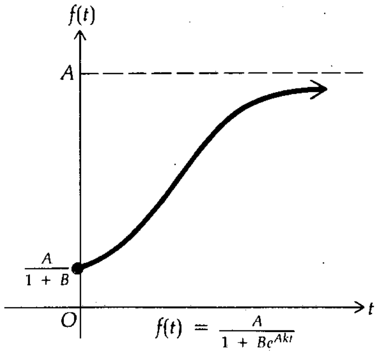


FIGURA 3

intercepta o eixo $f(t)$ em $\frac{A}{1 + B}$. No Exercício 38 você deverá mostrar que o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $t = \frac{1}{Ak} \ln B$. Com essa informação fazemos um esboço do gráfico, conforme mostra a Figura 3. Ele é chamado de curva do *crescimento logístico*. Observe que quando d é pequeno, o gráfico é similar ao do crescimento exponencial da Figura 1; à medida que t cresce, a curva torna-se semelhante àquela do crescimento limitado da Figura 2.

Uma aplicação do crescimento logístico em Economia é dada pela divulgação de informações sobre um dado produto. O crescimento logístico é usado em Biologia para descrever o alastramento de uma doença e em Sociologia, para descrever a propagação de um boato ou rumor.

EXEMPLO 3 Em uma comunidade de 45.000 pessoas, a taxa de crescimento de uma epidemia de gripe é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que a contraíram e ao número de pessoas que não a contraíram. (a) Se 200 pessoas tiveram a gripe quando irrompeu a epidemia e 2.800 pessoas tiveram gripe 3 semanas depois, ache um modelo matemático que descreva a epidemia. Pelas estimativas, qual o número de pessoas que terá gripe (b) após 5 semanas e (c) após 10 semanas? (d) Se a epidemia continuar indefinidamente, quantas pessoas irão contraí-la?

Solução

(a) Se t semanas já se passaram desde que irrompeu a epidemia e y pessoas contraíram a gripe após as t semanas, então

$$\frac{dy}{dt} = ky(45.000 - y) \tag{11}$$

Tabela 1

t	0	3	5	10
y	200	2.800	y_5	y_{10}

onde k é uma constante e $0 < y < 45.000$ para todo $t \geqslant 0$. As condições laterais são dadas na Tabela 1, onde y_5 e y_{10} são o número de pessoas com gripe após 5 e 10 semanas, respectivamente.

A equação diferencial (11) tem a forma de (7) e sua solução geral é da forma de (9). Logo, a solução geral de (11) é

$$y = \frac{45.000}{1 + Be^{-45.000kt}} \tag{12}$$

Como $y = 200$ quando $t = 0$, de (12) temos

$$200 = \frac{45.000}{1 + Be^0}$$

$$1 + B = 225$$

$$B = 224$$

Substituindo esse valor de B em (12), obtemos

$$y = \frac{45.000}{1 + 224e^{-45.000kt}} \tag{13}$$

Quando $t = 3$, $y = 2.800$. Assim, de (13) temos

$$2.800 = \frac{45.000}{1 + 224e^{-135.000k}}$$

$$1 + 224e^{-135.000k} = \frac{45.000}{2.800}$$

$$1 + 224e^{-135.000k} = 16{,}0714$$

$$e^{-135.000k} = \frac{15{,}0714}{224}$$

$$-135.000k = \ln 0{,}0672830$$

$$k = -\frac{\ln 0{,}0672830}{135.000}$$

$$k = 0{,}0000199915$$

Substituindo esse valor de k em (13), obtemos

$$y = \frac{45.000}{1 + 224e^{-0{,}899616t}}$$

que é o modelo matemático pedido.

(b) Como $y = y_5$ quando $t = 5$,

$$y_5 = \frac{45.000}{1 + 244e^{-4{,}49808}}$$

$$= \frac{45.000}{1 + 224(0{,}0111303)}$$

$$= 12.882{,}2$$

(c) Como $y = y_{10}$ quando $t = 10$,

$$y_{10} = \frac{45.000}{1 + 224e^{-8{,}99616}}$$

$$= \frac{45.000}{1+224(0{,}000123885)}$$

$$= 43.785{,}0$$

Logo, 12.882 pessoas devem contrair a gripe após 5 semanas e 43.785 devem contraí-la após 10 semanas.

(d) Como

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{45.000}{1 + 224e^{-0{,}899616t}} = \frac{45.000}{1 + 224 \cdot 0}$$

$$= 45.000$$

toda a comunidade de 45.000 pessoas irá contrair a gripe se a epidemia continuar indefinidamente.

Em Química, a *lei de ação das massas* fornece uma aplicação de integração que nos leva ao uso de frações parciais. Sob certas condições, sabe-se que uma substância A reage com uma substância B para formar uma terceira substância C, de tal forma que a taxa de variação da quantidade C seja proporcional ao produto das quantidades de A e de B ainda presentes em qualquer tempo dado.

Suponhamos que existam inicialmente α g de A e β g de B e que r g de A combinem-se com s g de B para formar $(r + s)$ g de C. Se houver x g de C em t unidades de tempo, então C conterá $rx/(r + s)$ g de A e $sx/(r + s)$ g de B. O número de gramas da substância A que restou é $\alpha - rx/(r + s)$, e o número de gramas de B que restou é $\beta - sx/(r + s)$. Logo, a lei de ação de massas dá

$$\frac{dx}{dt} = K\left(\alpha - \frac{rx}{r+s}\right)\left(\beta - \frac{sx}{r+s}\right)$$

onde K é a constante de proporcionalidade. Essa equação pode ser escrita como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Krs}{(r+s)^2}\left(\frac{r+s}{r}\alpha - x\right)\left(\frac{r+s}{s}\beta - x\right)$$

Tomando

$$k = \frac{Krs}{(r+s)^2} \qquad a = \frac{r+s}{r}\alpha \qquad b = \frac{r+s}{s}\beta$$

essa igualdade torna-se

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x) \tag{14}$$

Podemos separar as variáveis em (14) e obter

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k\,dt$$

Se $a = b$, então o primeiro membo da equação pode ser integrado usando a fórmula da potência. Se $a \neq b$, podemos usar frações parciais para a integração.

EXEMPLO 4 Uma reação química faz com que uma substância A combine-se com uma substância B para formar uma substância C, de acordo com a lei de ação de massas. Se na equação (14)$a = 8$, $b = 6$ e 2 g de substância C formaram-se em 10 min, quantos gramas de C terão se formado em 15 min?

Tabela 2

t	0	10	15
x	0	2	x_{15}

Solução Se x g da substância C formaram-se em t min, temos as condições laterais mostradas na Tabela 2, onde x_{15} g da substância C serão formados em 15 min. A equação (14) torna-se

$$\frac{dx}{dt} = k(8 - x)(6 - x)$$

Separando as variáveis, temos

$$\int \frac{dx}{(8-x)(6-x)} = k\int dt \tag{15}$$

Escrevendo o integrando como soma de frações parciais, iremos obter

$$\frac{1}{(8-x)(6-x)} \equiv \frac{A}{8-x} + \frac{B}{6-x}$$

$$1 \equiv A(6-x) + B(8-x)$$

Substituindo x por 6, obtemos $B = \frac{1}{2}$, e substituindo x por 8, obtemos $A = -\frac{1}{2}$. Assim sendo, (15) pode ser escrita como

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{8-x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{6-x} = k\int dt$$

Integrando, teremos

$$\tfrac{1}{2}\ln|8-x| - \tfrac{1}{2}\ln|6-x| + \tfrac{1}{2}\ln|C| = kt$$

$$\ln\left|\frac{6-x}{C(8-x)}\right| = -2kt$$

$$\frac{6-x}{8-x} = Ce^{-2kt}$$

Substituindo $x = 0$, $t = 0$, nesta equação, obtemos $C = \frac{3}{4}$. Logo,

$$\frac{6-x}{8-x} = \frac{3}{4}e^{-2kt} \qquad (16)$$

Substituindo $x = 2$, $t = 10$ em (16), teremos

$$\tfrac{4}{6} = \tfrac{3}{4}e^{-20k}$$

$$e^{-20k} = \tfrac{8}{9}$$

Substituindo $x = x_{15}$, $t = 15$ em (16), teremos

$$\frac{6-x_{15}}{8-x_{15}} = \frac{3}{4}e^{-30k}$$

$$4(6-x_{15}) = 3(e^{-20k})^{3/2}(8-x_{15})$$

$$24 - 4x_{15} = 3(\tfrac{8}{9})^{3/2}(8-x_{15})$$

$$24 - 4x_{15} = \frac{16\sqrt{2}}{9}(8-x_{15})$$

$$x_{15} = \frac{54-32\sqrt{2}}{9-4\sqrt{2}}$$

$$x_{15} \approx 2{,}6$$

Portanto, 2,6 g de substância C serão formados em 15 min.

EXERCÍCIOS 9.5

Nos Exercícios de 1 a 20, calcule a integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2+x-6}$

3. $\displaystyle\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2-2x}$

5. $\displaystyle\int \frac{4w-11}{2w^2+7w-4}\,dw$

6. $\displaystyle\int \frac{9t^2-26t-5}{3t^2-5t-2}\,dt$

7. $\displaystyle\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+3x^2}$

10. $\displaystyle\int \frac{x^2+4x-1}{x^3-x}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}$

12. $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+2)^2(t+1)}$

15. $\displaystyle\int \frac{3z+1}{(z^2-4)^2}\,dz$

16. $\displaystyle\int \frac{(5x^2-11x+5)\,dx}{x^3-4x^2+5x-2}$

17. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3-5x^2-4x+17}{x^3+x^2-5x+3}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{2x^4-2x+1}{2x^5-x^4}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{-24x^3+30x^2+52x+17}{9x^4-6x^3-11x^2+4x+4}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{16x^4-8x^2+1}$

Nos Exercícios de 21 a 28, calcule a integral definida.

21. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx$

22. $\displaystyle\int_0^4 \frac{(x-2)\,dx}{2x^2+7x+3}$

23. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2-4x+3}{x(x+1)^2}\,dx$

24. $\displaystyle\int_1^4 \frac{(2x^2+13x+18)\,dx}{x^3+6x^2+9x}$

25. $\displaystyle\int_1^2 \frac{5x^2-3x+18}{9x-x^3}\,dx$

26. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(3x^2+7x)\,dx}{x^3+6x^2+11x+6}$

27. $\displaystyle\int_0^5 \frac{(x^2-3)\,dx}{x^3+4x^2+5x+2}$

28. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x^2dx}{2x^3+9x^2+12x+4}$

29. Ache a área da região limitada pela curva $y = (x - 1)/(x^2 - 5x + 6)$, pelo eixo x e pelas retas $x = 4$ e $x = 6$.

30. Ache a área, no primeiro quadrante, da região limitada pela curva $(x + 2)^2y = 4 - x$.

31. Ache o volume do sólido de revolução obtido quando a região do Exercício 29 gira em torno do eixo y.

32. Ache o volume do sólido de revolução obtido quando a região do Exercício 30 gira em torno do eixo x.

33. Ache o centróide da região limitada pela curva $y = (x - 1)/(x^2 - 5x + 6)$, pelo eixo x e pelas retas $x = 4$ e $x = 6$.

34. Ache o centróide da região, no primeiro quadrante, limitada pela curva $(x + 2)^2y = 4 - x$.

35. Um dia em um campus universitário com 5.000 alunos, onde se esperava uma assembléia estudantil um aluno ouviu que certo estudante polêmico iria fazer, durante a assembléia, um discurso explosivo. Essa informação foi transmitida para amigos que, por sua vez, a transmitiram a outros. A taxa com que se espalhou essa informação é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que a ouviram e ao número de pessoas que não a ouviram. (a) Se após 10 min 144 pessoas ouviram a informação, ache o modelo matemático que descreve a divulgação da notícia. Quantas pessoas terão ouvido a notícia (b) após 15 min e (c) após 20 min? (d) Quantas pessoas eventualmente ouvirão a notícia?

36. Numa determinada cidade com população A, 20% dos habitantes ouviram pelo rádio a notícia de um escândalo político local. A taxa de disseminação da informação é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que a ouviram e ao número de pessoas que não a ouviram. Se após 1 hora 50% da população já sabe do escândalo, quanto tempo levará para que 80% da população tome conhecimento do fato?

37. Numa comunidade onde A pessoas são suscetíveis a um determinado vírus, a taxa de propagação do vírus é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que o contraíram e ao número de pessoas suscetíveis que não o contraíram. Se 10% dos suscetíveis contraíram o vírus inicialmente e 25% foram infectados após 3 semanas, qual a porcentagem dos suscetíveis que foram infectados após 6 semanas?

38. Mostre que o gráfico da função f definida por (10) tem um ponto de inflexão em $t = \dfrac{1}{Ak}\ln B$.

39. Um fabricante que começou a operar quatro anos atrás determinou que o rendimento das vendas vem crescendo estavelmente à taxa de $\dfrac{t^3 + 3t^2 + 6t + 7}{t^2 + 3t + 2}$ milhões por ano, onde t é o número de anos que a fábrica vem operando. Estima-se que o rendimento total das vendas continuará crescendo à mesma taxa nos próximos dois anos. Se o rendimento total do ano que acabou foi de \$ 6 milhões, qual será o rendimento total das vendas esperado daqui a um ano? Dê a resposta com precisão de \$ 100.

40. Uma partícula move-se ao longo de uma linha reta de tal forma que se v m/s for a velocidade após t s, então

$$v = \frac{t+3}{t^2+3t+2}$$

Ache a distância percorrida pela partícula desde o instante em que $t = 0$ ao instante em que $t = 2$.

41. Suponha, no Exemplo 4, que $a = 5$, $b = 4$ e 1 g de C seja formado em 5 min. Quantos gramas de C deverão ser formados em 10 min?

42. Suponha, no Exemplo 4, que $a = 6$, $b = 3$ e 1 g de C seja formado em 4 min. Quanto tempo irá decorrer para estarem formados 2 g de C?

43. Em qualquer instante, a taxa segundo a qual uma substância se dissolve é proporcional ao produto da quantidade presente em qualquer instante pela diferença entre a concentração da substância na solução naquele instante e a concentração da substância em uma solução saturada. Uma quantidade de material insolúvel é misturada com 40 g de sal, inicialmente. O sal é dissolvido num tanque com 20 litros de água. Se 5 g de sal dissolvem-se em 10 min e se a concentração de sal numa solução saturada for de 3 g/L, qual a quantidade de sal dissolvido em 20 min?

9.6 INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS QUANDO O DENOMINADOR CONTÉM FATORES QUADRÁTICOS

A discussão de integração de funções racionais por frações parciais continua com os dois casos onde o denominador contém fatores quadráticos *irredutíveis*. Lembre-se da Álgebra, que um fator $ax^2 + bx + c$ será irredutível se uma equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tiver raízes reais, isto é, $b^2 - 4ac < 0$.

Caso 3: Os fatores de $Q(x)$ são lineares e quadráticos, e nenhum fator quadrático é repetido.

Correspondendo ao fator quadrático $ax^2 + bx + c$ no denominador, temos uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + C}$$

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{(x^2 - 2x - 3)\,dx}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}$$

Solução A fração no integrando pode ser escrita como a seguinte soma de frações parciais:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} \equiv \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1} \tag{1}$$

Multiplicando ambos os membros de (1) pelo mínimo denominador comum, teremos

$$x^2 - 2x - 3 \equiv (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 2x + 2) \tag{2}$$

Podemos calcular C substituindo x por 1 em (2) e obtendo

$$-4 = 5C \quad \Leftrightarrow \quad C = -\tfrac{4}{5}$$

Substituímos C por $-\frac{4}{5}$ em (2) e multiplicando o segundo membro, obtemos

$$x^2 - 2x - 3 \equiv (A - \tfrac{4}{5})x^2 + (B - A - \tfrac{8}{5})x + (-\tfrac{8}{5} - B)$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de x, teremos

$$A - \tfrac{4}{5} = 1$$

$$B - A - \tfrac{8}{5} = -2$$

$$-\tfrac{8}{5} - B = -3$$

Logo,

$$A = \tfrac{9}{5} \qquad B = \tfrac{7}{5}$$

Substituindo os valores de A, B e C em (1), teremos

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} \equiv \frac{\frac{9}{5}x + \frac{7}{5}}{x^2 + 2x + 2} + \frac{-\frac{4}{5}}{x - 1}$$

Assim,

$$\int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}\,dx$$

$$= \frac{9}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2x + 2} + \frac{7}{5}\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x - 1} \tag{3}$$

Para integrar $\int (x\,dx)/(x^2 + 2x + 2)$ vemos que a diferencial do denominador é $2(x + 1)\,dx$; assim, se somarmos e subtrairmos 1 no numerador, iremos obter

$$\frac{9}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2x + 2} = \frac{9}{5}\int \frac{(x + 1)\,dx}{x^2 + 2x + 2} - \frac{9}{5}\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

Substituindo essa desigualdade em (3) e combinando os termos, teremos

$$\int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx$$

$$= \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)\,dx}{x^2+2x+2} - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1} \tag{4}$$

$$= \frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} - \frac{4}{5}\ln|x-1|$$

$$= \tfrac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \tfrac{2}{5}\operatorname{tg}^{-1}(x+1) - \tfrac{8}{10}\ln|x-1| + \tfrac{1}{10}\ln C$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{C(x^2+2x+2)^9}{(x-1)^8}\right| - \frac{2}{5}\operatorname{tg}^{-1}(x+1)$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** No Exemplo 1 podemos evitar algumas passagens, se, em vez de (1), expressarmos a fração original como

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)} \equiv \frac{D(2x+2)+E}{x^2+2x+2} + \frac{F}{x-1}$$

Nota: Escrevemos $D(2x + 2) + E$ em vez de $Ax + B$ pois

$$2x + 2 = D_x(x^2 + 2x + 2)$$

Então, resolvendo para D, E e F, obtemos

$$D = \tfrac{9}{10} \qquad E = -\tfrac{2}{5} \qquad F = -\tfrac{4}{5}$$

resultando diretamente (4). ◀

Caso 4: Os fatores de $Q(x)$ são lineares e quadráticos e alguns dos fatores quadráticos são repetidos.

Se $ax^2 + bx + c$ for um fator quadrático de $Q(x)$ que se repete p vezes, então, correspondendo ao fator $(ax^2 + bx + c)^p$, teremos a soma das p frações parciais:

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^p} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^{p-1}} + \ldots + \frac{A_px+B_p}{ax^2+bx+c}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Se o denominador contém o fator $(x^2 - 5x + 2)^3$, correspondendo a esse fator,

$$\frac{Ax+B}{(x^2-5x+2)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2-5x+2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2-5x+2}$$

ou, de forma mais conveniente,

$$\frac{A(2x-5)+B}{(x^2-5x+2)^3} + \frac{C(2x-5)+D}{(x^2-5x+2)^2} + \frac{E(2x-5)+F}{x^2-5x+2}$$ ◀

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2}$$

Solução

$$\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B(2x-4)+C}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{D(2x-4)+E}{x^2-4x+5}$$

Multiplicando ambos os membros dessa relação pelo mínimo denominador comum, teremos

$$x - 2 \equiv A(x^2 - 4x + 5)^2 + x(2Bx - 4B + C) + x(x^2 - 4x + 5)(2Dx - 4D + E) \quad (5)$$

$$x - 2 \equiv Ax^4 + 16Ax^2 + 25A - 8Ax^3 + 10Ax^2 - 40Ax + 2Bx^2 - 4Bx + Cx + 2Dx^4 - 12Dx^3 + Ex^3 + 26Dx^2 - 4Ex^2 - 20Dx + 5Ex$$

$$x - 2 \equiv (A + 2D)x^4 + (-8A - 12D + E)x^3 + (26A + 2B + 26D - 4E)x^2 + (-40A - 4B + C - 20D + 5E)x + 25A \quad (6)$$

O valor de A pode ser calculado de (5), substituindo x por 0. Se igualarmos os coeficientes em (6) e resolvermos simultaneamente as equações resultantes, iremos obter

$$A = -\tfrac{2}{25} \qquad B = \tfrac{1}{5} \qquad C = \tfrac{1}{5} \qquad D = \tfrac{1}{25} \qquad E = -\tfrac{4}{25}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2} &= -\frac{2}{25}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{5}\int \frac{(2x-4)\,dx}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} \\ &\quad + \frac{1}{25}\int \frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+5} - \frac{4}{25}\int \frac{dx}{x^2-4x+5} \\ &= -\frac{2}{25}\ln|x| - \frac{1}{5(x^2-4x+5)} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{[(x^2-4x+4)+1]^2} \\ &\quad + \frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5| - \frac{4}{25}\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1} \quad (7)\end{aligned}$$

Vamos calcular separadamente as integrais do terceiro e quinto termos do segundo membro de (7)

$$\int \frac{dx}{[(x^2-4x+4)+1]^2} = \int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2}$$

Seja $x - 2 = \operatorname{tg} \theta$, onde $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x \geqslant 2$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 2$. Então $dx = \sec^2 \theta \, d\theta$ e $(x - 2)^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 \theta + 1$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} &= \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(\operatorname{tg}^2\theta + 1)^2} \\ &= \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^4\theta} \\ &= \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} \\ &= \int \cos^2\theta\,d\theta \\ &= \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\ &= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C_1 \\ &= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C_1\end{aligned}$$

Como $\operatorname{tg}\theta = x - 2$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(x-2)$. Encontramos sen θ e cos θ das Figuras 1 (se $x \geqslant 2$) e 2 (se $x < 2$). Em ambos os casos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{[(x-2)^2 + 1]^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}} + C_1$$

$$\int \frac{dx}{[(x-2)^2 + 1]^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + \frac{x-2}{2(x^2-4x+5)} + C_1 \tag{8}$$

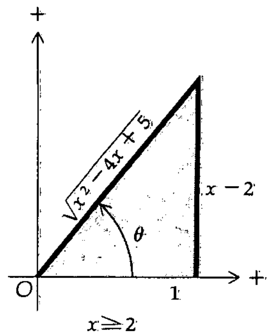


FIGURA 1

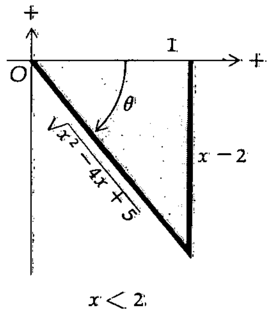


FIGURA 2

Considerando agora a outra integral no segundo membro de (7), teremos

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1} = \operatorname{tg}^{-1}(x-2) + C_2$$

Substituindo essa relação e (8) em (7), teremos

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{x(x^2-4x+5)^2}$$

$$= -\frac{2}{25}\ln|x| - \frac{1}{5(x^2-4x+5)} + \frac{1}{10}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + \frac{x-2}{10(x^2-4x+5)}$$
$$+ \frac{1}{25}\ln|x^2-4x+5| - \frac{4}{25}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + C$$

$$= \frac{1}{25}\ln\left|\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right| - \frac{3}{50}\operatorname{tg}^{-1}(x-2) + \frac{x-4}{10(x^2-4x+5)} + C$$

EXERCÍCIOS 9.6

Nos Exercícios de 1 a 20, calcule a integral indefinida.

1. $\int \frac{dx}{2x^3 + x}$
2. $\int \frac{(x+4)\,dx}{x(x^2+4)}$
3. $\int \frac{dx}{16x^4 - 1}$
4. $\int \frac{(x^2-4x-4)\,dx}{x^3-2x^2+4x-8}$
5. $\int \frac{(t^2+t+1)\,dt}{(2t+1)(t^2+1)}$
6. $\int \frac{3w^3+13w+4}{w^3+4w}\,dw$
7. $\int \frac{(x^2+x)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$
8. $\int \frac{dx}{9x^4+x^2}$
9. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$
10. $\int \frac{(x+3)\,dx}{4x^4+4x^3+x^2}$
11. $\int \frac{(2x^2-x+2)\,dx}{x^5+2x^3+x}$
12. $\int \frac{(2x^3+9x)\,dx}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}$
13. $\int \frac{(5z^3-z^2+15z-10)\,dz}{(z^2-2z+5)^2}$
14. $\int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$
15. $\int \frac{(x^2+2x-1)\,dx}{27x^3-1}$
16. $\int \frac{e^{5x}\,dx}{(e^{2x}+1)^2}$
17. $\int \frac{18\,dx}{(4x^2+9)^2}$
18. $\int \frac{(2x^2+3x+2)\,dx}{x^3+4x^2+6x+4}$
19. $\int \frac{(\sec^2 x + 1)\sec^2 x\,dx}{1 + \operatorname{tg}^3 x}$
20. $\int \frac{(6w^4+4w^3+9w^2+24w+32)\,dw}{(w^3+8)(w^2+3)}$

Nos Exercícios de 21 a 29, calcule a integral definida.

21. $\int_1^4 \frac{(4+5x^2)\,dx}{x^3+4x}$
22. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^3+2x^2+x+2}$

23. $\displaystyle\int_3^4 \frac{(5x^3-4x)\,dx}{x^4-16}$

24. $\displaystyle\int_0^1 \frac{9\,dx}{8x^3+1}$

25. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^2\,dx}{(2x^2+2x+1)^2}$

26. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{(x+1)\,dx}{x^3-1}$

27. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x^2+3x+3)\,dx}{x^3+x^2+x+1}$

28. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^3 x}$

29. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{12\,dt}{e^{2t}+16}$

30. Use métodos anteriores a esta secção (isto é, sem frações parciais), para calcular as integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{(x^2-4x+6)\,dx}{x^3-6x^2+18x}$ (b) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(x+2)^4}\,dx$

31. Ache a área da região limitada pela curva $y(x^2+1)^3 = x^3$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 1$.

32. Ache a área da região limitada pela curva $y(x^3+8) = 4$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 1$.

33. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região do Exercício 32.

34. Ache a abscissa do centróide da região do Exercício 32.

35. Uma partícula move-se ao longo de uma reta de forma que v cm/s seja a velocidade da partícula, decorridos t s; então

$$v = \frac{t^2-t+1}{(t+2)^2(t^2+1)}$$

Ache a fórmula da distância percorrida pela partícula do instante $t = 0$ ao instante $t = t_1$.

9.7 OUTRAS SUBSTITUIÇÕES

Se um integrando envolver potências fracionárias de uma variável x, o integrando poderá ser simplificado pela substituição

$$x = z^n$$

onde n é o menor denominador comum entre os denominadores dos expoentes. Isso será ilustrado pelo exemplo a seguir.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$$

Solução Seja $x = z^6$, então $dx = 6z^5\,dz$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{1/2}\,dx}{1+x^{1/3}} &= \int \frac{z^3(6z^5\,dz)}{1+z^2}\\ &= 6\int \frac{z^8}{z^2+1}\,dz\end{aligned}$$

Dividindo o numerador pelo denominador, teremos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{1/2}\,dx}{1+x^{1/3}} &= 6\int \left(z^6-z^4+z^2-1+\frac{1}{z^2+1}\right)dz\\ &= 6\left(\tfrac{1}{7}z^7-\tfrac{1}{5}z^5+\tfrac{1}{3}z^3-z+\operatorname{tg}^{-1} z\right)+C\\ &= \tfrac{6}{7}x^{7/6}-\tfrac{6}{5}x^{5/6}+2x^{1/2}-6x^{1/6}+6\operatorname{tg}^{-1} x^{1/6}+C\end{aligned}$$

Não há uma regra geral para determinar qual a substituição que irá resultar num integrando mais simples. O exemplo a seguir mostra outra situação onde racionalizamos o integrando dado.

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int x^5\sqrt{x^2+4}\,dx$$

Solução Seja $z = \sqrt{x^2+4}$. Então $z^2 = x_2 + 4$ e $2z\,dz = 2x\,dx$. Assim,

$$\begin{aligned}\int x^5\sqrt{x^2+4}\,dx &= \int (x^2)^2\sqrt{x^2+4}\,x\,dx\\ &= \int (z^2-4)^2 z(z\,dz)\\ &= \int (z^6 - 8z^4 + 16z^2)\,dz\\ &= \tfrac{1}{7}z^7 - \tfrac{8}{5}z^5 + \tfrac{16}{3}z^3 + C\\ &= \tfrac{1}{105}z^3[15z^4 - 168z^2 + 560] + C\\ &= \tfrac{1}{105}(x^2+4)^{3/2}[15(x^2+4)^2 - 168(x^2+4) + 560] + C\\ &= \tfrac{1}{105}(x^2+4)^{3/2}(15x^4 - 48x^2 + 128) + C\end{aligned}$$

Se um integrando for uma função racional de sen x e cos x ele poderá ser reduzido a uma função racional de z pela substituição

$$z = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x$$

como será mostrado por um exemplo. Para obter as fórmulas de sen x e cos x em termos de z vamos usar as seguintes identidades: sen $2y = 2$ sen y cos y e cos $2y = 2\cos^2 y - 1$ com $y = \frac{1}{2}x$. Temos, então,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x\\ &= 2\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos^2\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}\\ &= 2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\cdot\frac{1}{\sec^2\frac{1}{2}x}\\ &= \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}\\ &= \frac{2z}{1+z^2}\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}\cos x &= 2\cos^2\tfrac{1}{2}x - 1\\ &= \frac{2}{\sec^2\frac{1}{2}x} - 1\\ &= \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} - 1\\ &= \frac{2}{1+z^2} - 1\\ &= \frac{1-z^2}{1+z^2}\end{aligned}$$

Como $z = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$,

$$\begin{aligned}dz &= \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}x\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}x)\,dx\end{aligned}$$

Assim,

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

Vamos estabelecer esses resultados sob a forma de teorema.

9.7.1 TEOREMA Se $z = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$, então

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2} \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}$$

Solução Seja $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$. Então, das fórmulas do Teorema 9.7.1, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x + \cos x} &= \int \frac{\dfrac{2\,dz}{1 + z^2}}{1 - \dfrac{2z}{1 + z^2} + \dfrac{1 - z^2}{1 + z^2}} \\
&= 2 \int \frac{dz}{(1 + z^2) - 2z + (1 - z^2)} \\
&= 2 \int \frac{dz}{2 - 2z} \\
&= \int \frac{dz}{1 - z} \\
&= -\ln|1 - z| + C \\
&= -\ln|1 - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x| + C
\end{aligned}$$

EXEMPLO 4 Seja $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$, calcule

$$\int \sec x \, dx$$

Solução Com $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$ e as fórmulas do Teorema 9.7.1, temos que

$$\begin{aligned}
\int \sec x \, dx &= \int \frac{dx}{\cos x} \\
&= \int \frac{2\,dz}{1 + z^2} \cdot \frac{1 + z^2}{1 - z^2} \\
&= 2 \int \frac{dz}{1 - z^2} \\
&= \ln \left| \frac{1 + z}{1 - z} \right| + C \qquad \text{(Secção 9.5)} \\
&= \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}x} \right| + C
\end{aligned}$$

Podemos escrever o valor de $\int \sec x \, dx$ do Exemplo 4 de outra forma, tomando $1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ e usando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Assim,

$$\int \sec x\,dx = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi + \operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\right| + C$$

$$\boxed{\int \sec x\,dx = \ln|\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x)| + C} \tag{1}$$

No Teorema 5.4.5 tínhamos a fórmula

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

obtida pela multiplicação do numerador e do denominador do integrando por $\sec x + \operatorname{tg} x$. Há ainda outra forma para $\int \sec x\,dx$ obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int \frac{dx}{\cos x}\\ &= \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x}\\ &= \int \frac{\cos x\,dx}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\\ &= \int \frac{du}{1 - u^2} \qquad (\text{sendo } u = \operatorname{sen} x \text{ e } du = \cos x\,dx)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C\\ &= \ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right|^{1/2} + C\end{aligned}$$

Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ para todo x, $1 + \operatorname{sen} x$ e $1 - \operatorname{sen} x$ são não-negativos. Assim, as barras de valor absoluto podem ser removidas e teremos

$$\boxed{\int \sec x\,dx = \ln\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}} + C} \tag{2}$$

EXERCÍCIOS 9.7

Nos Exercícios de 1 a 31, calcule a integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3 + \sqrt{x}}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - x}$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + 4x}}$
4. $\displaystyle\int x(1 + x)^{2/3}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 + \sqrt{x+2}}$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x-2}}$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x} - \sqrt{x+4}}$
10. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{5x^2 + 4}}$
11. $\displaystyle\int \frac{(2x^5 + 3x^2)\,dx}{\sqrt{1 + 2x^3}}$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}$
13. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{8 + 7\cos x}$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$
15. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{7 + 8\cos x}$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x + 2}$
17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 - 5\operatorname{sen} x}$
20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x - 1}$
21. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\operatorname{sen} x - 3\cos x}$
22. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x - 2\operatorname{sen} x + 3}$

23. $\displaystyle\int \frac{8\,dx}{3\cos 2x + 1}$

24. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{3\cos x - 5}$

25. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{1 + 2\cos x}$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{cotg} x(6 + 7\cos 2x)}$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{cotg} 2x(1 - \cos 2x)}$

29. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\operatorname{sen} x + 2\cos x + 3}$

30. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{6 + 4\sec x}$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}(1 + \sqrt[3]{x})^2}$

32. Calcule a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$ por dois métodos: (a) use a substituição $x = 1/z$; (b) use a substituição $\sqrt{x^2 + 2x - 1} = z - x$.

Nos Exercícios de 33 a 44, calcule a integral definida.

33. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

34. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{x + 1}\,dx$

35. $\displaystyle\int_{1/2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x} + 9)}$

36. $\displaystyle\int_{16}^{18} \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^3}}$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5\operatorname{sen} x + 3}$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos 2x}$

39. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3\,dx}{2\operatorname{sen} 2x + 1}$

40. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{8\,dx}{\operatorname{tg} x + 1}$

41. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/2} \frac{3\,dx}{2\cos x + 1}$

42. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{2 + \cos x}$

43. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\,dx$

44. $\displaystyle\int_2^{11} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^2 + 4}}$

45. Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$ por dois métodos: (a) tomando $x = z^2$; (b) escrevendo $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$ e tomando $u = \sqrt{x} - 1$

46. Use a substituição desta secção, $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$ para mostrar que $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.

47. Mostre que a fórmula (2) desta secção é equivalente à fórmula $\displaystyle\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$. (*Sugestão:* multiplique o numerador e denominador sob o radical por $(1 + \operatorname{sen} x)$.)

48. Usando a substituição $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$, prove que

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + C$$

49. Mostre que o resultado do Exercício 48 é equivalente à fórmula $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C$. (*Sugestão*: use um método similar ao sugerido no Exercício 47.)

50. Calcule a integral

$$\int \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{\operatorname{sen} x}\,dx$$

por dois métodos: (a) tomando $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$; (b) tomando $u = \frac{1}{2}x$ e obtendo uma integral envolvendo funções trigonométricas de u.

9.8 INTEGRAIS QUE RESULTAM EM FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS (*Suplementar*)

As funções hiperbólicas inversas podem ser aplicadas em integração e algumas vezes o seu uso abrevia consideravelmente os cálculos. Entretanto, esse procedimento não soluciona nenhum problema novo. Teremos somente novas formas de obter resultados.

Da fórmula (7) na Secção 8.5

$$D_x(\operatorname{senh}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}\,D_x u$$

de onde obtemos a fórmula de integração

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \operatorname{senh}^{-1} u + C$$

Se a fórmula (1) da Secção 8.5 for usada para expressar $\operatorname{senh}^{-1} u$ como logaritmo natural, obteremos o teorema a seguir.

9.8.1 TEOREMA

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} &= \operatorname{senh}^{-1} u + C\\ &= \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) + C\end{aligned}$$

A fórmula (8) da Secção 8.5 é

$$D_x(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}\,D_x u \qquad \text{onde } u > 1$$

de onde segue que

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1} u + C \qquad \text{se } u > 1$$

Combinando esse resultado com a fórmula (2) da Secção 8.5, obtemos o teorema a seguir.

9.8.2 TEOREMA

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} &= \cosh^{-1} u + C \\ &= \ln(u + \sqrt{u^2-1}) + C \quad \text{se } u > 1\end{aligned}$$

As fórmulas (9) e (10) da Secção 8.5 são, respectivamente,

$$D_x(\text{tgh}^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2} D_x u \qquad \text{onde } |u| < 1$$

$$D_x(\text{cotgh}^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2} D_x u \qquad \text{onde } |u| > 1$$

Das duas fórmulas acima obtemos

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \begin{cases} \text{tgh}^{-1} u + C & \text{se } |u| < 1 \\ \text{cotgh}^{-1} u + C & \text{se } |u| > 1 \end{cases}$$

Com essa fórmula e com as fórmulas (3) e (4) da Secção 8.5 temos o próximo teorema.

9.8.3 TEOREMA

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{1-u^2} &= \begin{cases} \text{tgh}^{-1} u + C & \text{se } |u| < 1 \\ \text{cotgh}^{-1} u + C & \text{se } |u| > 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C \quad \text{se } u \neq 1\end{aligned}$$

Temos também as três fórmulas dadas no teorema a seguir.

9.8.4 TEOREMA

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} &= \text{senh}^{-1} \frac{u}{a} + C \\ &= \ln(u + \sqrt{u^2+a^2}) + C \quad \text{se } a > 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} &= \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C \\ &= \ln(u + \sqrt{u^2-a^2}) + C \quad \text{se } u > a > 0 \qquad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{a^2-u^2} &= \begin{cases} \dfrac{1}{a} \text{tgh}^{-1} \dfrac{u}{a} + C & \text{se } |u| < a \\ \dfrac{1}{a} \text{cotgh}^{-1} \dfrac{u}{a} + C & \text{se } |u| > a \end{cases} \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C \quad \text{se } u \neq a \text{ e } a \neq 0 \qquad (3)\end{aligned}$$

Prova Podemos provar as fórmulas encontrando as derivadas do segundo membro e obtendo o integrando, ou, ainda mais diretamente, usando uma substituição por função hiperbólica. A prova de (1), derivando o segundo membro, é a seguinte:

$$D_u\left(\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1}}\cdot\frac{1}{a}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{u^2+a^2}}\cdot\frac{1}{a}$$

e como $a>0$, $\sqrt{a^2}=a$; assim,

$$D_u\left(\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

Para obter a representação com logaritmo natural usamos a fórmula (1) da Secção 8.5 e temos

$$\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a}=\ln\left(\frac{u}{a}+\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{u}{a}+\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{a}\right)$$

$$=\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})-\ln a$$

Logo,

$$\operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a}+C=\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})-\ln a+C$$

$$=\ln(u+\sqrt{u^2+a^2})+C_1$$

onde $C_1=C-\ln a$.

A demonstração de (2) por uma substituição por função hiperbólica usa a identidade $\cosh^2 x-\operatorname{senh}^2 x=1$. Seja $u=a\cosh x$, onde $x>0$; então $du=a\operatorname{senh} x\,dx$ e $x=\cosh^{-1}(u/a)$. Substituindo no integrando, obtemos

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\int\frac{a\operatorname{senh} x\,dx}{\sqrt{a^2\cosh^2 x-a^2}}$$

$$=\int\frac{a\operatorname{senh} x\,dx}{\sqrt{a^2}\sqrt{\cosh^2 x-1}}$$

$$=\int\frac{a\operatorname{senh} x\,dx}{\sqrt{a^2}\sqrt{\operatorname{senh}^2 x}}$$

Como $a>0$, $\sqrt{a^2}=a$. Além disso, como $x>0$, $\operatorname{senh} x>0$; Logo, $\sqrt{\operatorname{senh}^2 x}=\operatorname{senh} x$. Então,

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\int\frac{a\operatorname{senh} x\,dx}{a\operatorname{senh} x}$$

$$=\int dx$$

$$=x+C$$

$$=\cosh^{-1}\frac{u}{a}+C$$

A representação com logaritmo natural pode ser obtida de forma semelhante à que foi usada na fórmula (1). A demonstração da fórmula (3) será deixada como exercício (veja o Exercício 23). ■

As fórmulas dos Teoremas 9.8.1 até 9.8.4 dão uma representação alternativa da integral em questão. Ao calcular uma integral, na qual uma dessas fórmulas ocorre, a representação por função hiperbólica inversa pode ser mais fácil de usar e às vezes, menos incômoda para escrever. Observe que a forma com logaritmos naturais da fórmula (3) foi obtida na Secção 9.5, usando frações parciais.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}$$

Solução Vamos aplicar a fórmula (1), depois de completar o quadrado.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 6x + 9) + 4}}\\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x - 3)^2 + 4}}\\ &= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x - 3}{2}\right) + C\\ &= \ln(x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 13}) + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

Solução De (2)

$$\begin{aligned}\int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} &= \cosh^{-1} \frac{x}{5}\Big]_6^{10}\\ &= \cosh^{-1} 2 - \cosh^{-1} 1{,}2\end{aligned}$$

Com uma calculadora obtemos $\cosh^{-1} 2 \approx 1{,}32$ e $\cosh^{-} 1{,}2 \approx 0{,}62$. Assim,

$$\int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} \approx 0{,}70$$

Em vez de aplicar as fórmulas, as integrais com as formas daquelas dos Teoremas 9.8.1 até 9.8.4 podem ser obtidas usando uma substituição por função hiperbólica e procedendo de forma similar àquela usada para substituição trigonométrica.

EXEMPLO 3 Calcule a integral do Exemplo 1 sem usar uma fórmula, mas usando uma substituição por função hiperbólica.

Solução Na solução do Exemplo 1 a integral dada foi reescrita como

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$$

Se $x - 3 = 2 \operatorname{senh} u$, então $dx = 2 \cosh u \, du$ e $u = \operatorname{senh}^{-1} \frac{1}{2}(x-3)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}} &= \int \frac{2\cosh u \, du}{\sqrt{4 \operatorname{senh}^2 u + 4}} \\
&= \int \frac{2\cosh u \, du}{2\sqrt{\operatorname{senh}^2 u + 1}} \\
&= \int \frac{\cosh u \, du}{\sqrt{\cosh^2 u}} \\
&= \int \frac{\cosh u \, du}{\cosh u} \\
&= \int du \\
&= u + C \\
&= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

que está de acordo com o resultado do Exemplo 1.

EXERCÍCIOS 9.8

Nos Exercícios de 1 a 16, expresse a integral indefinida em termos de uma função hiperbólica inversa e como um logaritmo natural.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$

3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{25-x^2}$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2-16}$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{4e^x-e^{-x}}$

7. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$

9. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{5-e^{-2t}}}$

10. $\displaystyle\int \frac{dw}{4w-w^2-3}$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{2-4x-x^2}$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+9}}$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+10x+24}$

14. $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{9z^2-6z-8}}$

15. $\displaystyle\int \frac{3\,dw}{w\sqrt{4\ln^2 w+9}}$

16. $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{x^4+6x^2+5}}$

Nos Exercícios de 17 a 22, calcule a integral definida e expresse a resposta em termos de um logaritmo natural.

17. $\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

18. $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{dx}{1-x^2}$

19. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$

20. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$

21. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{9x^2-12x-5}}$

22. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$

23. Prove a fórmula (3) usando uma substituição por função hiperbólica.

24. Uma curva passa pelo ponto $(0, a)$, $a > 0$ e a inclinação em qualquer ponto é $\sqrt{y^2/a^2 - 1}$. Prove que a curva é uma catenária.

25. Um homem com um pára-quedas salta de um avião e quando o pára-quedas se abre, sua velocidade é de 60 m/s. Se v m/s for sua velocidade t s após a abertura do pára-quedas

$$\frac{324}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = 324 - v^2$$

Resolva essa equação diferencial para obter

$$t = \frac{18}{g}\left(\operatorname{cotgh}^{-1}\frac{v}{18} - \operatorname{cotgh}^{-1}\frac{5}{3}\right)$$

26. Mostre que $\operatorname{senh}^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$, usando uma substituição trigonométrica para calcular $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}$.

27. A região limitada pela curva $y = (16 - x^2)^{-1/2}$, pelo eixo x e pelas retas $x = -2$ e $x = 3$ gira em torno do eixo x. Mostre que o volume do sólido gerado é $\frac{1}{4}\pi[\operatorname{tgh}^{-1} \frac{3}{4} - \operatorname{tgh}^{-1}(-\frac{1}{2})]$.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 9 E REVISÃO DE INTEGRAÇÃO

Nos Exercícios de 1 a 62, calcule a integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 4x \cos^4 4x\, dx$

2. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 3}{x^3 - x}\, dx$

3. $\displaystyle\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{4 - e^x}}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}$

5. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{x}\, dx$

6. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^4 + 1}$

7. $\displaystyle\int \cos^2 \tfrac{1}{3}x\, dx$

8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x + 1} + 1}{\sqrt{x + 1} - 1}\, dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3}\, dx$

10. $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{y} + 1}$

11. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx$

12. $\displaystyle\int \cos \theta \cos 2\theta\, d\theta$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + x^{4/3}}$

14. $\displaystyle\int t\sqrt{2t - t^2}\, dt$

15. $\displaystyle\int (\sec 3x + \operatorname{cosec} 3x)^2\, dx$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{2t^3 + 11t + 8}{t^3 + 4t^2 + 4t}\, dt$

18. $\displaystyle\int x^3 e^{3x}\, dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1}\, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2}\, dx$

21. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 3x \cos^2 3x\, dx$

22. $\displaystyle\int t \operatorname{sen}^2 2t\, dt$

23. $\displaystyle\int \frac{dr}{\sqrt{3 - 4r - r^2}}$

24. $\displaystyle\int \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}\, dx$

25. $\displaystyle\int x^3 \cos x^2\, dx$

26. $\displaystyle\int \frac{y\, dy}{9 + 16y^4}$

27. $\displaystyle\int e^{t/2} \cos 2t\, dt$

28. $\displaystyle\int \frac{du}{u^{5/8} - u^{1/8}}$

29. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{4 + \operatorname{sen}^4 x}\, dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{w - a}}{w}\, dw,\ a > 0$

31. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 nx\, dx$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x(\ln x - 1)}$

33. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^5 x\, dx$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + 4 \sec x}$

35. $\displaystyle\int \frac{2y^2 + 1}{y^3 - 6y^2 + 12y - 8}\, dy$

36. $\displaystyle\int \frac{x^5\, dx}{(x^2 - a^2)^3}$

37. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 + \cos^2 x}$

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$

39. $\displaystyle\int \sqrt{4t - t^2}\, dt$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x + 3x^2}}$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - x}$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1}\, dt$

43. $\displaystyle\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{4 - 9e^{2x}}}$

44. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + 4 \cos 2x}$

45. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 3x \operatorname{cosec}^4 3x\, dx$

46. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg} x\, dx}{3 + 2 \operatorname{sen} x}$

47. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$

48. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5x - 6 - x^2}}$

49. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - 2 \operatorname{cosec} x}$

50. $\displaystyle\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$

51. $\displaystyle\int \frac{\cos 3t\, dt}{\operatorname{sen} 3t\sqrt{\operatorname{sen}^2 3t - \frac{1}{4}}}$

52. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + 6x + 34)^2}$

53. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^4}\, dx$

54. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \operatorname{sen} x\, dx$

55. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2t}}{\sqrt{1 - 2t}}\, dt$

56. $\displaystyle\int \ln(x^2 + 1)\, dx$

57. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2 + \sqrt{x - 1}}}$

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + 2 \operatorname{sen} x + \cos x}$

59. $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}$

61. $\displaystyle\int x^n \ln x\, dx$

62. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^n x \sec^4 x\, dx,\ n > 0$

Nos Exercícios de 63 a 94, calcule a integral definida.

63. $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \cos x}\, dx$

64. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \sqrt{\frac{1 - x}{x}}\, dx$

65. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + 4x^2}\, dx$

66. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

67. $\displaystyle\int_0^2 \frac{t^3\, dt}{\sqrt{4 + t^2}}$

68. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \cos^3 t\, dt$

69. $\displaystyle\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2\, dx}{(16 - x^2)^{3/2}}$

70. $\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^x\, dx}{(1 + x)^2}$

71. $\int_0^{\pi/4} \sec^4 x\, dx$

72. $\int_0^2 \frac{(1-x)\,dx}{x^2+3x+2}$

73. $\int_{\pi/12}^{\pi/8} \operatorname{cotg}^3 2y\, dy$

74. $\int_0^2 (2^x + x^2)\, dx$

75. $\int_a^{a/2} \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^2}\, dx$

76. $\int_1^2 (\ln x)^2\, dx$

77. $\int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{(2x^2-2x+1)\,dx}{x^3+x}$

78. $\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{2-x^2}}$

79. $\int_1^{10} \log_{10}\sqrt{ex}\, dx$

80. $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x - \cos x|\,dx$

81. $\int_1^2 \frac{x+2}{(x+1)^2}\, dx$

82. $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} xe^{x^2} \cos x^2\, dx$

83. $\int_0^{\pi} |\cos^3 x|\, dx$

84. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\operatorname{tg}^5 x|\,dx$

85. $\int_0^{1/2} \frac{2x\,dx}{x^3-x^2-x+1}$

86. $\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\, dx$

87. $\int_0^{1/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-4x^4}}$

88. $\int_0^{\pi/12} \frac{dx}{\cos^4 3x}$

89. $\int_0^1 \sqrt{2y+y^2}\,dy$

90. $\int_0^4 \frac{x^2\,dx}{x^3+4x^2+5x+2}$

91. $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{12+13\cos t}$

92. $\int_0^3 \frac{dr}{(r+2)\sqrt{r+1}}$

93. $\int_0^{16} \sqrt{4-\sqrt{x}}\, dx$

94. $\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}t}{1+\cos \frac{1}{2}t}\, dt$

95. A densidade linear de uma barra com 3 m de comprimento num ponto a x m de uma extremidade é ke^{-3x} kg/m. Encontre a massa e o centro de massa da barra.

96. Ache o centro de massa de uma barra com 4 m, se a densidade linear num ponto a x m do extremo esquerdo for $\sqrt{9+x^2}$ kg/m.

97. Ache o comprimento do arco da parábola $y^2 = 6x$ de $x = 6$ a $x = 12$.

98. Ache a área da região limitada pela curva $y = \operatorname{sen}^{-1} 2x$, pela reta $x = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ e pelo eixo x.

99. Ache a área da região limitada pelo laço da curva $x^2 = y^4(1 - y^2)$.

100. Ache o comprimento do arco da curva $y = \ln x$ de $x = 1$ a $x = e$.

101. Ache o volume do sólido de revolução gerado ao girar em torno do eixo y a região limitada pela curva $y = \ln 2x$, pelo eixo x e pela reta $x = e$.

102. A região no primeiro quadrante, limitada pela curva $y = \dfrac{5-x}{(x+1)^2}$, pelo eixo x e pelo eixo y gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.

103. Duas substâncias químicas A e B reagem para formar a substância C e a taxa de variação da quantidade de C é proporcional ao produto das quantidades de A e B restantes em cada instante dado. Inicialmente, existem 60 g de A e 60 g de B. Para formar 5 g de C são necessários 3 g de A e 2 g de B. Após 1 h, foram formados 15 g de C. (a) Se x g de C são formados após t h, ache uma expressão para x em termos de t. (b) Ache a quantidade de C após 3 h.

104. Um tanque tem a forma de um sólido obtido ao girar a região limitada pela curva $y = \ln x$, pelo eixo x e pelas retas $x = e$ e $x = e^2$ em torno do eixo x. Se o tanque estiver cheio de água, qual o trabalho feito ao bombear toda a água até a borda do tanque? A distância é medida em metros. Tome o eixo x positivo vertical e orientado para baixo.

105. Ache o centróide da região do Exercício 99.

106. Ache o centróide da região limitada pelo laço da curva $y^2 = x^2 - x^3$.

107. Ache o centróide da região limitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \operatorname{sen} x - \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ de $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$.

108. Ache o centróide da região no primeiro quadrante, limitada pelos eixos coordenados e pela curva $y = \cos x$.

109. Um lago pode ter no máximo 10.000 peixes, de forma que a taxa de crescimento dos peixes é conjuntamente proporcional ao número de peixes presentes e à diferença entre 10.000 e o número presente. O lago contém inicialmente 400 peixes e 6 semanas depois havia 3.000 peixes. (a) Quantos peixes existirão no lago após 8 semanas? (b) Quando é máxima a taxa de crescimento? Isto é, após quantas semanas o lago irá conter 5.000 peixes?

110. Em uma cidade com 12.000 pessoas, a taxa de crescimento de uma epidemia de gripe é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que tiveram a gripe e ao número de pessoas que não a contraíram. Cinco dias atrás 400 pessoas estavam com gripe e hoje 1.000 pessoas já foram contagiadas. (a) Qual o número esperado de pessoas com gripe amanhã? (b) Em quantos dias a epidemia estará se alastrando o mais rápido possível? Isto é, quando é que metade da população será contagiada?

Os Exercícios 111 e 112 referem-se à Secção Suplementar 6.7.

111. A extremidade vertical de um tanque de água tem 3 m de largura na borda e 2 m de profundidade, tendo a forma da região limitada pelo eixo x e pelo arco da curva $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{3}\pi x$. Se o tanque estiver cheio de água, ache a força exercida pela pressão da água na extremidade.

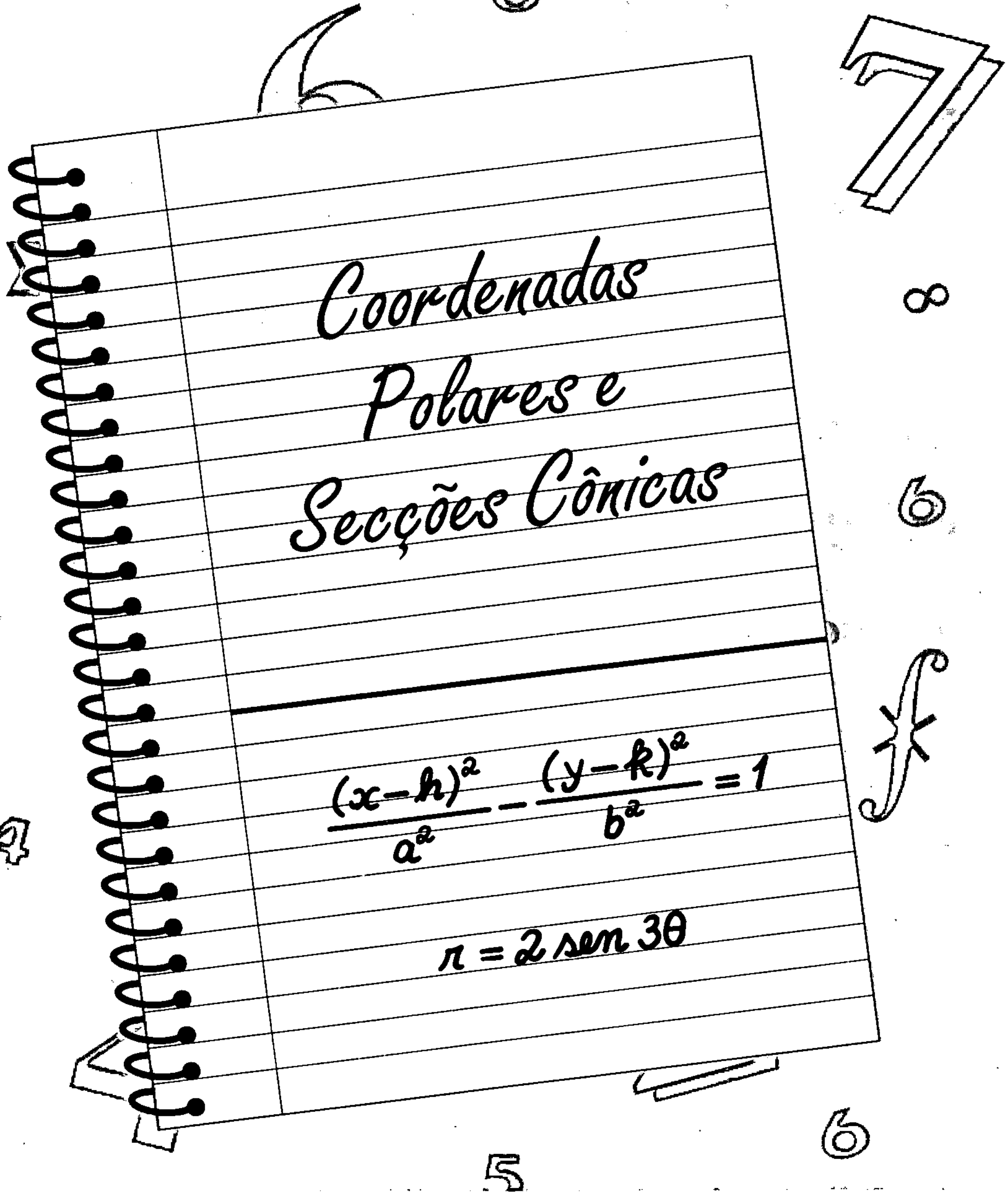
112. Uma tora tem a forma de uma região limitada por uma reta e um arco senóide. Se a tora for submersa verticalmente na água, de modo que a reta seja o limite inferior, 2 m abaixo da superfície da água, ache a força na tora, exercida pela pressão da água.

Os Exercícios 113 e 114 referem-se à Secção Suplementar 9.8. Obtenha o resultado por uma substituição da função hiperbólica.

113. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a^2}\operatorname{cotgh}\left(\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$

114. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\operatorname{senh}\left(\operatorname{tgh}^{-1}\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$

DEZ


Coordenadas
Polares e
Secções Cônicas
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$

O conteúdo deste capítulo é oriundo da Geometria Analítica. Você pode ter estudado parte dessa matéria em um curso preparatório de Cálculo; nesse caso, tais tópicos poderão ser estudados como uma revisão, ou omitidos.

Nas quatro primeiras secções discutimos as *secções cônicas* (ou *cônicas*), que são curvas de intersecção de um plano com um cone circular reto. Há três tipos de curvas que ocorrem dessa forma: a *parábola*, a *elipse* (incluindo a circunferência como caso particular) e a *hipérbole*. A curva obtida depende da inclinação relativa entre o eixo do cone e o plano secante. O matemático grego Apolônio estudou as secções cônicas, em aproximadamente 225 a.C., em termos de Geometria, usando esta visão.

Na Secção 10.1 vamos discutir a parábola e nas duas secções seguintes trataremos da elipse e da hipérbole. Em nosso estudo de cada uma das curvas, primeiro vamos mostrar como o cone e o plano secante são tomados para obter a secção cônica em questão. Em seguida, definimos a curva como um conjunto de pontos em um plano. Foi provado que tal definição é conseqüência da definição da curva como uma secção cônica, pelo matemático belga G.P. Dandelin (1794-1847) em 1822. Variações dessa prova podem ser dadas para uma parábola e para uma hipérbole. Introduzimos a *rotação de eixos* na Secção 10.4, para podermos considerar as cônicas cujos eixos não são nem horizontais, nem verticais.

As Secções de 10.5 a 10.7 são dedicadas a uma discussão de *coordenadas polares* e algumas de suas aplicações. Há um tratamento unificado das secções cônicas que utiliza suas equações polares na Secção 10.8. Na Secção Suplementar 10.9 apresentamos retas tangentes de curvas polares.

10.1 A PARÁBOLA E TRANSLAÇÃO DE EIXOS

No estudo da geometria das secções cônicas, o cone é considerado como tendo duas folhas, estendendo-se indefinidamente em ambas as direções. Uma parte do cone circular reto com duas folhas está na Figura 1. Uma **geratriz** (ou **elemento**) do cone é uma reta que está sobre o cone; todas as geratrizes de um cone contêm o ponto V, chamado **vértice**. Na Figura 2 temos um cone e um plano secante paralelo a uma e somente a uma geratriz. A cônica é uma *parábola*.

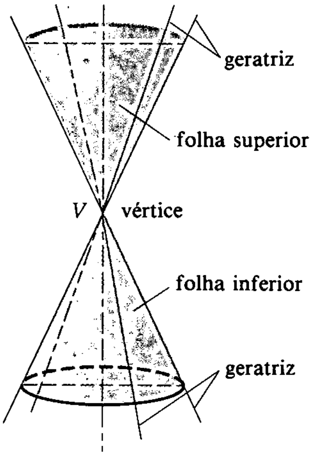


FIGURA 1

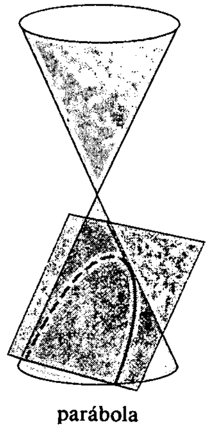


FIGURA 2

10.1.1 DEFINIÇÃO

Uma **parábola** é o conjunto de pontos em um plano, equidistantes de um ponto e de uma reta fixos. O ponto fixo é chamado de **foco** e a reta fixa é chamada de **diretriz**.

Vamos deduzir agora a equação de uma parábola a partir de sua definição. Para que essa equação seja a mais simples possível, vamos escolher o eixo x perpendicular à diretriz, contendo o foco. A origem será tomada sobre o eixo x e no ponto médio, entre a diretriz e o foco. Convém ressaltar que estamos fazendo uma escolha particular dos eixos (e *não* da parábola). Veja a Figura 3.

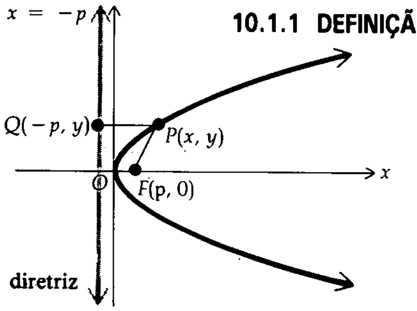


FIGURA 3

Seja p a distância orientada $\overline{OF}$. O foco será o ponto $F(p, 0)$, e a diretriz será a reta de equação $x = -p$. Um ponto $P(x, y)$ estará na parábola se e somente se P for eqüidistante de F e da diretriz. Isto é, se $Q(-p, y)$ for o pé da perpendicular à diretriz passando por P, então P estará na parábola se e somente se

$$|\overline{FP}| = |\overline{QP}|$$

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

e

$$|\overline{QP}| = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

P está sobre a parábola se e somente se

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros obtemos

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 4px$$

Vamos enunciar esse resultado sob a forma de teorema.

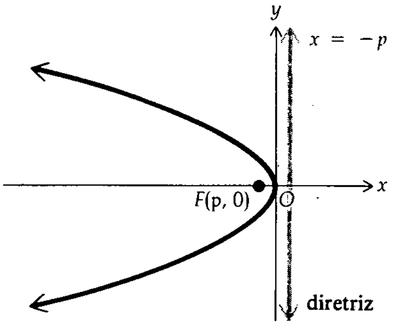


FIGURA 4

10.1.2 TEOREMA A equação da parábola com foco em $(p, 0)$, tendo como diretriz a reta $x = -p$ é

$$y^2 = 4px$$

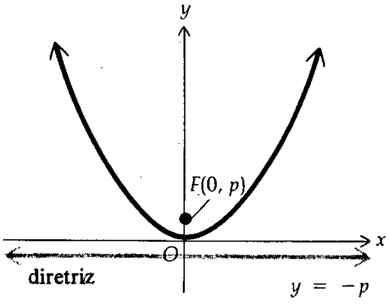


FIGURA 5

Na Figura 3, p é positivo; mas p pode ser negativo pois é a distância orientada $\overline{OF}$. A Figura 4 mostra uma parábola para a qual $p < 0$.

Das Figuras 3 e 4 vemos que para a equação $y^2 = 4px$ a parábola abre-se para a direita, se $p > 0$ e para a esquerda, se $p < 0$. O ponto médio entre o foco e a diretriz da parábola é chamado **vértice**. O vértice das parábolas nas Figuras 3 e 4 é a origem. A reta que passa pelo vértice e pelo foco é chamada de **eixo** da parábola. O eixo das parábolas nas Figuras 3 e 4 é o eixo x.

Na dedução acima, se os eixos x e y forem trocados entre si, então o foco será o ponto $F(0, p)$ e a diretriz será a reta com equação $y = -p$. Uma equação dessa parábola é $x^2 = 4py$.

10.1.3 TEOREMA A equação da parábola com foco em $(0, p)$ e tendo como diretriz a reta $y = -p$ é

$$x^2 = 4py$$

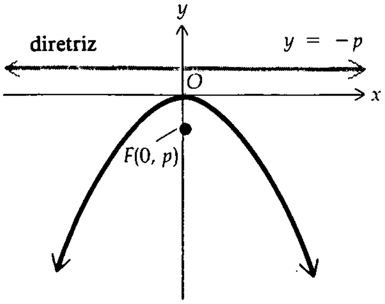


FIGURA 6

Se $p > 0$, a parábola abre-se para cima, conforme mostra a Figura 5; se $p < 0$, a parábola abre-se para baixo, conforme mostra a Figura 6. Em cada caso, o vértice está na origem e o eixo da parábola coincide com o eixo y.

Ao fazer um esboço do gráfico de uma parábola é útil considerar a corda que passa pelo foco, perpendicular ao eixo da parábola, pois os pontos extremos dessa corda são dois pontos sobre a parábola. Tal corda é chamada de *latus rectum* da parábola. O comprimento do *latus rectum* é $|4p|$. (Veja o Exercício 20.)

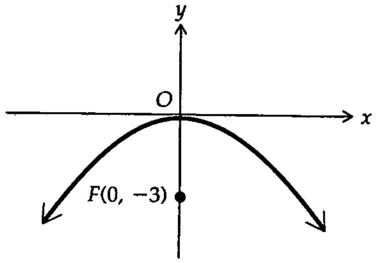


FIGURA 7

EXEMPLO 1 Ache a equação da parábola tendo seu foco em (0, −3) e sendo $y = 3$ sua diretriz. Faça um esboço do gráfico.

Solução Como o foco está no eixo y e também está abaixo da diretriz, a parábola abre-se para baixo e $p = -3$. Logo, a equação da parábola é

$$x^2 = -12y$$

O comprimento do *latus rectum* é

$$|4(-3)| = 12$$

Um esboço do gráfico está na Figura 7.

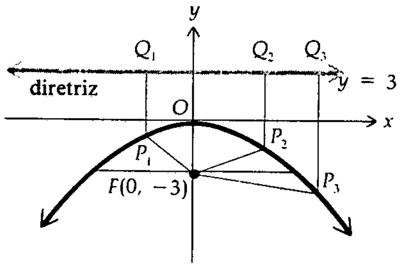


FIGURA 8

Qualquer ponto sobre a parábola da Figura 7 é eqüidistante do foco e da diretriz. Na Figura 8 são mostradas três de tais pontos (P_1, P_2 e P_3) e temos

$$|\overline{FP_1}| = |\overline{P_1Q_1}| \qquad |\overline{FP_2}| = |\overline{P_2Q_2}| \qquad |\overline{FP_3}| = |\overline{P_3Q_3}|$$

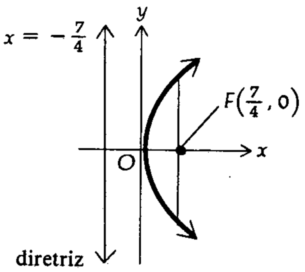


FIGURA 9

EXEMPLO 2 Dada a parábola de equação $y^2 = 7x$, encontre as coordenadas do foco, a equação da diretriz e o comprimento do *latus rectum*. Faça um esboço do gráfico.

Solução A equação dada é da forma $y^2 = 4px$; assim

$$4p = 7$$
$$p = \tfrac{7}{4}$$

Como $p > 0$, a parábola abre-se para a direita. O foco está no ponto $F(\frac{7}{4}, 0)$. A equação da diretriz é $x = -\frac{7}{4}$. O comprimento do *latus rectum* é 7. Um esboço do gráfico está na Figura 9.

Para encontrar a equação geral de uma parábola com vértice num ponto distinto da origem e com diretriz paralela a um eixo coordenado, consideramos primeiro o conceito de *translação de eixos*.

Note que o formato da curva não é afetado pela posição dos eixos coordenados, mas a equação da curva é alterada.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Se uma circunferência com raio 3 tiver seu centro no ponto (4, −1), então a sua equação será

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$$

Entretanto se a origem estiver no centro, a circunferência terá uma equação mais simples, ou seja,

$$x^2 + y^2 = 9$$ ◀

Se os eixos coordenados puderem ser tomados como desejarmos, então faremos uma escolha tal que as equações resultem o mais simples possível. Se os eixos forem dados, contudo, freqüentemente queremos encontrar a equação mais simples da curva dada, referida a outro conjunto de eixos.

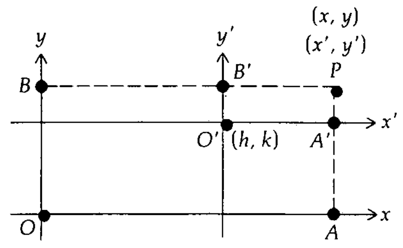


FIGURA 10

Em geral, se no plano, com x e y dados, escolhermos os novos eixos coordenados paralelos àqueles dados anteriormente, dizemos que houve uma **translação de eixos** no plano.

Vamos supor que os eixos x e y sejam transladados para os eixos x' e y' com origem no ponto (h, k) em relação aos eixos dados. Vamos supor também que os números positivos estejam do mesmo lado da origem tanto em relação aos eixos x' e y' quanto em relação aos eixos x e y. Veja a Figura 10.

Um ponto P no plano, tendo coordenadas (x, y) em relação ao sistema de coordenadas dado, terá coordenadas (x', y') em relação aos novos eixos. Para obter a relação entre esses dois conjuntos de coordenadas, trace uma reta por P, paralela aos eixos y e y' e também uma reta por P, paralela aos eixos x e x'. Suponha que a primeira reta intercepte o eixo x num ponto A e x' num ponto A', enquanto a segunda reta intercepta o eixo y num ponto B e y' num ponto B'.

Em relação aos eixos x e y, as coordenadas de P são (x, y), as coordenadas de A são $(x, 0)$ e as de A' são (x, k). Como $\overline{A'P} = \overline{AP} - \overline{AA'}$,

$$y' = y - k \quad \text{e} \quad y = y' + k$$

Em relação aos eixos x e y, as coordenadas de B são $(0, y)$, e as coordenadas de B' são (h, y). Como $\overline{B'P} = \overline{BP} - \overline{BB'}$,

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad x = x' + h$$

Provamos o teorema a seguir

10.1.4 TEOREMA Se (x, y) representa um ponto P em relação a um dado conjunto de eixos e (x', y') for a representação de P após os eixos terem sido transladados para uma nova origem com coordenadas (h, k) em relação aos eixos dados , então

$$x = x' + h \quad \text{e} \quad y = y' + k$$

$$\Leftrightarrow \quad x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k$$

Se uma equação de uma curva é dada em x e y, então uma equação em x' e y' será obtida substituindo x por $x' + h$ e y por $y' + k$. O gráfico de uma equação em x e y em relação aos eixos x e y é exatamente o mesmo conjunto de pontos que o gráfico da equação correspondente em x' e y', em relação aos eixos x' e y'.

EXEMPLO 3 Dada a equação

$$x^2 + 10x + 6y + 19 = 0$$

ache a equação do gráfico em relação aos eixos x' e y' após uma translação de eixos para a nova origem $(-5, 1)$. Faça um esboço do gráfico e mostre ambos os conjuntos de eixos.

Solução Um ponto P representado por (x, y) em relação ao sistema de eixos anterior, tem a representação (x', y') em relação ao novo sistema de eixos. Então, do Teorema 10.1.4, com $h = -5$ e $k = 1$,

$$x = x' - 5 \quad \text{e} \quad y = y' + 1$$

Substituindo esses valores de x e y na equação dada, obtemos

$$(x' - 5)^2 + 10(x' - 5) + 6(y' + 1) + 19 = 0$$

$$x'^2 - 10x' + 25 + 10x' - 50 + 6y' + 6 + 19 = 0$$

$$x'^2 = -6y'$$

O gráfico dessa equação em relação a x' e y' é uma parábola com vértice na origem, abrindo-se para baixo, e com $4p = -6$. O gráfico em relação aos eixos x e y é, então, uma parábola tendo seu vértice em $(-5, 1)$, seu foco em $(-5, -\frac{1}{2})$ e a reta $y = \frac{5}{2}$ como sua diretriz. Um esboço do gráfico com ambos os conjuntos de eixos está na Figura 11.

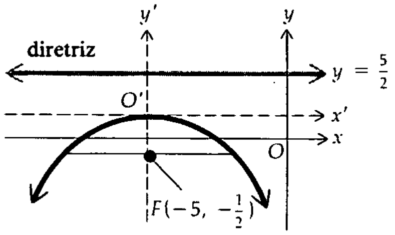


FIGURA 11

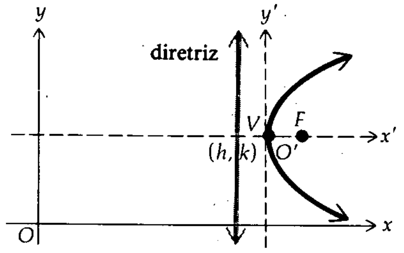


FIGURA 12

O exemplo acima ilustra como uma equação pode ser reduzida a uma forma mais simples por uma translação de eixos adequada.

Vamos aplicar a translação de eixos para encontrar a equação geral da parábola tendo diretriz paralela aos eixos coordenados e vértice no ponto (h, k). Em particular, vamos supor que a diretriz seja paralela ao eixo y. Se o vértice estiver no ponto $V(h, k)$, então a diretriz terá equação $x = h - p$ e o foco estará no ponto $F(h + p, k)$. Sejam x' e y' eixos tais que a origem O' esteja em $V(h, k)$. Veja a Figura 12.

A equação da parábola da Figura 12 em relação aos eixos x' e y' é

$$y'^2 = 4px'$$

Para obter uma equação dessa parábola em relação aos eixos x e y, substituímos x' por $x - h$ e y' por $y - k$, o que dá

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

O eixo dessa parábola é paralelo ao eixo x.

Analogamente, se a diretriz da parábola for paralela ao eixo x e o vértice estiver em $V(h, k)$, então o seu foco estará em $F(h, k + p)$ e $y = k - p$ será a equação da diretriz, e uma equação da parábola em relação aos eixos x e y será

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

O eixo dessa parábola é paralelo ao eixo y. Provamos então o teorema a seguir.

10.1.5 TEOREMA Se p for a distância orientada do vértice ao foco, a equação da parábola com vértice em (h, k) e com eixo paralelo ao eixo x será

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \qquad (1)$$

Uma parábola com o mesmo vértice e com eixo paralelo ao eixo y tem por equação

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \qquad (2)$$

EXEMPLO 4 Ache uma equação da parábola que tenha a reta $y = 1$ como diretriz e o ponto $F(-3, 7)$ como foco. Faça um esboço do gráfico dessa parábola.

Solução Como a diretriz é paralela ao eixo x, o eixo será paralelo ao eixo y e a equação terá a forma (2).

Como o vértice V está no ponto médio entre a diretriz e o foco, V tem coordenadas $(-3, 4)$. A distância orientada do vértice ao foco é p; assim

$$p = 7 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad p = 3$$

Logo, a equação é

$$(x + 3)^2 = 12(y - 4)$$

Elevando ao quadrado e simplificando teremos

$$x^2 + 6x - 12y + 57 = 0$$

Um esboço do gráfico da parábola está na Figura 13.

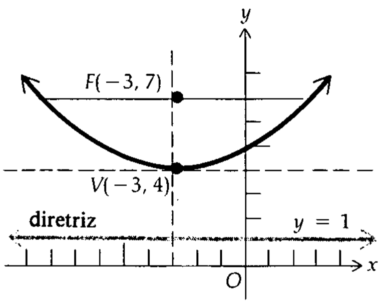


FIGURA 13

EXEMPLO 5 Dada a parábola com equação

$$y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$$

ache o vértice, o foco, a equação da diretriz, a equação do eixo e o comprimento do *latus rectum*. Faça um esboço do gráfico.

Solução Reescreva a equação dada sob a forma

$$y^2 + 8y = -6x - 1$$

Completando o quadrado dos termos envolvendo y no primeiro membro da equação e somando 16 de ambos os lados obtemos

$$y^2 + 8y + 16 = -6x + 15$$

$$(y + 4)^2 = -6(x - \tfrac{5}{2})$$

Comparando essa equação com (1), temos

$$k = -4 \qquad h = \tfrac{5}{2}$$

e

$$4p = -6 \quad \Leftrightarrow \quad p = -\tfrac{3}{2}$$

Logo, o vértice está em $(\frac{5}{2}, -4)$, a equação do eixo é $y = -4$ o foco está em $(1, -4)$, a equação da diretriz é $x = 4$, e o comprimento do *latus rectum* é 6. Um esboço do gráfico na Figura 14.

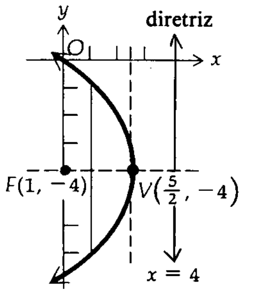


FIGURA 14

Na Secção 1.3 há uma discussão da equação geral do segundo grau em duas variáveis:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3}$$

onde $B = 0$ e $A = C$. Então, o gráfico de (3) é uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio. Quando o gráfico for um ponto ou o conjunto vazio, dizemos que ele é uma *circunferência degenerada*. Consideremos agora (3), onde $B = 0$ e $AC = 0$. Neste caso, $A = 0$ ou $C = 0$, mas ambos não podem ser nulos pois então teríamos, em (3), A, B e C nulos e (3) não seria uma equação do segundo grau. Suponha em (3) $B = 0$, $A = 0$ e $C \neq 0$, então temos a equação

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4}$$

Se $D \neq 0$, esta será a equação de uma parábola, pois ela pode ser obtida de (1) realizando-se as operações indicadas e reagrupando os termos. Se em (4) $D = 0$, então a equação torna-se

$$Cy^2 + Ey + F = 0$$

O gráfico dessa equação pode ser duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio; qualquer um desses gráficos será chamado de *parábola degenerada.*

► **ILUSTRAÇÃO 2** O gráfico da equação $4y^2 - 9 = 0$ são duas retas paralelas; $9y^2 + 6y + 1 = 0$ é a equação de uma reta e $2y^2 + y + 1 = 0$ não é satisfeita por nenhum valor real de y. ◄

Uma discussão análoga ocorre em (3) $B = 0$, $C = 0$ e $A \neq 0$. Os resultados estão resumidos no teorema a seguir.

10.1.6 TEOREMA Se na equação geral do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F = 0$$

$B = 0$ e $A = 0$ e $C \neq 0$ ou $C = 0$ e $A \neq 0$, então o gráfico será um dos seguintes: uma parábola, duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

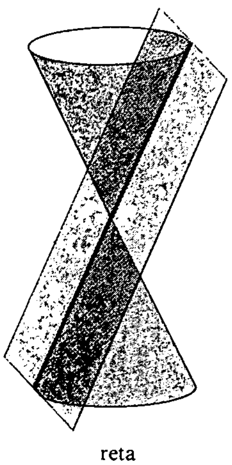


FIGURA 15

No começo desta secção indicamos que uma parábola é obtida como uma secção cônica quando o plano secante é paralelo a uma e somente a uma geratriz do cone. Se o plano secante contiver o vértice do cone e apenas uma geratriz, como na Figura 15, então teremos uma reta que é uma parábola degenerada. A parábola degenerada que consiste em duas retas paralelas não pode ser obtida como uma secção cônica, a não ser que consideremos um cilindro circular como um cone degenerado (com vértice no infinito). Então, um plano paralelo aos elementos do cilindro e que corte dois elementos distintos produz a parábola degenerada que consiste em duas retas paralelas.

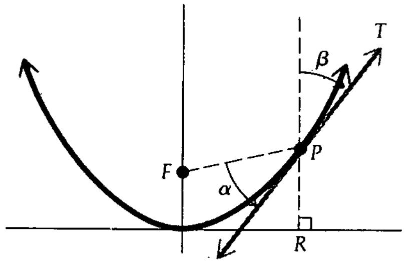


FIGURA 16

Existe uma propriedade interessante das parábolas que tem aplicações na construção de holofotes, faróis dianteiros dos automóveis e telescópios. Na Figura 16, a reta PT é a reta tangente no ponto P ao gráfico da parábola. O ponto F é o foco da parábola e α é a medida do ângulo entre o segmento de reta FP e a reta tangente PT. A reta PR é paralela ao eixo da parábola e β é a medida do ângulo entre PR e PT. No Exercício 48 será pedido que você prove que $\alpha = \beta$. Devido a essa igualdade, num espelho parabólico de um holofote, raios de luz de uma fonte localizada no foco são refletidos ao longo de retas paralelas ao eixo. Um princípio similar envolve os refletores parabólicos nos faróis dianteiros de um automóvel. Para um espelho parabólico num telescópio refletor, ocorre uma situação inversa, onde raios de luz de um objeto no céu, que incidem no espelho paralelamente ao eixo, são refletidos por ele e passam pelo foco.

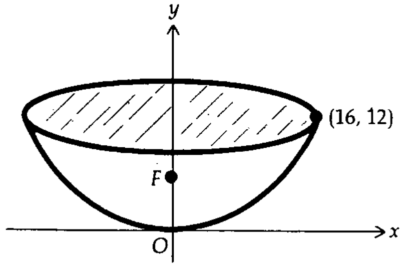


FIGURA 17

EXEMPLO 6 Um espelho parabólico tem uma profundidade de 12 cm no centro e o diâmetro na face do espelho é de 32 cm. Ache a distância do vértice ao foco.

Solução Veja a Figura 17. Os eixos coordenados são escolhidos de tal forma que a parábola tenha seu vértice na origem, seu eixo ao longo do eixo y e abra-se para cima. Logo, a equação da parábola é da forma

$$x^2 = 4py$$

onde p cm é a distância do vértice ao foco. Como o ponto (16, 12) está na parábola, suas coordenadas satisfazem a equação e temos

$$16^2 = 4p(12)$$

$$p = \tfrac{16}{3}$$

Logo, a distância do vértice ao foco é $5\,\frac{1}{3}$ cm.

Há outras aplicações práticas de parábolas. A trajetória de um projétil será uma parábola se o movimento for considerado num plano e a resistência do ar for desprezada. Às vezes, os arcos são parabólicos e os cabos de suspensão de pontes podem ter a forma de uma parábola. Antenas para receber os sinais de televisão via satélite são, também, parabólicas.

EXERCÍCIOS 10.1

Para cada uma das parábolas nos Exercícios de 1 a 8, ache as coordenadas do foco, a equação da diretriz e o comprimento do latus rectum. *Faça um esboço da parábola.*

1. $x^2 = 4y$
2. $y^2 = 6x$
3. $y^2 = -8x$
4. $x^2 = -16y$
5. $x^2 + y = 0$
6. $y^2 + 5x = 0$
7. $2y^2 - 9x = 0$
8. $3x^2 + 4y = 0$

Nos Exercícios de 9 a 17, ache uma equação da parábola com as propriedades dadas.

9. Foco (5, 0); diretriz $x = -5$.
10. Foco (0, 4); diretriz $y = -4$.
11. Foco (0, −2); diretriz $y - 2 = 0$.
12. Foco $(-\frac{5}{3}, 0)$; diretriz $5 - 3x = 0$.
13. Foco $(\frac{1}{2}, 0)$ diretriz $2x + 1 = 0$
14. Foco $(0, \frac{2}{3})$; diretriz $3y + 2 = 0$.
15. Vértice (0, 0); aberta para esquerda; o comprimento do *latus rectum* é 6.
16. Vértice (0, 0); aberta para cima; o comprimento do *latus rectum* é 3.
17. Vértice (0, 0); diretriz $2x = -5$.
18. Ache a equação da parábola que tem vértice na origem, eixo no eixo x e passa pelo ponto (2, −4).
19. Ache a equação da parábola que tem vértice na origem, eixo no eixo y e passa pelo ponto (−2, −4).
20. Prove que o comprimento do *latus rectum* de uma parábola é $|4p|$.

Nos Exercícios de 21 a 26, ache uma nova equação para o gráfico da equação dada após uma translação de eixos para a nova origem, conforme está indicado. Trace os eixos originais e os novos e faça um esboço do gráfico.

21. $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$; (−3, −2)
22. $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 18 = 0$; (3, 5)
23. $y^2 - 6x + 9 = 0$; $(\frac{3}{2}, 0)$
24. $y^2 + 3x - 2y + 7 = 0$; (−2, 1)
25. $y - 4 = 2(x - 1)^3$; (1, 4)
26. $(y + 1)^2 = 4(x - 2)^3$; (2, −1)

Nos Exercícios de 27 a 32, ache o vértice, o foco, uma equação do eixo e uma equação da diretriz da parábola dada. Faça um esboço do gráfico.

27. $x^2 + 6x + 4y + 8 = 0$
28. $4x^2 - 8x + 3y - 2 = 0$
29. $y^2 + 6x + 10y + 19 = 0$
30. $3y^2 - 8x - 12y - 4 = 0$
31. $2y^2 = 4y - 3x$
32. $y = 3x^2 - 3x + 3$

Nos Exercícios de 33 a 40, ache uma equação da parábola com as propriedades dadas. Faça um esboço do gráfico.

33. Vértice em (2, 4); foco em (−3, 4).
34. Vértice em (1, −3); diretriz $y = 1$.
35. Foco em (−1, 7); diretriz $y = 3$.
36. Foco em $(-\frac{3}{4}, 4)$; diretriz $x = -\frac{5}{4}$.
37. Vértice em (3, −2); eixo $x = 3$; comprimento do *latus rectum* é 6.
38. Diretriz $x = -2$; eixo $y = 4$; comprimento do *latus rectum* é 8.
39. Vértice em (−4, 2); eixo $y = 2$; passa pelo ponto (0, 6).
40. Os extremos do *latus rectum* são (1, 3) e (7, 3).

41. Os extremos do *latus rectum* de uma parábola são (5, k) e (−5, k). Se o vértice da parábola está na origem e ela se abre para baixo, ache (a) o valor de k; (b) a equação da parábola.
42. Suponha que a água escoando por um cano horizontal a 25 m acima do chão descreva uma parábola cujo vértice está na extremidade do cano. Se num ponto 8 m abaixo da linha do cano o fluxo da água curvou-se 10 m para fora de uma linha vertical que passa pela extremidade do cano, a que distância dessa linha vertical a água atingirá o solo?
43. O cabo de uma ponte suspensa tem a forma de uma parábola quando a carga é uniformemente distribuída na horizontal. A distância entre duas colunas é 150 m, os pontos de suporte do cabo nas colunas estão 22 m acima da pista e o ponto mais baixo do cabo está 7 m acima da pista. Ache a distância vertical do cabo a um ponto na pista a 15 m do pé de uma coluna.

44. Um arco parabólico tem uma altura de 20 m e uma largura de 36 m na base. Se o vértice da parábola estiver no topo do arco, a que altura acima da base ele terá 18 m de largura?

45. Prove que, sobre uma parábola, o ponto mais próximo do foco é o vértice.

46. Suponha que a órbita de determinado cometa seja uma parábola com o Sol no foco. Quando o cometa está a 100 milhões de quilômetros do Sol, o ângulo entre o eixo da parábola e a reta do Sol até o cometa é de 45°. Use o resultado do Exercício 45 para determinar a menor distância entre o cometa e o Sol.

47. Um telescópio refletor tem um espelho parabólico para o qual a distância do vértice ao foco é 3 m. Se o diâmetro na superfície do espelho for 64 cm, qual a profundidade do espelho no centro?

48. Na Figura 16, prove que $\alpha = \beta$. (*Sugestão:* escolha os eixos coordenados de tal forma que a parábola tenha seu vértice na origem e seu eixo ao longo do eixo y e que se abra para cima. Seja Q a intersecção da reta tangente PT com o eixo y. Prove que $\alpha = \beta$, mostrando que ΔQPF é isósceles.)

49. A equação da diretriz de uma parábola é $x + y = 0$ e seu foco está no ponto $(1, 1)$. Ache (a) a equação do eixo da parábola, (b) as coordenadas do vértice e (c) o comprimento do *latus rectum*.

50. Se uma parábola tiver seu foco na origem e o eixo x como eixo, prove que ela deve ter uma equação da forma $y^2 = 4kx + 4k^2$, $k \neq 0$.

51. Se os eixos forem transladados para uma nova origem tendo coordenadas (h, k), mostre que após a translação a equação $y = \text{sen}\, x$ torna-se $y' = A \,\text{sen}\, x' + B \cos x' + C$, onde A, B e C são constantes. Ache A, B e C em termos de h e k. Mostre que $A^2 + B^2 = 1$.

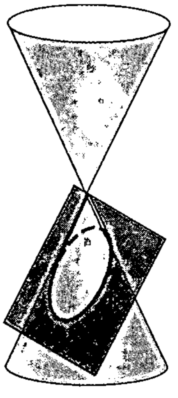
52. Mostre que após uma translação de eixos para a nova origem $(-\frac{1}{4}\pi, 1)$ a equação $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen}\, x + \cos x) + 1$ torne-se $y' = \text{sen}\, x'$.

53. Usando os resultados dos Exercícios 51 e 52 como referência, determine uma translação de eixos tal que a equação $y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{sen}\, x - \cos x) - 3$ torne-se $y' = \text{sen}\, x'$.

54. Usando os resultados dos Exercícios 51 e 52 como referência, determine uma translação de eixos tal que a equação $y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\, \text{sen}\, x + \cos x) + 2$ torne-se $y' = \text{sen}\, x'$.

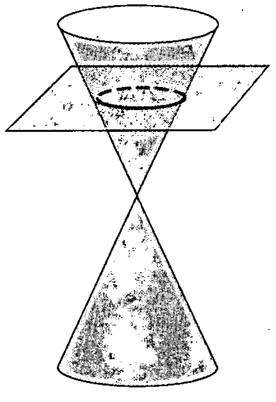
10.2 A ELIPSE

Uma *elipse* é obtida como uma secção cônica, se o plano secante não for paralelo a nenhuma geratriz e, neste caso, o plano intercepta todas as geratrizes como na Figura 1. Um caso especial da elipse é a circunferência, conforme mostra a Figura 2, formada quando o plano secante que intercepta todas as geratrizes também for perpendicular ao eixo do cone. Vamos definir agora a elipse como um conjunto de pontos num plano.



elipse

FIGURA 1



circunferência

FIGURA 2

10.2.1 DEFINIÇÃO

Elipse é o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante. Os pontos fixos são chamados de **focos**.

Seja $2c$ a distância não orientada entre os focos, onde $c > 0$. Para obter a equação de uma elipse escolhemos o eixo x como a reta que passa pelos focos F e F' e escolhemos a origem como sendo o ponto médio do segmento FF'.

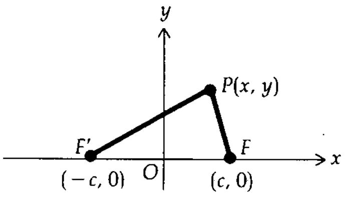


FIGURA 3

Veja a Figura 3. Os focos F e F' têm coordenadas $(c, 0)$ e $(-c, 0)$, respectivamente. Seja $2a$ a soma constante mencionada na Definição 10.2.1. Então, $a > c$ e o ponto $P(x, y)$ da Figura 3 será um ponto qualquer da elipse se e somente se

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a \tag{1}$$

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

P está sobre a elipse se e somente se

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Vamos simplificar essa equação escrevendo-a de tal maneira que um radical fique à esquerda e outro à direita e, em seguida, elevaremos ao quadrado ambos os membros. Assim obtemos

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \tag{2}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \tag{3}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x \tag{4}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \tag{5}$$

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{6}$$

Como $a > c$, $a^2 - c^2 > 0$ e podemos fazer

$$b^2 = a^2 - c^2 \tag{7}$$

Substituindo essa equação em (6) obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8}$$

Assim mostramos que as coordenadas (x, y) de qualquer ponto P sobre a elipse satisfazem a equação (8). Para provar que (8) é a equação da elipse, precisamos mostrar também que todo ponto P cujas coordenadas (x, y) satisfazem (8) está sobre a elipse. Começamos com (8) e executamos as etapas em ordem inversa para obter (1). Para ir de (5) para (4) precisamos verificar que

$$a + \frac{c}{a}x \geqslant 0 \tag{9}$$

e para ir de (3) para (2) precisamos verificar que

$$2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \geqslant 0 \tag{10}$$

Será pedido que você faça isto no Exercício 42. Um método alternativo para obter (1) a partir de (8) está resumido no Exercício 43. Como resultado dessa discussão temos o teorema a seguir.

10.2.2 TEOREMA Se $2a$ for a constante a que se refere a Definição 10.2.1 e a elipse tiver seus focos em $(c, 0)$ e $(-c, 0)$, então para $b^2 = a^2 - c^2$, a equação da elipse será

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{11}$$

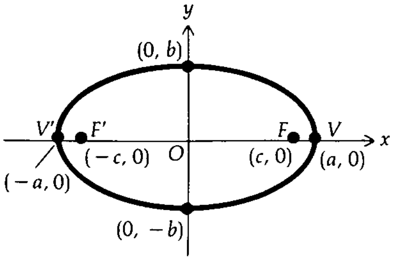


FIGURA 4

Para obter um esboço do gráfico da elipse da equação (11), observamos primeiro que o gráfico é simétrico em relação a ambos os eixos x e y. Além disso, o gráfico intercepta o eixo x nos pontos $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ e intercepta o eixo y nos pontos $(0, b)$ e $(0, -b)$. Veja a Figura 4 e tome-a como referência ao ler o próximo parágrafo.

A reta que passa pelos focos é chamada de **eixo principal** da elipse. Para a elipse do Teorema 10.2.2, o eixo x é o eixo principal. Os pontos de intersecção da elipse com seu eixo principal são chamados de **vértices**. Assim, para essa elipse, os vértices são $V(a, 0)$ e $V'(-a, 0)$. O ponto sobre o eixo principal no ponto médio entre os dois vértices é chamado de **centro** da elipse. A origem é o centro dessa elipse. O segmento do eixo principal entre os dois vértices é chamado de **eixo maior** da elipse e seu comprimento é $2a$ unidades. Então, estabelecemos que a é o número de unidades no comprimento do semi-eixo maior da elipse. Para essa elipse o segmento do eixo y entre os pontos $(0, b)$ e $(0, -b)$ é chamado de **eixo menor**. Seu comprimento é de $2b$ unidades. Logo, b é o número de unidades do comprimento do semi-eixo menor. Observe, de (7), que $a > b$.

A elipse é chamada de **cônica central**, em contraste com a parábola que não tem centro, pois só tem um vértice.

EXEMPLO 1 Dada a elipse com a equação

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

ache os vértices, os focos e as extremidades do eixo menor. Faça um esboço da elipse, mostrando os focos.

Solução Da equação da elipse, $a^2 = 25$ e $b^2 = 16$; assim $a = 5$ e $b = 4$. Logo, os vértices estão nos pontos $V(5, 0)$ e $V'(-5, 0)$ e as extremidades do eixo menor estão nos pontos $B(0, 4)$ e $B'(0, -4)$. De (7),

$$\begin{aligned} c^2 &= 25 - 16 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Logo, $c = 3$ e assim os focos estão em $F(3, 0)$ e $F'(-3, 0)$. Um esboço da elipse e se seus focos está na Figura 5.

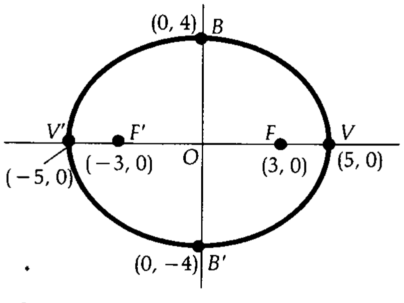


FIGURA 5

Da Definição de elipse, segue que se P for um ponto qualquer da elipse, $|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 10$.

EXEMPLO 2 Um arco tem a forma de uma semi-elipse. Ele tem 48 m de largura na base e uma altura de 20 m. Qual a largura do arco a uma altura de 10 m acima da base?

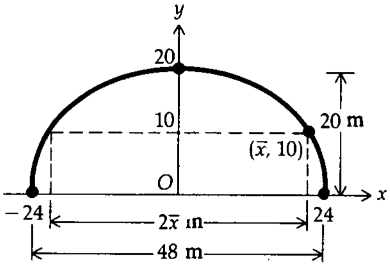


FIGURA 6

Solução A Figura 6 mostra um esboço do arco e os eixos coordenados escolhidos de tal forma que o eixo x esteja ao longo da base e a origem esteja no ponto médio da base. Então a elipse tem como eixo principal o eixo x e seu centro está na origem, $a = 24$ e $b = 20$. A equação da elipse é da forma de (11):

$$\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{400} = 1$$

Seja $2\bar{x}$ o número de metros do comprimento do arco a uma altura de 10 m acima da base. Logo, o ponto $(\bar{x}, 10)$ está na elipse. Assim,

$$\frac{\bar{x}^2}{576} + \frac{100}{400} = 1$$

$$\bar{x}^2 = 432$$

$$\bar{x} = 12\sqrt{3}$$

Então, a uma altura de 10 m acima da base a largura do arco será $24\sqrt{3}$ m.

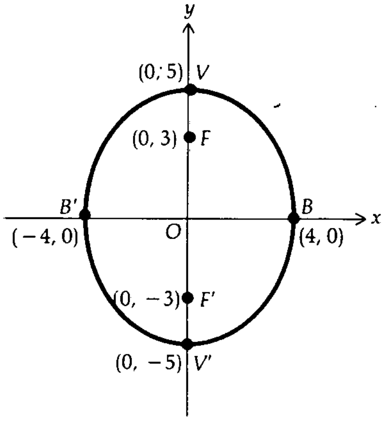


FIGURA 7

Se uma elipse tiver seu centro na origem e seu eixo principal sobre o eixo y, então a equação da elipse será da forma

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1} \tag{12}$$

que é obtida de (11) substituindo x por y.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Como para uma elipse $a > b$, segue que a elipse com equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

tem seu foco sobre o eixo y. Essa elipse tem a mesma forma que a elipse do Exemplo 1. Os vértices estão em (0, 5) e (0, −5) e os focos estão em (0, 3) e (0, −3). Um esboço do gráfico dessa elipse está na Figura 7. ◀

Se o centro de uma elipse estiver no ponto (h, k) em vez de estar na origem, e se o eixo principal for paralelo a um dos eixos coordenados, então por uma translação de eixos tal que o ponto (h, k) seja a nova origem, a equação da elipse $\bar{x}^2/a^2 + \bar{y}^2/b^2 = 1$, se o eixo principal for horizontal e $\bar{y}^2/a^2 + \bar{x}^2/b^2 = 1$, se o eixo principal for vertical. Como $\bar{x} = x - h$ e $\bar{y} = y - k$, essas equações em termos de x e y resultam

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \tag{13}$$

se o eixo principal for horizontal e

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1} \tag{14}$$

se o eixo principal for vertical.

Lembrando que dada a equação geral de segundo grau em duas variáveis

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

quando $B = 0$ e $A = C$, o gráfico será uma circunferência ou um caso degenerado de circunferência, sendo um ponto ou o conjunto vazio. Vamos discutir agora essa equação quando $B = 0$ e A e C não são necessariamente iguais, mas $AC > 0$.

Se eliminarmos as frações e combinarmos os termos em (13) e (14), obteremos uma equação da forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{15}$$

onde $A \neq C$ se $a \neq b$ e $AC > 0$. Pode ser mostrado, completando os quadrados em x e y, que uma equação da forma (15) pode ser posta na forma

$$\frac{(x-h)^2}{\frac{1}{A}} + \frac{(y-k)^2}{\frac{1}{C}} = G \tag{16}$$

Se $AC > 0$ então A e C têm o mesmo sinal. Se G tiver o mesmo sinal que A e C, então (16) poderá ser escrito na forma (13) ou (14). Assim sendo, o gráfico de (15) é uma elipse.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Dada a equação

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$$

que pode ser escrita como

$$6(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) = -51$$

Completando os quadrados em x e y obtemos

$$6(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = -51 + 24 + 81$$

$$6(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 54$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{6}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{1}{9}} = 54$$

Essa é uma equação na forma (16). Dividindo ambos os membros por 54 teremos

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{6} = 1$$

que tem a forma (13) ◀

Se em (16) G tiver sinal oposto a A e C, então (16) não será satisfeita para nenhum valor real de x e de y. Logo, o gráfico de (15) será o conjunto vazio.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Suponha que (15) seja

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 115 = 0$$

Então, após completar os quadrados em x e y, teremos

$$6(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = -115 + 24 + 81$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{6}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{1}{9}} = -10 \tag{17}$$

Essa equação tem a forma (16) onde $G = -10$, $A = 6$ e $C = 9$. Para todos os valores de x e y, o primeiro membro de (17) é não-negativo; logo, o gráfico de (17) é o conjunto vazio. ◀

Se $G = 0$ em (16), então a equação é satisfeita somente pelo ponto (h, k). Logo, o gráfico de (15) é um ponto.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Uma vez que a equação

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 105 = 0$$

pode ser escrita como

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{6}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{1}{9}} = 0$$

o seu gráfico é o ponto (2, 3). ◀

Se o gráfico de (15) for um ponto ou o conjunto vazio, diremos que o gráfico será degenerado.

Se $A = C$ em (15), temos uma circunferência ou um caso de circunferência degenerado, conforme já mencionamos antes. A circunferência é uma forma limite de elipse. Esse fato pode ser mostrado considerando a relação entre a, b e c para uma elipse:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Dessa equação, vemos que à medida que c tende a zero, b^2 tende a a^2. Se $b^2 = a^2$, (13) e (14) tornam-se

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

que é a equação de uma circunferência com centro em (h, k) e raio a. Os resultados da Secção 1.3 para a circunferência são os mesmos que aqueles obtidos de (15) para a elipse.

Os resultados da discussão acima estão resumidos no teorema a seguir.

10.2.3 TEOREMA

Se na equação genérica de segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$B = 0$ e $AC > 0$, então o gráfico será uma elipse, um ponto, ou ainda, o conjunto vazio. Além disso, se $A = C$, então o gráfico será uma circunferência ou um ponto, ou ainda, o conjunto vazio.

O caso degenerado de elipse, um ponto, será obtido como uma secção cônica se o plano secante passar pelo vértice do cone, mas não contiver nenhuma geratriz. Veja a Figura 8.

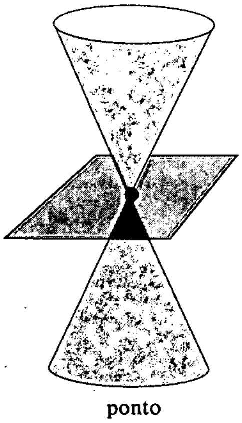


FIGURA 8

EXEMPLO 3 Determine o gráfico da equação

$$25x^2 + 16y^2 + 150x - 128y - 1.119 = 0$$

Solução Do Teorema 10.2.3, como $B = 0$ e $AC > 0$, o gráfico é uma elipse ou é degenerado. Completando os quadrados em x e y teremos

$$25(x^2 + 6x + 9) + 16(y^2 - 8y + 16) = 1.119 + 225 + 256$$

$$25(x+3)^2 + 16(y-4)^2 = 1.600$$

$$\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y-4)^2}{100} = 1 \qquad (18)$$

Essa equação é da forma (14); assim, o gráfico é uma elipse com eixo principal paralelo ao eixo y e centro em $(-3, 4)$.

EXEMPLO 4 Dada a elipse do Exemplo 3, ache os vértices, os focos e as extremidades do eixo menor. Faça um esboço da elipse e mostre os focos.

Solução De (18) segue que $a = 10$ e $b = 8$. Como o centro da elipse está em $(-3, 4)$ e o eixo principal é vertical, os vértices estão nos pontos $V(-3, 14)$ e $V'(-3, -6)$. As extremidades do eixo menor estão nos pontos $B(5, 4)$ e $B'(-11, 4)$. Como $b^2 = a^2 - c^2$,

$$64 = 100 - c^2$$

$$c^2 = 36$$

$$c = 6$$

Assim, a distância do centro a um foco é 6 e, portanto, os focos estão nos pontos $F(-3, 10)$ e $F'(-3, -2)$. Um esboço da elipse com os pontos pedidos está na Figura 9.

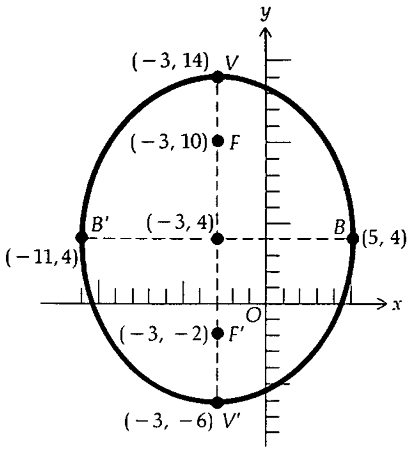


FIGURA 9

EXEMPLO 5 Ache a equação de elipse, dados os focos $(-8, 2)$ e $(4, 2)$ e cuja constante mencionada na Definição 10.2.1 é 18. Faça um esboço da elipse.

Solução O centro da elipse é o ponto médio do segmento que une os focos; logo é $(-2, 2)$. A distância entre os focos de uma elipse é $2c$ e a distância entre $(-8, 2)$ e $(4, 2)$ é 12. Logo $c = 6$. A constante mencionada na Definição 10.2.1 é $2a$; assim $2a = 18$ e $a = 9$. Como $b^2 = a^2 - c^2$,

$$b^2 = 81 - 36$$

$$b^2 = 45$$

$$b = 3\sqrt{5}$$

O eixo principal é paralelo ao eixo x; logo, a equação da elipse é da forma (13). Como (h, k) é o ponto $(-2, 2)$, $a = 9$ e $b = 3\sqrt{5}$, a equação pedida é

$$\frac{(x+2)^2}{81} + \frac{(y-2)^2}{45} = 1$$

Um esboço dessa elipse está na Figura 10.

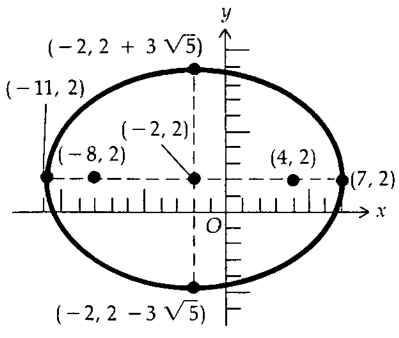


FIGURA 10

Existem aplicações de elipses em Astronomia, pois as órbitas dos planetas e satélites são elipses. Elas também são usadas para fazer engrenagens de máquinas. Arcos e pontes têm por vezes a forma elíptica.

Existe uma propriedade reflexiva da elipse que é análoga à que foi mostrada para a parábola na Figura 16 da Secção 10.1. Para a elipse, consulte a Figura 11, onde a reta PT é a reta tangente em P ao gráfico da elipse, com focos em F e F'. A medida do ângulo entre o segmento de reta FP e a reta tangente PT é α, e a medida do ângulo entre o segmento de reta $F'P$ e a reta tangente PT é β. No Exercício 31 será pedido que você prove a igualdade $\alpha = \beta$. Logo, um raio de luz de uma fonte colocada em um foco de um espelho elíptico atingindo o espelho é refletido numa reta que passa pelo outro foco. Essa proprie-

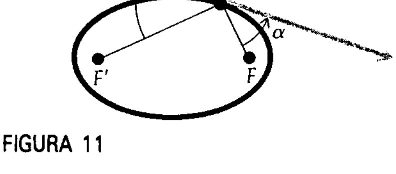


FIGURA 11

dade das elipses é usada nas chamadas "galerias dos cochichos", onde o teto tem secções transversais que são arcos de elipse com foco comum. Uma pessoa localizada em um foco F pode ouvir uma outra pessoa cochichando no outro foco F', pois as ondas sonoras emitidas em F' atingem o forro e são refletidas por ele ao ouvinte em F. Um exemplo famoso disso é a cúpula do Capitólio em Washington, nos Estados Unidos.

EXERCÍCIOS 10.2

Nos Exercícios de 1 a 16, ache o centro, vértices, focos e extremidades do eixo menor da elipse dada. Faça um esboço da curva, mostrando os focos.

1. $4x^2 + 9y^2 = 36$
2. $4x^2 + 9y^2 = 4$
3. $25x^2 + 4y^2 = 100$
4. $16x^2 + 9y^2 = 144$
5. $2x^2 + 3y^2 = 18$
6. $64x^2 + y^2 = 16$
7. $16x^2 + 4y^2 = 1$
8. $3x^2 + 4y^2 = 9$
9. $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$
10. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$
11. $5x^2 + 3y^2 - 3y - 12 = 0$
12. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 18y + 33 = 0$
13. $4x^2 + 4y^2 + 20x - 32y + 89 = 0$
14. $3x^2 + 4y^2 - 30x + 16y + 100 = 0$
15. $3x^2 + 5y^2 - 6x - 12 = 0$
16. $2x^3 + 3y^2 - 4x + 12y + 2 = 0$

Nos Exercícios 17 e 18, determine se o gráfico da equação dada é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

17. $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$
18. $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 20 = 0$

Nos Exercícios de 19 a 28, ache uma equação da elipse tendo as propriedades dadas e faça um esboço do gráfico.

19. Vértices em $(-\frac{5}{2}, 0)$ e $(\frac{5}{2}, 0)$ e um foco em $(\frac{3}{2}, 0)$.
20. Focos em $(-5, 0)$ e $(5, 0)$ e a constante mencionada na Definição 10.2.1 é 20.
21. Focos em $(0, 3)$ e $(0, -3)$ e a constante mencionada na Definição 10.2.1 é $6\sqrt{3}$.
22. Centro na origem, focos sobre o eixo x, o comprimento do eixo maior é três vezes o do eixo menor e passa pelo ponto $(3, 3)$.
23. Vértices em $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ e passa pelo ponto $(-1, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.
24. Vértices em $(0, 5)$ e $(0, -5)$ e passa pelo ponto $(2, -\frac{5}{3}\sqrt{5})$.
25. Centro em $(4, -2)$, um vértice em $(9, -2)$, e um foco em $(0, -2)$.
26. Um foco em $(2, -3)$, um vértice em $(2, 4)$, e centro sobre o eixo x.
27. Focos em $(-1, -1)$ e $(-1, 7)$ e o semi-eixo maior com 8 unidades de comprimento.
28. Focos em $(2, 3)$ e $(2, -7)$ e o comprimento do semi-eixo menor é dois terços do comprimento do semi-eixo maior.
29. Ache a equação da reta tangente à elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$ no ponto $(3, 2)$.
30. Mostre que a equação da reta tangente à elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ no ponto (x_0, y_0) da elipse é $x_0\,x/a^2 + y_0\,y/b^2 = 1$.
31. Na Figura 11 prove que $\alpha = \beta$. (*Sugestão:* escolha os eixos coordenados de tal forma que o centro da elipse esteja na origem e os eixos, ao longo dos eixos coordenados. Então use o Teorema 1.6.8.)
32. A órbita da Terra em torno do Sol é uma elipse com o Sol em um foco e um semi-eixo maior com 149,5 milhões de quilômetros. Se a distância entre os focos for de 5,08 milhões de quilômetros, ache (a) a menor distância entre a Terra e o Sol e (b) a maior distância entre a Terra e o Sol.
33. O teto de um saguão com 10 m de largura tem a forma de uma simi-elipse com 9 m de altura no centro e 6 m de altura nas paredes laterais. Ache a altura do teto a 2 m de cada parede.
34. O arco de uma ponte tem a forma de uma semi-elipse com um vão horizontal de 40 m e com 16 m de altura no centro. Qual a altura do arco a 9 m à esquerda ou à direita do centro?
35. Suponha que a órbita de um planeta tenha a forma de uma elipse com eixo maior cujo comprimento é 500 milhões de quilômetros. Se a distância entre os focos for de 400 milhões de quilômetros, ache a equação da órbita.
36. Uma bola de futebol americano tem 30 cm de comprimento e uma secção plana contendo uma costura é uma elipse cujo eixo menor tem 13 cm. Ache o volume da bola se o couro é tão duro que qualquer secção transversal é um quadrado.
37. Resolva o Exercício 36, se toda secção transversal for uma circunferência.
38. A Definição 10.2.1 apresenta um procedimento para fazermos o gráfico de uma elipse. Para aplicar o método a $4x^2 + 9y^2 = 36$, determine primeiro os pontos de intersecção com os eixos coordenados. Obtenha os focos sobre o eixo x usando um compasso com o centro em um dos pontos de intersecção com o eixo y e com raio 3. Aperte então, em cada foco, um percevejo. Pegue um barbante com comprimento 6, que é $2a$ e prenda as duas extremidades, uma em cada percevejo. Apoie um lápis contra o barbante e estique-o. Movendo o lápis de forma a manter o barbante esticado, trace uma curva. Essa curva é uma elipse, pois o lápis traça o conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias aos percevejos é a constante 6.

39. Para a elipse cuja equação é

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

onde $a > b > 0$, ache as coordenadas dos focos em termos de h, k, a e b.

Os Exercícios 40 a 41 referem-se à Secção Suplementar 6.7.

40. Uma placa tem a forma da região limitada por uma elipse com semi-eixo maior de 3 cm e com semi-eixo menor de 2 cm. Se a placa for mergulhada verticalmente em um tanque com água até que o eixo menor esteja na superfície da água, ache a força devido à pressão da água sobre um lado da parte da placa submersa.

41. Se a placa do Exercício 40 for afundada até que o centro fique 3 cm abaixo da superfície da água, ache a força da pressão da água em um lado da placa. O eixo menor continua horizontal.

42. Percorrendo em sentido inverso as etapas na obtenção da equação (8) a partir da equação (1), prove que se $P(x, y)$ for qualquer ponto cujas coordenadas satisfazem (8), então

$$|\overline{FP}|+|\overline{F'P}|=2a$$

onde F e F' são os focos da elipse na Figura 3 (*Sugestão:* Para mostrar a desigualdade (9), use o fato de que $a > c > 0$ e que para todo ponto (x, y) satisfazendo (8), $-a \leqslant x \leqslant a$. Para mostrar a desigualdade (10), mostre primeiro que $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a + \frac{c}{a}x$ substituindo y^2 por $b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ e usando (7).)

43. Ao invés de seguir, no sentido inverso, as etapas usadas para obter a equação (8) a partir da equação (1), um método alternativo de obter (1) a partir de (8) é o seguinte:

$$|\overline{FP}|+|\overline{F'P}|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{a}\left(\sqrt{a^2(x-c)^2+a^2y^2}+\sqrt{a^2(x+c)^2+a^2y^2}\right)$$

Substituindo a^2y^2 por $a^2b^2 - b^2x^2$, e usando (7) obtemos

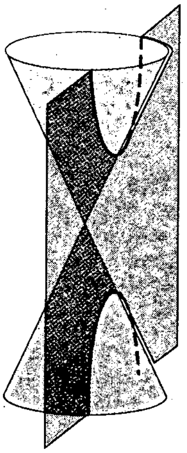
$$|\overline{FP}|+|\overline{F'P}|=\left|a-\frac{c}{a}x\right|+\left|a+\frac{c}{a}x\right|$$

Mostre que o segundo membro acima é $2a$, usando o fato de que $a > c > 0$ e que para todo (x, y) satisfazendo (8), $-a \leqslant x \leqslant a$.

10.3 A HIPÉRBOLE

Quando o plano secante for paralelo a duas geratrizes, ele interceptará ambas as folhas do cone e a secção cônica obtida será uma *hipérbole* mostrada na Figura 1. A seguir, temos a definição de hipérbole como um conjunto de pontos no plano.

10.3.1 DEFINIÇÃO Uma **hipérbole** é o conjunto de pontos no plano, cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos é uma constante. Os dois pontos fixos são denominados **focos**.



hipérbole

FIGURA 1

Para obter a equação de uma hipérbole começamos, como fizemos com a elipse, tomando a distância entre os focos igual a $2c$, onde $c > 0$. Então, escolhemos o eixo x como sendo a reta suporte dos focos F e F' e tomamos a origem no ponto médio do segmento FF'. Consulte a Figura 2. Os pontos $(c, 0)$ e $(-c, 0)$ são os focos F e F', respectivamente. Seja $2a$ a constante mencionada na Definição 10.3.1. Na Figura 2, o ponto $P(x, y)$ representa um ponto qualquer da hipérbole. Então, da Definição 10.3.1,

$$\left||\overline{FP}|-|\overline{F'P}|\right|=2a \tag{1}$$

Para determinar a relação entre a e c, usamos o fato de que a soma dos comprimentos dos lados de um triângulo é maior do que o comprimento do terceiro lado e escrevemos as duas desigualdades

$$|\overline{F'F}|+|\overline{FP}|>|\overline{F'P}| \qquad |\overline{F'F}|+|\overline{F'P}|>|\overline{FP}|$$

$$|\overline{F'F}|>|\overline{F'P}|-|\overline{FP}| \qquad |\overline{F'F}|>|\overline{FP}|-|\overline{F'P}|$$

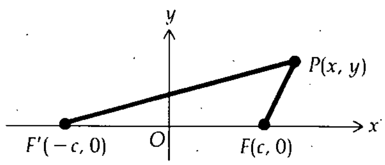


FIGURA 2

Usando valor absoluto, essas desigualdades podem ser escritas como a desigualdade

$$|\overline{F'F}| > \left||\overline{FP}| - |\overline{F'P}|\right|$$

Como $|\overline{F'F}| = 2c$ e $\left||\overline{FP}| - |\overline{F'P}|\right| = 2a$, temos

$$2c > 2a$$
$$c > a \tag{2}$$

Como

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad |\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

então de (1), P estará na hipérbole se e somente se

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

ou, equivalentemente, sem as barras de valor absoluto,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \pm 2a \\
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\
\pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \\
\pm\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a + \frac{c}{a}x \\
x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \\
x^2\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) - y^2 &= c^2 - a^2 \\
(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} &= 1
\end{aligned} \tag{3}$$

Como, de (2), $c > a$, podemos tomar

$$b^2 = c^2 - a^2 \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3), temos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

Provamos que as coordenadas (x, y) de qualquer ponto P na hipérbole satisfazem a equação (5). Para provar que (5) é a equação da hipérbole precisamos mostrar que todo ponto P cujas coordenadas satisfazem (5) está na hipérbole. Será pedido que você prove isso no Exercício 41. O procedimento é similar ao indicado na Secção 11.2 para a elipse, conforme foi esquematizado nos Exercícios 42 e 43 dessa secção. Essa discussão nos dá o teorema a seguir.

10.3.2 TEOREMA

Se $2a$ for a constante à qual se refere a Definição 10.3.1 e a hipérbole tiver focos em $(c, 0)$ e $(-c, 0)$, então se $b^2 = c^2 - a^2$, uma equação da hipérbole será

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

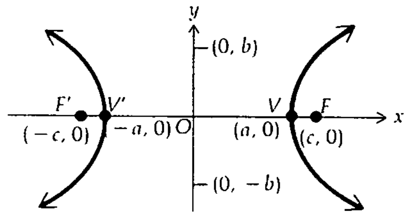


FIGURA 3

Um esboço do gráfico da hipérbole do Teorema 10.3.2 é ilustrado na Figura 3. Vamos mostrar agora como ele é obtido. Da equação, observamos que o gráfico é simétrico em relação a ambos os eixos x e y. Da mesma forma que a elipse, a reta que passa pelos focos é chamada de **eixo principal** da hipérbole. Assim, para essa hipérbole o eixo x é o eixo principal. Os pontos onde o gráfico intercepta o eixo principal são chamados de **vértices**, e o ponto médio entre os vértices é denominado **centro** da hipérbole. Para essa hipérbole, os vértices estão em $V(a, 0)$ e $V'(-a, 0)$ e o centro está na origem. O segmento $V'V$ do eixo principal é chamado de **eixo transverso** da hipérbole e seu comprimento é $2a$ unidades; asssim, a unidades é o comprimento do semi-eixo transverso.

Substituindo x por zero em (6) obtemos $y^2 = -b^2$ que não tem solução real. Conseqüentemente, a hipérbole não intercepta o eixo y. Entretanto, o segmento de reta com extremidades em $(0, -b)$ e $(0, b)$ é chamado de **eixo conjugado** da hipérbole e seu comprimento é $2b$ unidades. Assim, b é o número de unidades no comprimento do semi-eixo conjugado.

Resolvendo (6) para y em termos de x obtemos

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{7}$$

Concluímos de (7) que se $|x| < a$, não existe valor real de y. Logo, não há nenhum ponto (x, y) da hipérbole para o qual $-a < x < a$. Vemos também de (7) que se $|x| > a$, então existem dois valores reais para y. Assim, a hipérbole tem dois *ramos*. Um deles contém o vértice $V(a, 0)$ e se estende indefinidamente à direita de V. O outro contém o vértice $V'(-a, 0)$ e se estende indefinidamente, à esquerda de V'.

Como no caso da elipse, uma vez que a hipérbole tem um centro, ela é chamada de **cônica central**.

EXEMPLO 1 Dada a hipérbole

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

ache os vértices, focos e comprimentos dos eixos transverso e conjugado. Faça um esboço da hipérbole e mostre os focos.

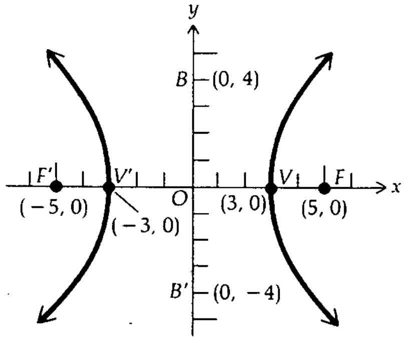


FIGURA 4

Solução A equação dada tem a forma (6); assim, $a = 3$ e $b = 4$. Os vértices estão, portanto, nos pontos $V(3, 0)$ e $V'(-3, 0)$. O número de unidades no comprimento do eixo transverso é $2a$ ou 6 e o número de unidades no comprimento do eixo conjugado é $2b$ ou 8. Como de (5) $b^2 = c^2 - a^2$, temos que $16 = c^2 - 9$; assim $c = 5$. Logo, os focos estão em $F(5, 0)$ e $F'(-5, 0)$. Um esboço da hipérbole e de seus focos está na Figura 4.

Da Definição 10.3.1, segue que se P for um ponto dessa hipérbole, então $\left| |\overline{FP}| - |\overline{F'P}| \right| = 6$.

EXEMPLO 2 Ache uma equação da hipérbole tendo um foco em (5, 0) e os extremos do eixo conjugado em (0, 2) e (0, −2).

Solução Como os extremos do eixo conjugado estão em (0, 2) e (−2, 0), então $b = 2$, o eixo principal está no eixo x, e o centro está na origem. Logo, a equação é da forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como o foco está em (5, 0), $c = 5$ e como $b^2 = c^2 - a^2$, $a^2 = 25 - 4$. Assim, $a = \sqrt{21}$ e a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Trocando entre si x e y na equação (6), obtemos

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1} \tag{8}$$

que é a equação de uma hipérbole com centro na origem e eixo principal coincidindo com o eixo y.

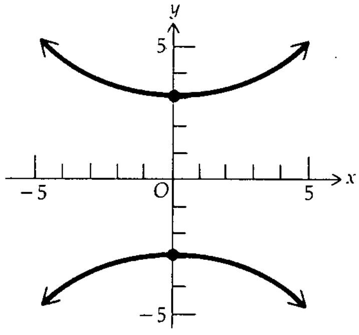


FIGURA 5

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A hipérbole com a equação

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

tem seus focos e vértices sobre o eixo y, pois apresenta a forma (8). Um esboço do gráfico dessa equação está na Figura 5. ◀

Não existe, no caso da hipérbole, uma desigualdade geral envolvendo a e b que corresponda à desigualdade $a > b$, no caso da elipse. Isto é, para uma hipérbole é possível ter $a < b$ como na Ilustração 1, onde $a = 3$ e $b = 4$; é possível também ter $a > b$, como no Exemplo 2, onde $a = \sqrt{21}$ e $b = 2$. Se, para a hipérbole, $a = b$, então dizemos que ela é **equilátera**.

Vamos provar que uma hipérbole tem assíntotas e mostrar como obter as equações dessas assíntotas. Nas Secções 2.4 e 2.5 foram definidas assíntotas verticais e horizontais do gráfico de uma função. Na Secção 4.7 discutimos também assíntotas oblíqüas de uma função racional. A seguir temos uma definição mais geral de assíntotas, sendo as definições anteriores casos particulares.

10.3.3 DEFINIÇÃO O gráfico da equação $y = f(x)$ terá a reta $y = mx + b$ como **assíntota**, se qualquer das afirmativas a seguir for verdadeira:

(i) $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, e para algum número $M > 0$, $f(x) \neq mx + b$ sempre que $x > M$.

(ii) $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, e para algum número $M < 0$, $f(x) \neq mx + b$ sempre que $x < M$.

A afirmativa (i) indica que para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que

$$\text{se } x > N \text{ então } 0 < |f(x) - (mx + b)| < \epsilon$$

isto é, podemos tornar os valores funcionais de $f(x)$ tão próximos do valor de $mx + b$ quanto quisermos, tomando x suficientemente grande. Isso é consistente com nossa noção intuitiva de assíntota de um gráfico. Podemos dar uma formulação semelhante para a parte (ii) da Definição 10.3.3.

Para a hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, resolvendo em y obtemos

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Assim, se

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

então

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - \frac{b}{a}x\right] &= \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right]\\ &= \frac{b}{a}\lim_{x \to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}\\ &= \frac{b}{a}\lim_{x \to +\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}\\ &= 0\end{aligned}$$

Logo, pela Definição 10.3.3, a reta $y = \dfrac{b}{a}x$ é uma assíntota do gráfico de $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Analogamente, pode ser mostrado que a reta $y = \dfrac{b}{a}x$ é uma assíntota do gráfico de $y = -\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Conseqüentemente, a reta $y = \dfrac{b}{a}x$ é uma assíntota da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Da mesma forma, podemos demonstrar que a reta $y = -\dfrac{b}{a}x$ é uma assíntota da mesma hipérbole. Temos, então, o teorema a seguir.

10.3.4 TEOREMA As retas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

são assíntotas da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

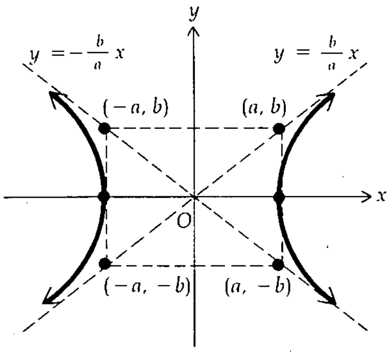


FIGURA 6

A Figura 6 mostra um esboço da hipérbole do Teorema 10.3.4, junto com suas assíntotas. Note, na figura, que as diagonais do retângulo com vértices em (a, b), $(a, -b)$, $(-a, b)$ e $(-a, -b)$ estão sobre as assíntotas da hipérbole. Esse retângulo é chamado **retângulo auxiliar** da hipérbole. Os vértices da hipérbole são os pontos de intersecção do eixo principal com o retângulo auxiliar. Um esboço razoável de uma hipérbole pode ser feito traçando primeiro o retângulo auxiliar e depois os ramos da hipérbole, tangenciando no seu vértice ao lado do retângulo auxiliar e aproximando assintoticamente as retas suportes das diagonais do retângulo. Observe que como $a^2 + b^2 = c^2$, a circunferência com centro na origem e que passa pelos vértices do retângulo auxiliar também passa pelos focos da hipérbole.

Há uma forma heurística de obter as equações das assíntotas de uma hipérbole. Por exemplo, para a hipérbole com equação $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, substituindo por zero o segundo membro, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Fatorando, teremos

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

que é equivalente a duas equações:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

as quais, pelo Teorema 10.3.4, são equações das assíntotas da hipérbole dada. Usando essa heurística para a hipérbole com equação (8), vemos que as assíntotas são as retas de equações

$$\frac{y}{a} - \frac{x}{b} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{y}{a} + \frac{x}{b} = 0$$

que coincidem com as assíntotas da hipérbole com equação $x^2/b^2 - y^2/a^2 = 1$. Essa hipérbole e aquela dada pela equação (8) são chamadas **hipérboles conjugadas**.

As assíntotas de uma hipérbole equilátera ($a = b$) são perpendiculares entre si. O retângulo auxiliar, neste caso, é um quadrado e os eixos transverso e conjugado têm o mesmo comprimento.

Se o centro de uma hipérbole estiver em (h, k) e seu eixo principal for paralelo ao eixo x, então se os eixos forem transladados de forma que o ponto (h, k) seja a nova origem, a equação da hipérbole em relação ao novo sistema de coordenadas será $\bar{x}^2/a^2 - \bar{y}^2/b^2 = 1$. Substituindo $\bar{x}$ por $x - h$ e $\bar{y}$ por $y - k$ essa equação torna-se

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \qquad (9)$$

Da mesma forma, a equação da hipérbole com centro em (h, k) e eixo principal paralelo ao eixo y é

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1} \qquad (10)$$

EXEMPLO 3 Os vértices de uma hipérbole estão em $(-5, -3)$ e $(-5, -1)$ e as extremidades do eixo conjugado estão em $(-7, -2)$ e $(-3, -2)$. Ache a equação da hipérbole e a equação das assíntotas. Faça um esboço da hipérbole e das assíntotas.

Solução A distância entre os vértices é $2a$; logo $2a = 2$ e $a = 1$. O comprimento do eixo conjugado é $2b$; assim $2b = 4$ e $b = 2$. Como o eixo principal é paralelo ao eixo y, a equação da hipérbole é da forma (10). O centro (h, k) está no ponto médio do segmento que une os vértices, sendo, portanto, o ponto $(-5, -2)$. Logo, a equação da hipérbole é

$$\frac{(y+2)^2}{1} - \frac{(x+5)^2}{4} = 1$$

Usando a heurística para obter as equações das assíntotas temos

$$\left(\frac{y+2}{1} - \frac{x+5}{2}\right)\left(\frac{y+2}{1} + \frac{x+5}{2}\right) = 0$$

que dá

$$y + 2 = \tfrac{1}{2}(x+5) \quad \text{e} \quad y + 2 = -\tfrac{1}{2}(x+5)$$

Um esboço da hipérbole e das assíntotas está na Figura 7.

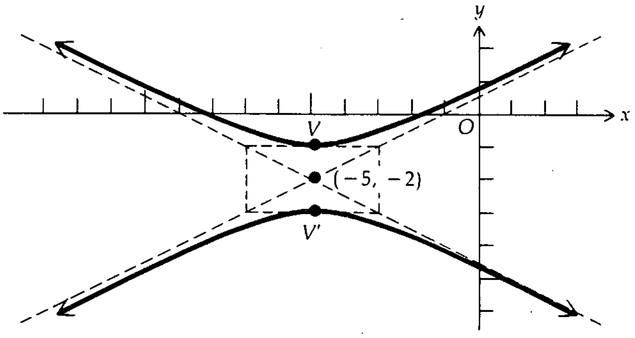


FIGURA 7

Se em (9) e (10) eliminarmos as frações e combinarmos os termos, as equações resultantes serão da forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{11}$$

onde A e C têm sinais opostos; isto é $AC < 0$. Agora queremos mostrar que o gráfico de uma equação da forma (11), onde $AC < 0$ é uma hipérbole ou uma degeneração. Completando em (11) os quadrados em x e y, onde $AC < 0$, a equação resultante tem a forma

$$\alpha^2(x-h)^2 - \beta^2(y-k)^2 = H \tag{12}$$

Se $H > 0$, (12) pode ser escrito como

$$\frac{(x-h)^2}{\dfrac{H}{\alpha^2}} - \frac{(y-k)^2}{\dfrac{H}{\beta^2}} = 1$$

que tem a forma de (9).

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** A equação

$$4x^2 - 12y^2 + 24x + 96y - 181 = 0$$

pode ser escrita como

$$4(x^2 + 6x) - 12(y^2 - 8y) = 181$$

e completando os quadrados em x e y temos

$$4(x^2 + 6x + 9) - 12(y^2 - 8y + 16) = 181 + 36 - 192$$

$$4(x + 3)^2 - 12(y - 4)^2 = 25$$

A qual tem a forma (12), onde $H = 25 > 0$. Pode ser escrita como

$$\frac{(x + 3)^2}{\frac{25}{4}} - \frac{(y - 4)^2}{\frac{25}{12}} = 1$$

que tem a forma (9). ◀

Se $H < 0$, então (12) pode ser reescrita como

$$\frac{(y - k)^2}{\underbrace{\frac{|H|}{\quad}}_{\alpha^2}} - \frac{(x - h)^2}{\underbrace{\frac{|H|}{\quad}}_{\beta^2}} = 1$$

que tem a forma (10).

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Suponha que (11) seja

$$4x^2 - 12y^2 + 24x + 96y - 131 = 0$$

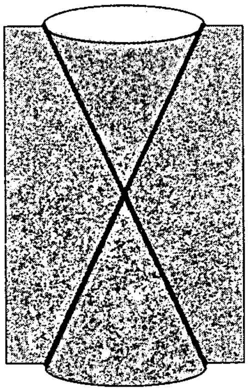
Completando os quadrados em x e y teremos

$$4(x + 3)^2 - 12(y - 4)^2 = -25$$

A equação acima tem a forma (12), onde $H = -25 < 0$, e pode ser escrita como

$$\frac{(y - 4)^2}{\frac{25}{12}} - \frac{(x + 3)^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

que tem a forma (10). ◀



duas retas concorrentes

FIGURA 8

Se $H = 0$, então (12) será equivalente às duas equações

$$\alpha(x - h) - \beta(y - k) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha(x - h) + \beta(y - k) = 0$$

que são equações de duas retas que passam pelo ponto (h, k). Este é um caso de hipérbole degenerada.

O teorema a seguir resume os resultados da discussão anterior.

10.3.5 TEOREMA Se na equação geral do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$B = 0$ e $AC < 0$, então o gráfico será uma hipérbole ou duas retas concorrentes.

O caso degenerado de uma hipérbole, ou seja, duas retas concorrentes, é obtido como secção cônica se o plano secante contiver o vértice do cone e duas geratrizes, conforme mostra a Figura 8.

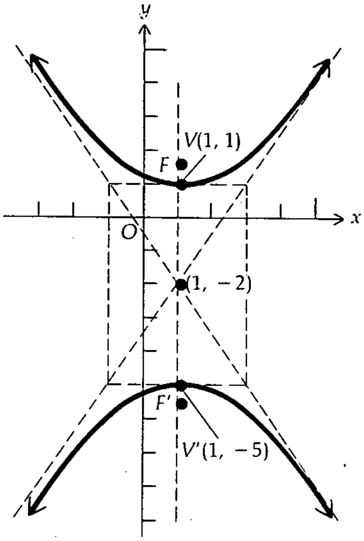


FIGURA 9

EXEMPLO 4 Determine o gráfico da equação

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$$

Solução Do Teorema 10.3.5, como $B = 0$ e $AC = -36 < 0$, o gráfico é uma hipérbole ou duas retas concorrentes.

Completando os quadrados em x e y teremos

$$9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 4y + 4) = -29 + 9 - 16$$

$$9(x - 1)^2 - 4(y + 2)^2 = -36$$

$$\frac{(y + 2)^2}{9} - \frac{(x - 1)^2}{4} = 1 \tag{13}$$

Essa equação tem a mesma forma que (10): assim, o gráfico é uma hipérbole cujo eixo principal é paralelo ao eixo y e cujo centro está em $(1, -2)$.

EXEMPLO 5 Ache os vértices e os focos da hipérbole do Exemplo 4. Faça um esboço mostrando a hipérbole, suas assíntotas e os focos.

Solução De (13) observamos que $a = 3$ e $b = 2$. Como o eixo principal é vertical, o centro está em $(1, -2)$ e $a = 3$, segue que os vértices estão nos pontos $V(1, 1)$ e $V'(1, -5)$. Para uma hipérbole, $c^2 = a^2 + b^2$; logo, $c^2 = 9 + 4$ e $c = \sqrt{13}$. Assim sendo, os focos estão em $F(1, -2 + \sqrt{13})$ e $F'(1, -2 - \sqrt{13})$. A Figura 9 mostra a hipérbole, suas assíntotas e os focos.

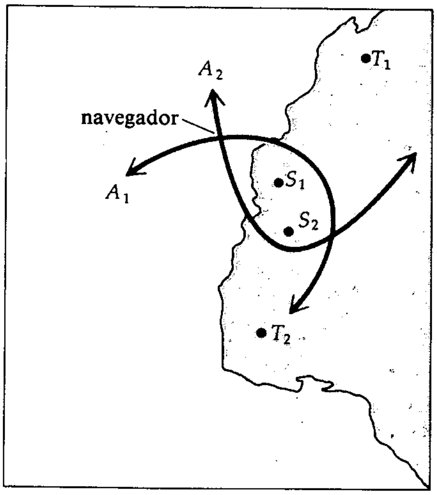


FIGURA 10

As propriedades da hipérbole dadas na Definição 10.3.1 formam a base de vários sistemas de navegação importantes. Esses sistemas envolvem uma rede de pares de rádios transmissores em posição fixa e com distâncias conhecidas um do outro. Os transmissores enviam sinais de rádio que são recebidos pelo navegador. A diferença no tempo de chegada de dois sinais determina a diferença $2a$ das distâncias ao navegador. Assim, sabe-se que a sua posição é algum ponto ao longo de um arco de uma hipérbole que tem como focos as localizações dos transmissores. Um arco, ao invés de dois, é determinado devido ao atraso do sinal entre os transmissores, causado pelo próprio sistema. O procedimento é, então, repetido para um outro par de transmissores e obtemos outro arco de hipérbole contendo a posição do navegador. O ponto de intersecção dos dois arcos de hipérbole é a posição real. Por exemplo, na Figura 10, suponha um par de transmissores localizados nos pontos T_1 e S_1, cujos sinais determinam o arco de hipérbole A_1. Outro par de transmissores está localizado em T_2 e S_2 e o arco de hipérbole A_2 é determinado pelos sinais. Então, a intersecção de A_1 com A_2 dá a posição do navegador.

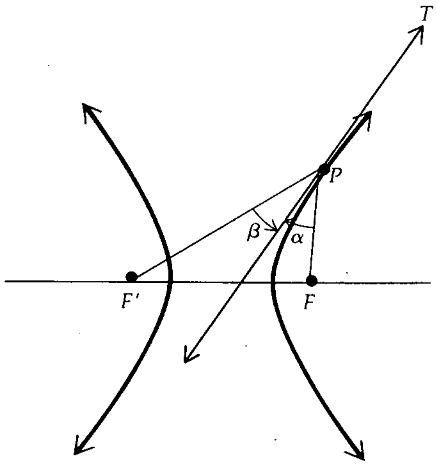


FIGURA 11

A hipérbole tem uma propriedade reflexiva que é usada na fabricação de certos telescópios. Na Figura 11, a reta PT é a reta tangente no ponto P ao gráfico da hipérbole com focos em F e F'. A medida do ângulo entre o segmento de reta FP e a reta tangente PT é α e a medida do ângulo entre o segmento de reta $F'P$ e a reta tangente PT é β. Será pedido que você prove que $\alpha = \beta$, no Exercício 39. Dessa igualdade segue que um raio de luz de uma fonte localizada em um foco de um espelho hiperbólico (a secção transversal é uma hipérbole) é refletido ao longo de uma reta que passa pelo outro foco.

Hipérboles são usadas também em "combates de ondas sonoras", para localizar a posição de armas inimigas, cronometrando o som dos disparos dessas armas. Alguns cometas movem-se em órbita hiperbólica. Se uma quantidade varia inversamente em relação a outra tal como a pressão e o volume na lei de Boyle para um gás perfeito ($PV = k$), o gráfico será uma hipérbole, como veremos na Secção 10.4.

Dos Teoremas 10.1.6, 10.2.3 e 10.3.5 podemos concluir que o gráfico de uma equação quadrática geral em duas incógnitas, quando $B = 0$, é uma cônica ou uma cônica degenerada. O tipo de cônica pode ser obtido observando o produto de A com C. Temos o teorema a seguir.

10.3.6 TEOREMA O gráfico da equação

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde A e C não são ambos nulos, é uma cônica ou uma cônica degenerada; se for uma cônica, então o gráfico será:

(i) uma *parábola*, se $A = 0$ ou $C = 0$, isto é, se $AC = 0$;
(ii) uma *elipse*, se A e C tiverem o mesmo sinal, isto é, se $AC > 0$;
(iii) uma *hipérbole*, se A e C tiverem sinais opostos, isto é, se $AC < 0$.

Uma discussão do gráfico de uma equação quadrática geral onde $B \neq 0$ será dada na próxima secção.

EXERCÍCIOS 10.3

Nos Exercícios de 1 a 16, ache o centro, os vértices, os focos e as equações das assíntotas da hipérbole dada. Faça um esboço da curva e de suas assíntotas e mostre os focos.

1. $9x^2 - 4y^2 = 36$
2. $x^2 - 9y^2 = 9$
3. $4x^2 - 25y^2 = 100$
4. $16y^2 - 9x^2 = 144$
5. $4y^2 - x^2 = 16$
6. $4y^2 - 7x^2 = 56$
7. $9y^2 - 16x^2 = 1$
8. $25x^2 - 25y^2 = 1$
9. $x^2 - y^2 + 8x - 2y - 21 = 0$
10. $4x^2 - y^2 - 8x - 12 = 0$
11. $9x^2 - 18y^2 + 54x - 36y + 79 = 0$
12. $x^2 - y^2 + 6x + 10y - 4 = 0$
13. $3y^2 - 4x^2 - 8x - 24y - 40 = 0$
14. $4x^2 - y^2 + 56x + 2y + 195 = 0$
15. $4y^2 - 9x^2 + 16y + 18x = 29$
16. $y^2 - x^2 + 2y - 2x - 1 = 0$

Nos Exercícios de 17 a 26, ache a equação da hipérbole satisfazendo as condições dadas e faça um esboço do gráfico.

17. Vértices em $(-2, 0)$ e $(2, 0)$ e um eixo conjugado com comprimento 6.
18. Focos em $(0, 5)$ e $(0, -5)$ e um vértice em $(0, 4)$.
19. Centro na origem, focos sobre o eixo y e passando pelos pontos $(-2, 4)$ e $(-6, 7)$.
20. Extremidades do eixo conjugado em $(0, -3)$ e $(0, 3)$ e um foco em $(5, 0)$.
21. Um foco em $(26, 0)$ e como assíntotas as retas $12y = \pm 5x$.
22. Centro em $(3, -5)$, um vértice em $(7, -5)$ e um foco em $(8, -5)$.
23. Centro em $(-2, -1)$, um vértice em $(-2, 11)$, e um foco em $(-2, 14)$.
24. Focos em $(3, 6)$ e $(3, 0)$ e passando pelo ponto $(5, 3 + \frac{6}{5}\sqrt{5})$.
25. Focos em $(-1, 4)$ e $(7, 4)$ e comprimento do eixo transverso $\frac{8}{3}$.
26. Um foco com $(-3 - 3\sqrt{13}, 1)$, as assíntotas interceptam-se em $(-3, 1)$ e uma assíntota passa pelo ponto $(1, 7)$.
27. Os vértices de uma hipérbole estão em $(-3, -1)$ e $(-1, -1)$ e a distância entre os focos é $2\sqrt{5}$. Ache (a) a equação da hipérbole e (b) equações das assíntotas.
28. Os focos de uma hipérbole estão em $(2, 7)$ e $(2, -7)$ e a distância entre os vértices é $8\sqrt{3}$. Ache (a) a equação da hipérbole e (b) equações das assíntotas.
29. Ache a equação da reta tangente à hipérbole $4x^2 - y^2 = -1$ no ponto $(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$.
30. Ache a equação da reta normal à hipérbole $4x^2 - 3y^2 = 24$ no ponto $(3, 2)$.
31. Ache a equação da hipérbole cujos focos são os vértices da elipse $7x^2 + 11y^2 = 77$ e cujos vértices são os focos dessa elipse.
32. Ache a equação da elipse cujos focos são os vértices da hipérbole $11x^2 - 7y^2 = 77$ e cujos vértices são os focos da hipérbole.
33. O custo de produção de uma mercadoria é \$ 12 a menos por unidade numa cidade A do que numa cidade B, sendo a distância entre A e B 100 km supondo que o caminho de entrega da mercadoria seja uma linha reta e que o custo da entrega seja \$ 0,20 por unidade por quilômetro, ache a curva em cujo ponto a mercadoria possa ser fornecida por A ou por B a um mesmo custo. (*Sugestão*: tome A e B em $(-50, 0)$ e $(50, 0)$ respectivamente.)
34. Prove que não existe reta tangente à hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ que passe pela origem.

35. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ e pela reta $x = 2a$.

36. Ache o centróide do sólido de rotação do Exercício 35.

37. Três postos de escuta estão localizados nos pontos $A(0, 0)$, $B(0, \frac{21}{4})$, e $C(\frac{25}{3}, 0)$, a unidade de comprimento é o quilômetro. Microfones localizados nesses pontos mostram que uma arma está $\frac{5}{3}$ km mais próxima de A do que de C e $\frac{7}{4}$ km mais próximo de B do que de A. Determine a posição da arma usando a Definição 10.3.1.

38. Duas estações LORAN (abreviatura de Long-Range Navigation — Navegação de Longa Distância) A e B estão numa reta que vai de leste para oeste e A está a 80 km a leste de B. Um avião viaja para o leste num curso reto que está a 60 km ao norte da reta que liga A e B. Sinais são mandados ao mesmo tempo de A e de B e o sinal de A atinge o avião 350 µs antes do sinal de B. Se os sinais se propagam a uma velocidade de 0,2 milhão por microssegundo, localize a posição do avião usando a Definição 10.3.1.

39. Na Figura 11, prove que $\alpha = \beta$. (*Sugestão*: escolha os eixos coordenados de tal forma que o centro da hipérbole esteja na origem e os eixos da hipérbole estejam ao longo dos eixos coordenados. Então prove que a reta tangente PT divide ao meio o ângulo formado pelos segmentos da reta FP e $F'P$.)

40. Para uma hipérbole equilátera tendo centro em (h, k) e eixo principal paralelo ao eixo x, prove que as assíntotas são perpendiculares.

41. Prove que se $P(x, y)$ for um ponto cujas coordenadas satisfazem a equação (5), então

$$\left||\overline{FP}| - |\overline{F'P}|\right| = 2a$$

onde F e F' são os focos da hipérbole da Figura 2. (*Sugestão*: use um método similar ao sugerido para a elipse nos Exercícios 42 e 43 dos Exercícios 10.2.)

10.4 ROTAÇÃO DE EIXOS

Mostramos como é possível simplificar a forma de certas equações por uma translação de eixos coordenados. Agora vamos considerar uma rotação de eixos coordenados que nos possibilita transformar uma equação do segundo grau com um termo em xy em outra equação sem esse termo. Uma translação de eixos dá um novo sistema de coordenadas cujos eixos são paralelos aos eixos originais x e y. Para uma rotação, o novo sistema de coordenadas terá, em geral, eixos que *não* são paralelos aos originais.

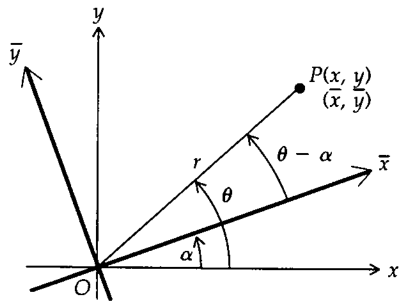


FIGURA 1

Vamos supor que existam dois sistemas cartesianos retangulares com a mesma origem. Vamos chamar esses sistemas de xy e $\bar{x}\bar{y}$. Suporemos ainda que o eixo $\bar{x}$ forme com o eixo x um ângulo cuja medida em radianos seja α. Então, naturalmente, o eixo $\bar{y}$ forma com o eixo y um ângulo cuja medida em radianos é α. Nesse caso, estabelecemos que o sistema xy de coordenadas girou num ângulo cuja medida em radianos é α para formar o sistema $\bar{x}\bar{y}$. Um ponto P com coordenadas (x, y) em relação ao sistema original de coordenadas terá coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ em relação ao novo sistema. Vamos obter agora a relação entre os dois sistemas de coordenadas.

Na Figura 1, r denota a distância não orientada $|\overline{OP}|$ e seja θ o ângulo medido do eixo x ao segmento de reta OP. Da figura observamos que

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{1}$$

Também, da Figura 1,

$$\bar{x} = r\cos(\theta - \alpha) \quad \text{e} \quad \bar{y} = r\,\text{sen}(\theta - \alpha)$$

Com a diferença das identidades co-seno e seno essas duas equações tornam-se

$$\bar{x} = r\cos\theta\cos\alpha + r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha \quad \text{e} \quad \bar{y} = r\,\text{sen}\,\theta\cos\alpha - r\cos\theta\,\text{sen}\,\alpha$$

Substituindo nas equações precedentes as equações (1), obtemos

$$\bar{x} = x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha \quad \text{e} \quad \bar{y} = -x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \tag{2}$$

Resolvendo as equações (2) simultaneamente para x e y em termos de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ (veja o Exercício 26), obtemos

$$x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\,\text{sen}\,\alpha \quad \text{e} \quad y = \bar{x}\,\text{sen}\,\alpha + \bar{y}\cos\alpha \tag{3}$$

Os resultados serão resumidos em um teorema.

10.4.1 TEOREMA Se (x, y) for a representação de um ponto P em relação a um conjunto de eixos e $(\bar{x}, \bar{y})$ for a representação de P após a rotação dos eixos de um ângulo α, então

(i) $x = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \operatorname{sen} \alpha$ e $y = \bar{x} \operatorname{sen} \alpha + \bar{y} \cos \alpha$

(ii) $\bar{x} = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha$ e $\bar{y} = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$

EXEMPLO 1 Dada a equação

$$xy = 1$$

(a) Ache a equação do gráfico em relação aos eixos $\bar{x}$ e $\bar{y}$ obtidos através de uma rotação de eixos de um ângulo de $\frac{1}{4}\pi$ rad e (b) faça um esboço do gráfico e mostre ambos os conjuntos de eixos.

Solução

(a) Com $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ no Teorema 10.4.1(i) obtemos

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}$$

Substituindo essas expressões para x e y na equação $xy = 1$, obtemos

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}\right) = 1$$

$$\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1$$

(b) Essa é a equação de uma hipérbole equilátera cujas assíntotas são as bissetrizes dos quadrantes no sistema $\bar{x}\bar{y}$. Assim, o gráfico da equação $xy = 1$ é uma hipérbole equilátera situada no primeiro e terceiro quadrantes e as assíntotas são os eixos x e y. A Figura 2 mostra o gráfico pedido.

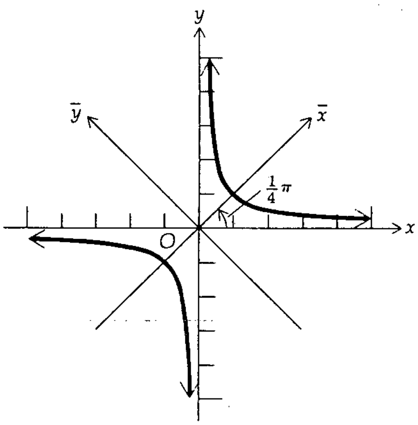


FIGURA 2

Na Secção 10.3, mostramos que se $B = 0$ e A e C não forem ambos nulos, o gráfico da equação geral de segundo grau em duas incógnitas

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4}$$

será uma cônica ou uma cônica degenerada. Vamos mostrar agora que se $B \neq 0$, então qualquer equação da forma (4) poderá ser transformada por uma rotação de eixos conveniente, numa equação da forma

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0 \tag{5}$$

onde $\bar{A}$ e $\bar{C}$ não são ambos nulos.

Se o sistema xy sofrer uma rotação de um ângulo α, então, para obter a equação do gráfico de (4) em relação ao sistema $\bar{x}\bar{y}$, substituimos x por $\bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \operatorname{sen} \alpha$ e y por $\bar{x} \operatorname{sen} \alpha + \bar{y} \cos \alpha$. Teremos

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0 \tag{6}$$

onde

$$\bar{A} = A \cos^2 \alpha + B \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + C \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\bar{B} = -2A \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + 2C \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\bar{C} = A \operatorname{sen}^2 \alpha - B \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha$$

Queremos encontrar α tal que a rotação transforme (4) numa equação da forma (5). Fazendo $\bar{B}$ igual a zero, temos

$$B(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + (C - A)(2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) = 0$$

ou, equivalentemente, com identidades trigonométricas,

$$B \cos 2\alpha + (C - A) \operatorname{sen} 2\alpha = 0$$

Como $B \neq 0$,

$$\boxed{\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A - C}{B}}$$

Mostramos que uma rotação de eixos de um ângulo α que satisfaça a equação acima, transformará uma equação da forma (4), onde $B \neq 0$, em uma equação da forma (5). Queremos mostrar que $\bar{A}$ e $\bar{C}$ em (5) não são ambos zero. Para provar, note que (6) é obtido de (4) por uma rotação de eixos de um ângulo α. Também, (4) pode ser obtida de (6) por uma rotação de eixos de ângulo $-\alpha$. Se $\bar{A}$ e $\bar{C}$ em (6) fossem ambos nulos, então as substituições

$$\bar{x} = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad \bar{y} = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$$

em (6) resultariam na equação

$$\bar{D}(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha) + \bar{E}(-x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha) + \bar{F} = 0$$

que é uma equação do primeiro grau e, portanto, diferente de (4) pois estamos supondo que pelo menos $B \neq 0$. Provamos então o teorema a seguir.

10.4.2 TEOREMA

Se $B \neq 0$, a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

pode ser transformada na equação

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0$$

onde $\bar{A}$ e $\bar{C}$ não são ambos nulos, por uma rotação de eixos de ângulo α para o qual

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A - C}{B}$$

Pelos Teoremas 10.4.2 e 10.3.6, segue que o gráfico de uma equação da forma (4) é uma cônica ou uma cônica degenerada. Para determinar que tipo de cônica é o gráfico de determinada equação, usamos o fato de que A, B e C de (4) e $\bar{A}$, $\bar{B}$ e $\bar{C}$ de (6) satisfazem a relação

$$B^2 - 4AC = \bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C} \tag{7}$$

que pode ser provada substituindo as expressões de $\bar{A}$, $\bar{B}$ e $\bar{C}$ dadas nas fórmulas (6), no segundo membro de (7). Isso será deixado como exercício (veja o Exercício 25).

A expressão $B^2 - 4AC$ é chamada de **discriminante** de (4). A igualdade (7) estabelece que o discriminante da equação quadrática genérica em duas variáveis é **invariante** sob uma rotação de eixos. Se o ângulo da rotação for escolhido de forma que $\bar{B} = 0$, então (7) torna-se

$$B^2 - 4AC = -4\bar{A}\bar{C} \tag{8}$$

Do Teorema 10.3.6, segue que se o gráfico de (5) não for degenerado, então será uma parábola se $\bar{A}\bar{C} = 0$, uma elipse se $\bar{A}\bar{C} > 0$ e uma hipérbole se $\bar{A}\bar{C} < 0$. Assim, podemos concluir que o gráfico de (5) é uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, conforme $-4\bar{A}\bar{C}$ seja zero, negativo ou positivo. Como o gráfico de (4) é igual ao de (5), segue de (8) que se o gráfico de (4) não for degenerado, então ele será uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole, conforme o discriminante $B^2 - 4AC$ seja zero, negativo ou positivo. Provamos o teorema a seguir.

10.4.3 TEOREMA O gráfico da equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é uma cônica ou uma cônica degenerada. Se for uma cônica, então será

(i) uma *parábola* se $B^2 - 4AC = 0$;
(ii) uma *elipse* se $B^2 - 4AC < 0$;
(iii) uma *hipérbole* se $B^2 - 4AC > 0$.

EXEMPLO 2 Simplifique a equação

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 - 80 = 0$$

por uma rotação de eixos. Faça um esboço do gráfico da equação e mostre ambos os conjuntos de eixos.

Solução

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= (-12)^2 - 4(17)(8) \\ &= -400 \end{aligned}$$

Como $B^2 - 4AC < 0$, pelo Teorema 10.4.3, o gráfico é uma elipse ou degenerado. Para eliminar o termo xy por uma rotação de eixos, precisamos escolher um α tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} 2\alpha &= \frac{A - C}{B} \\ &= \frac{17 - 8}{-12} \\ &= -\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Existe um 2α no intervalo $(0, \pi)$ para o qual $\operatorname{cotg} 2\alpha = -\frac{3}{4}$. Logo, α está no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Para aplicar o Teorema 10.4.1 não é necessário encontrar α desde que se conheça $\cos \alpha$ e $\operatorname{sen} \alpha$. Essas funções podem ser encontradas do valor de $\operatorname{cotg} 2\alpha$, pelas identidades trigonométricas

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \qquad 0 < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi$$

Como $\operatorname{cotg} 2\alpha = -\frac{3}{4}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, segue que $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$. Assim

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad\qquad = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

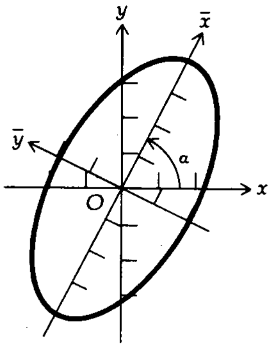


FIGURA 3

Substituindo $x = \bar{x}/\sqrt{5} - 2\bar{y}/\sqrt{5}$ e $y = 2\bar{x}/\sqrt{5} + \bar{y}/\sqrt{5}$ na equação dada obtemos

$$17\left(\frac{\bar{x}^2 - 4\bar{x}\bar{y} + 4\bar{y}^2}{5}\right) - 12\left(\frac{2\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} - 2\bar{y}^2}{5}\right) + 8\left(\frac{4\bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2}{5}\right) - 80 = 0$$

Simplificando, obtemos

$$\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 16$$

$$\frac{\bar{x}^2}{16} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$$

Assim, o gráfico é uma elipse cujo eixo maior tem 8 unidades de comprimento e cujo eixo menor tem 4 unidades de comprimento. Um esboço da elipse com ambos os conjuntos de eixos está na Figura 3.

EXERCÍCIOS 10.4

Nos Exercícios de 1 a 4, para a equação dada, (a) encontre uma equação do gráfico em relação aos eixos $\bar{x}$ e $\bar{y}$, obtidos por uma rotação de um ângulo cuja medida é $\frac{\pi}{4}$ e (b) faça um esboço do gráfico e mostre os dois conjuntos de eixos.

1. $xy = 8$ **2.** $xy = -4$
3. $x^2 - y^2 = 8$ **4.** $y^2 - x^2 = 16$

Nos Exercícios de 5 a 12, remova da equação dada o termo xy por uma rotação de eixos. Faça um esboço do gráfico e mostre os dois conjuntos de eixos.

5. $24xy - 7y^2 + 36 = 0$ **6.** $4xy + 3x^2 = 4$
7. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$
8. $x^2 + xy + y^2 = 3$ **9.** $xy + 16 = 0$
10. $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 9$
11. $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 144$
12. $6x^2 + 20\sqrt{3}xy + 26y^2 = 324$

Nos Exercícios de 13 a 22, simplifique a equação dada com uma rotação e uma translação de eixos. Faça um esboço do gráfico e mostre os três conjuntos de eixos.

13. $x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$
14. $19x^2 + 6xy + 11y^2 - 26x + 38y + 31 = 0$
15. $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$
16. $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$
17. $x^2 + 2xy + y^2 + x - y - 4 = 0$
18. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 400 = 0$
19. $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0$
20. $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$
21. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 12y = 0$
22. $x^2 + 2xy + y^2 - x - 3y = 0$

23. Mostre que o gráfico de $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ é um segmento de uma parábola por uma rotação de eixos de um ângulo cuja medida é $\frac{\pi}{4}$. (*Sugestão*: elimine os radicais na equação, antes de aplicar o Teorema 10.4.1.)

24. Dada a equação $(a^2 + b^2)xy = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$, ache uma equação do gráfico em relação aos eixos $\bar{x}$ e $\bar{y}$, obtidos por uma rotação de eixos cujo ângulo tem por medida $\operatorname{tg}^{-1}(b/a)$.

25. Mostre que para a equação geral do segundo grau em duas variáveis, o discriminante $B^2 - 4AC$ é invariante sob uma rotação de eixos.

26. Deduza (3) de (2) desta secção resolvendo em x e y em termos de $\bar{x}$ e $\bar{y}$. (*Sugestão*: Para resolver em x, multiplique cada membro de (2) por $\cos \alpha$ e cada membro da segunda equação por $\operatorname{sen} \alpha$, e então subtraia os membros correspondentes das equações resultantes. Use um procedimento similar para resolver em y.)

10.5 COORDENADAS POLARES

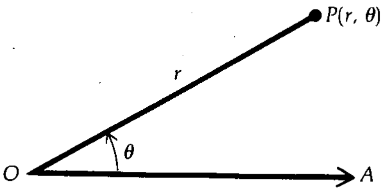


FIGURA 1

Até aqui localizamos um ponto no plano por suas coordenadas cartesianas retangulares. Há outros sistemas de coordenadas que dão a posição de um ponto em um plano. O **sistema de coordenadas polares** é um deles, e é importante, pois certas curvas têm equações mais simples quando esse sistema é usado. Nas coordenadas polares todas as três cônicas (a parábola, a elipse e a hipérbole) têm uma equação. Ela é aplicada na derivação das leis de Kepler em Física e no estudo do movimento de planetas em Astronomia.

No sistema cartesiano, as coordenadas são números chamados de abscissa e ordenada que são as medidas das distâncias orientadas a dois eixos fixos. No

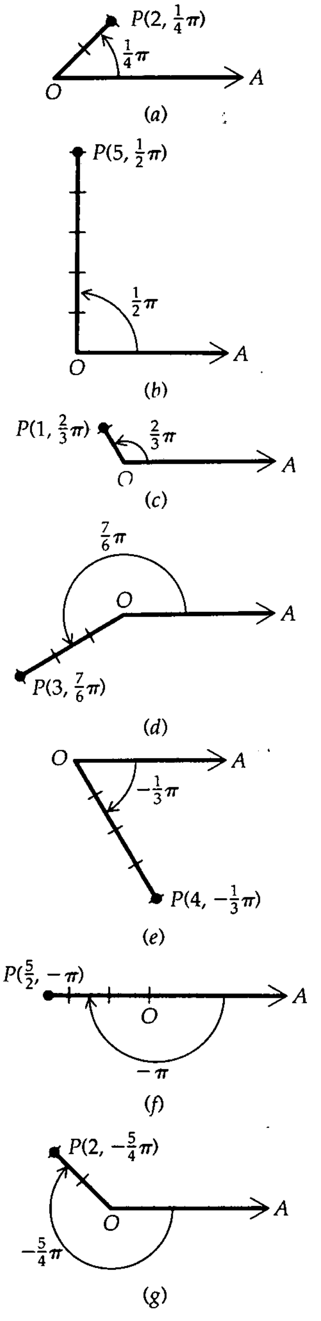


FIGURA 2

sistema polar, as coordenadas consistem em uma distância orientada e na medida de um ângulo relativo a um ponto fixo e a um semi-eixo fixo. O ponto fixo é chamado de **pólo** (ou origem), sendo designado pela letra *O*. O semi-eixo fixo é chamado de **eixo polar** (ou reta polar) e vamos designá-lo por *OA*. O semi-eixo *OA* é, normalmente colocado na horizontal, orientado para a direita e se estende indefinidamente. Veja a Figura 1.

Seja *P* um ponto qualquer do plano, distinto de *O*. Seja θ a medida em radianos do ângulo *AOP*, positiva quando considerada no sentido anti-horário e negativa quando no sentido horário, tendo como lado inicial *OA* e como lado final *OP*. Então, se *r* for a distância não orientada de *O* a *P* (isto é, $r = |\overline{OP}|$), o conjunto de coordenadas polares de *P* será dado por *r* e θ, e escrevemos essas coordenadas como (r, θ).

EXEMPLO 1 Marque cada um dos seguintes pontos com o conjunto de coordenadas polares dado: (a) $(2, \frac{1}{4}\pi)$; (b) $(5, \frac{1}{2}\pi)$; (c) $(1, \frac{2}{3}\pi)$; (d) $(3, \frac{7}{6}\pi)$; (e) $(4, -\frac{1}{3}\pi)$; (f) $(\frac{5}{2}, -\pi)$; (g) $(2, -\frac{5}{4}\pi)$

Solução

(a) O ponto $(2, \frac{1}{4}\pi)$ é determinado primeiro ao desenharmos o ângulo com medida $\frac{\pi}{4}$ rad, tendo seu vértice na origem e seu lado lado inicial ao longo do eixo polar. O ponto no lado terminal que é 2 unidades da origem é o ponto $(2, \frac{\pi}{4})$. Veja a Figura 2(a).

Analogamente, obtemos os pontos mostrados na Figura 2(b) – (g).

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A Figura 3 mostra o ponto $(4, \frac{5}{6}\pi)$. Outro conjunto de coordenadas polares para esse ponto é $(4, -\frac{7}{6}\pi)$; veja a Figura 4. Além disso, as coordenadas polares $(4, \frac{17}{6}\pi)$ também resultam o mesmo ponto, como mostra a Figura 5. ◀

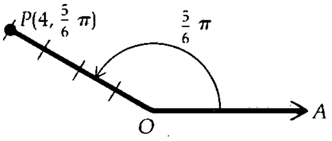


FIGURA 3

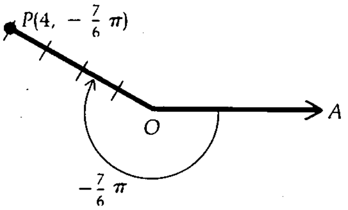


FIGURA 4

Na realidade, as coordenadas $(4, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi)$, onde *n* é um inteiro qualquer são do mesmo ponto, designado com $(4, \frac{5\pi}{6})$. Assim, um dado ponto tem um número ilimitado de conjuntos de coordenadas polares. Nisso o sistema polar é diferente do sistema cartesiano retangular, onde existe uma correspondência biunívoca entre as coordenadas e os pontos do plano. Para as coordenadas polares tal correspondência inexiste. Outro exemplo é obtido considerando as coordenadas polares da origem. Se $r = 0$ e θ é qualquer número real, temos a origem, que é designada por $(0, \theta)$.

Podemos considerar coordenadas polares com *r* negativo. Nesse caso, o ponto estará no prolongamento do lado terminal do ângulo, que é a semi-reta que

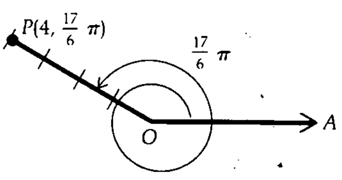


FIGURA 5

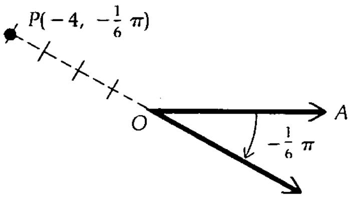


FIGURA 6

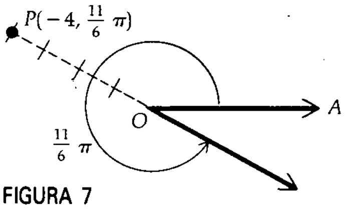


FIGURA 7

parte da origem, estendendo-se no sentido oposto ao lado terminal. Assim, se P estiver sobre o prolongamento do lado terminal do ângulo de medida θ rad, o conjunto de coordenadas polares de P será (r, θ), onde $r = -|\overline{OP}|$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** O ponto $(-4, -\frac{\pi}{6})$ da Figura 6 é o mesmo que o ponto $(4, \frac{5\pi}{6})$, $(4, -\frac{7\pi}{6})$ e $(4, \frac{17\pi}{6})$ da Ilustração 1. Outro conjunto de coordenadas polares para esse ponto é $(-4, \frac{11\pi}{6})$; veja a Figura 7. ◀

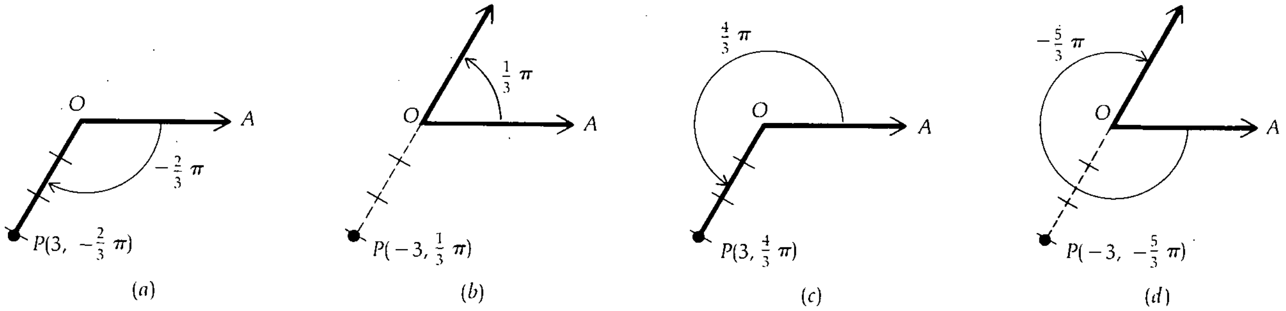
O ângulo é normalmente medido em radianos, assim um conjunto de coordenadas polares de um ponto é um par ordenado de números reais. Para cada par ordenado de números reais existe um único ponto no plano tendo-o como coordenadas polares. Entretanto vimos que cada ponto pode ser dado por um número ilimitado de pares ordenados de números reais. Se o ponto P não for a origem e se restringirmos r e θ de tal forma que $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$, então existirá um único par ordenado de coordenadas polares para P.

EXEMPLO 2 (a) Marque num gráfico o ponto com coordenadas polares $(3, -\frac{2\pi}{3})$. Ache outro conjunto de coordenadas polares desse ponto para as quais (b) $r < 0$ e $0 < \theta < 2\pi$; (b) $r > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$; (c) $r < 0$ e $-2\pi < \theta < 0$.

Solução

(a) Para encontrar o ponto no gráfico, traçamos o ângulo cuja medida em radianos é $-\frac{2}{3}\pi$ na direção horária, a partir do eixo polar. Como $r > 0$, P está sobre o lado terminal do ângulo a três unidades da origem, veja a Figura 8(a).

As respostas a (b), (c) e (d) são, respectivamente, $(-3, \frac{1}{3}\pi)$, $(3, \frac{4}{3}\pi)$, e $(-3, -\frac{5}{3}\pi)$. Elas estão ilustradas na Figura 8(b), (c) e (d).



(a) (b) (c) (d)

FIGURA 8

Freqüentemente, queremos nos referir às coordenadas de um ponto nos dois sistemas de coordenadas: cartesianas retangulares e polares. Para fazer isso, tomamos a origem do primeiro sistema coincidindo com a origem do segundo, o eixo polar como o semi-eixo x positivo e a semi-reta para a qual $\theta = \frac{\pi}{2}$ como o semi-eixo y positivo.

Suponha que P seja o ponto que tenha (x, y) como representação num sistema de coordenadas cartesianas retangulares e seja (r, θ) a representação de P em coordenadas polares. Distinguimos dois casos: $r > 0$ e $r < 0$. No primeiro caso, se $r > 0$, P está sobre o lado terminal do ângulo cuja medida é θ rad e $r = |\overline{OP}|$.

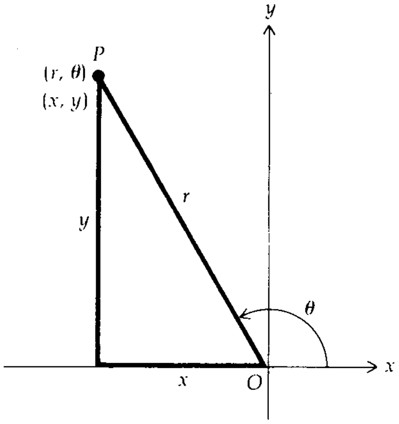


FIGURA 9

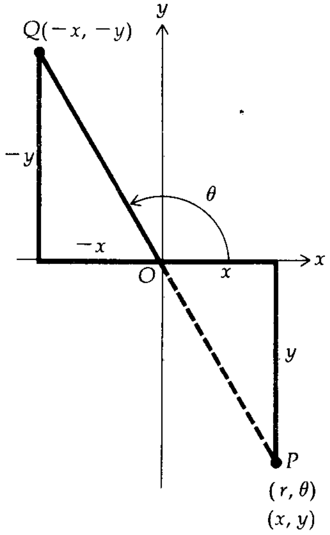


FIGURA 10

Tal caso está na Figura 9. Então,

$$\cos\theta = \frac{x}{|\overline{OP}|} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{-y}{|\overline{OP}|}$$

$$= \frac{x}{r} \qquad\qquad = \frac{y}{r}$$

Assim,

$$\boxed{x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta} \tag{1}$$

No segundo caso, se $r < 0$, então o ponto P estará sobre o prolongamento do lado terminal e $r = -|\overline{OP}|$. Veja a Figura 10. Então, se Q for o ponto $(-x, -y)$,

$$\cos\theta = \frac{-x}{|\overline{OQ}|} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{-y}{|\overline{OQ}|}$$

$$= \frac{-x}{|\overline{OP}|} \qquad\qquad = \frac{-y}{|\overline{OP}|}$$

$$= \frac{-x}{-r} \qquad\qquad = \frac{-y}{-r}$$

$$= \frac{x}{r} \qquad\qquad = \frac{y}{r}$$

Logo,

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Essas equações são as mesmas que (1); assim, as equações (1) são válidas em todos os casos.

Das equações (1) podemos obter as coordenadas cartesianas retangulares de um ponto cujas coordenadas polares são conhecidas. Também, dessas equações podemos obter a equação polar de uma curva, conhecendo a sua equação cartesiana retangular.

Para obter as equações que dão um conjunto de coordenadas polares de um ponto quando as coordenadas cartesianas retangulares são conhecidas, vamos elevar ao quadrado ambos os membros de cada equação em (1), obtendo

$$x^2 = r^2\cos^2\theta \quad \text{e} \quad y^2 = r^2\operatorname{sen}^2\theta$$

Somando membro a membro teremos

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\boxed{r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2}$$

Dividindo as equações (1), teremos

$$\frac{r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}} \tag{3}$$

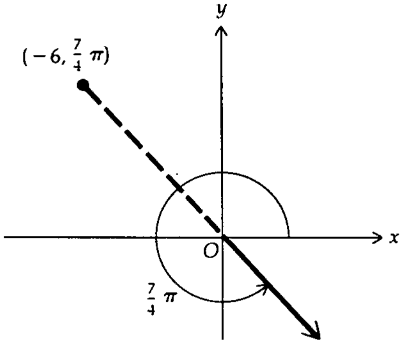


FIGURA 11

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** O ponto cujas coordenadas polares são $(-6, \frac{7}{4}\pi)$ está colocado no gráfico da Figura 11. Vamos encontrar suas coordenadas cartesianas retangulares. De (1),

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & y &= r \operatorname{sen}\theta \\ &= -6\cos\tfrac{7}{4}\pi & &= -6\operatorname{sen}\tfrac{7}{4}\pi \\ &= -6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} & &= -6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -3\sqrt{2} & &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Assim, o ponto é $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$. ◀

O gráfico de uma equação em coordenadas polares r e θ consiste em todos aqueles pontos e somente aqueles pontos P que têm pelo menos um par de coordenadas que satisfaçam a equação. Se a equação de um gráfico for dada em coordenadas polares, ela será chamada de **equação polar** para podermos distingui-la da **equação cartesiana** que é o termo usado quando uma equação é dada em coordenadas cartesianas retangulares. Na Secção 11.6 discutiremos métodos para obter o gráfico de uma equação polar.

EXEMPLO 3 Dado que a equação polar de um gráfico é

$$r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$$

ache a equação cartesiana.

Solução Como $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$, temos que $\operatorname{sen} 2\theta = 2(y/r)(x/r)$. Com essa substituição e $r^2 = x^2 + y^2$, obtemos da equação polar dada

$$x^2 + y^2 = 4(2)\frac{y}{r}\cdot\frac{x}{r}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{r^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 8xy$$

EXEMPLO 4 Ache (r, θ) se $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$ para o ponto cuja representação cartesiana é $(-\sqrt{3}, -1)$.

Solução O ponto $(-\sqrt{3}, -1)$ está colocado no gráfico da Figura 12. De (2), como $r > 0$,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{3+1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

De (3), $\operatorname{tg}\theta = -1/(-\sqrt{3})$, e como $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$,

$$\theta = \tfrac{7}{6}\pi$$

Assim, o ponto é $(2, \frac{7\pi}{6})$.

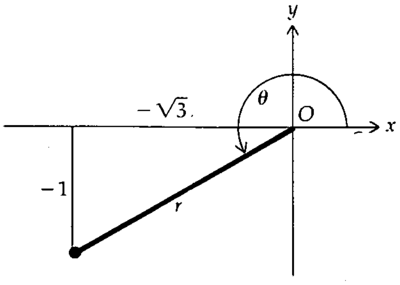


FIGURA 12

EXEMPLO 5 Ache a equação polar do gráfico cuja equação cartesiana é

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

Solução Substituindo $x = r\cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$ em

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

temos

$$\begin{aligned} r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta - 4r\cos\theta &= 0 \\ r^2 - 4r\cos\theta &= 0 \\ r(r - 4\cos\theta) &= 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$r = 0 \quad \text{ou} \quad r - 4\cos\theta = 0$$

O gráfico de $r = 0$ é a origem, contudo, ela é um ponto do gráfico de $r - 4\cos\theta = 0$ pois $r = 0$ quando $\theta = \frac{\pi}{2}$. Logo, a equação polar do gráfico é

$$r = 4\cos\theta$$

O gráfico de $x^2 + y^2 - 4x = 0$ é uma circunferência. A equação pode ser escrita na forma

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

que é a equação de uma circunferência com centro em (2, 0) e raio 2.

EXERCÍCIOS 10.5

Nos Exercícios de 1 à 4, marque o ponto com o conjunto de coordenadas polares dadas.

1. (a) $(3, \frac{1}{6}\pi)$; (b) $(2, \frac{2}{3}\pi)$; (c) $(1, \pi)$; (d) $(4, \frac{5}{4}\pi)$; (e) $(5, \frac{11}{6}\pi)$

2. (a) $(4, \frac{1}{3}\pi)$ (b) $(3, \frac{3}{4}\pi)$; (c) $(1, \frac{7}{6}\pi)$; (d) $(2, \frac{3}{2}\pi)$; (e) $(5, \frac{5}{3}\pi)$

3. (a) $(1, -\frac{1}{4}\pi)$; (b) $(3, -\frac{5}{6}\pi)$; (c) $(-1, \frac{1}{4}\pi)$; (d) $(-3, \frac{5}{6}\pi)$; (e) $(-2, -\frac{1}{2}\pi)$

4. (a) $(5, -\frac{2}{3}\pi)$; (b) $(2, -\frac{7}{6}\pi)$; (c) $(-5, \frac{2}{3}\pi)$; (d) $(-2, \frac{7}{6}\pi)$; (e) $(-4, -\frac{5}{4}\pi)$

Nos Exercícios de 5.a 10, marque num gráfico o ponto com as coordenadas polares dadas; ache então outro conjunto de coordenadas polares para o mesmo ponto para o qual (a) $r < 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$; (b) $r > 0$ e $-2\pi < \theta \leqslant 0$; (c) $r < 0$ e $-2\pi < \theta \leqslant 0$.

5. $(4, \frac{1}{4}\pi)$
6. $(3, \frac{5}{6}\pi)$
7. $(2, \frac{1}{2}\pi)$
8. $(3, \frac{3}{2}\pi)$
9. $(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi)$
10. $(2, \frac{4}{3}\pi)$

11. Coloque num gráfico o ponto com coordenadas polares $(2, -\frac{1}{4}\pi)$. Ache outro conjunto de coordenadas polares para esse ponto sendo (a) $r < 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$; (b) $r < 0$ e $-2\pi < \theta \leqslant 0$; (c) $r > 0$ e $2\pi \leqslant \theta < 4\pi$.

12. Coloque num gráfico o ponto com coordenadas polares $(-3, -\frac{2}{3}\pi)$. Ache outro conjunto de coordenadas polares para esse ponto sendo (a) $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$; (b) $r > 0$ e $-2\pi < \theta \leqslant 0$; (c) $r < 0$ e $2\pi \leqslant \theta < 4\pi$.

Nos Exercícios de 13 a 20, coloque num gráfico o ponto com coordenadas polares dadas; dê, então, dois outros conjuntos de coordenadas polares para o mesmo ponto; um com o mesmo valor de r e outro com o sinal oposto a r.

13. $(3, -\frac{2}{3}\pi)$
14. $(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\pi)$
15. $(-4, \frac{5}{6}\pi)$
16. $(-2, \frac{4}{3}\pi)$
17. $(-2, -\frac{5}{4}\pi)$
18. $(-3, -\pi)$
19. $(2, 6)$
20. $(5, \frac{1}{6}\pi)$

Nos Exercícios 21 e 22, ache as coordenadas cartesianas retangulares dos pontos cujas coordenadas polares são dadas.

21. (a) $(3, \pi)$: (b) $(\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\pi)$; (c) $(-4, \frac{2}{3}\pi)$; (d) $(-1, -\frac{7}{6}\pi)$

22. (a) $(-2, -\frac{1}{2}\pi)$; (b) $(-1, \frac{1}{4}\pi)$; (c) $(2, -\frac{7}{6}\pi)$; (d) $(2, \frac{7}{4}\pi)$

Nos Exercícios 23 e 24, ache um conjunto de coordenadas polares dos pontos cujas coordenadas cartesianas retangulares são dadas. Tome $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

23. (a) $(1, -1)$; (b) $(-\sqrt{3}, 1)$; (c) $(2, 2)$; (d) $(-5, 0)$

24. (a) $(3, -3)$; (b) $(-1, \sqrt{3})$; (c) $(0, -2)$; (d) $(-2, -2\sqrt{3})$

Nos Exercícios de 25 a 34, ache a equação polar do gráfico dada a sua equação cartesiana.

25. $x^2 + y^2 = a^2$
26. $x + y = 1$
27. $y^2 = 4(x + 1)$
28. $x^3 = 4y^2$
29. $x^2 = 6y - y^2$
30. $x^2 - y^2 = 16$
31. $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$
32. $2xy = a^2$
33. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
34. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Nos Exercícios de 35 a 44, ache a equação cartesiana do gráfico tendo a sua equação polar.

35. $r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta$
36. $r^2 \cos 2\theta = 10$
37. $r^2 = \cos \theta$
38. $r^2 = 4 \cos 2\theta$
39. $r^2 = \theta$
40. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$
41. $r \cos \theta = -1$
42. $r^6 = r^2 \cos^2 \theta$
43. $r = \dfrac{6}{2 - 3 \operatorname{sen} \theta}$
44. $r = \dfrac{4}{3 - 2 \cos \theta}$

10.6 GRÁFICOS DE EQUAÇÕES EM COORDENADAS POLARES

Na Secção 10.5 estabelecemos que o gráfico de uma equação polar consiste naqueles e somente naqueles pontos tendo pelo menos um par de coordenadas polares, que satisfaçam a equação. Nesta secção mostraremos como obter um esboço de tal gráfico.

A equação

$$\boxed{\theta = C}$$

onde C é uma constante, está satisfeita por todos os pontos tendo coordenadas polares (r, C), qualquer que seja o valor de r. Logo, o gráfico dessa equação é uma reta que passa pela origem e faz com o eixo polar um ângulo de medida C rad. Veja a Figura 1. A mesma reta é dada pela equação

$$\theta = C \pm k\pi$$

onde k é um inteiro qualquer.

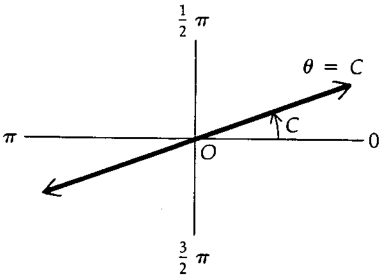


FIGURA 1

▶ ILUSTRAÇÃO 1 (a) O gráfico da equação

$$\theta = \tfrac{\pi}{4}$$

está na Figura 2. É uma reta passando pela origem e fazendo com o eixo polar um ângulo com medida $\frac{\pi}{4}$. A mesma reta é dada pelas equações

$$\theta = \tfrac{5}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{9}{4}\pi \qquad \theta = -\tfrac{3}{4}\pi \qquad \theta = -\tfrac{7}{4}\pi$$

e assim por diante.

(b) O gráfico da equação

$$\theta = \tfrac{2}{3}\pi$$

está na Figura 3. É a reta que passa pela origem e forma com o eixo polar um ângulo com medida $\frac{2\pi}{3}$ rad. Outras equações dessa reta são

$$\theta = \tfrac{5}{3}\pi \qquad \theta = \tfrac{8}{3}\pi \qquad \theta = -\tfrac{1}{3}\pi \qquad \theta = -\tfrac{4}{3}\pi$$

e assim por diante. ◀

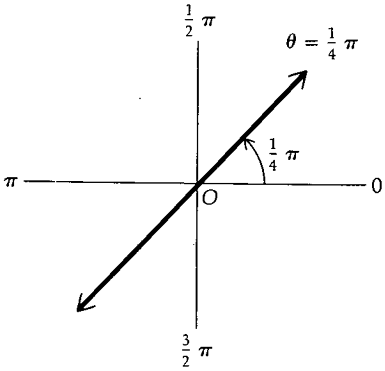


FIGURA 2

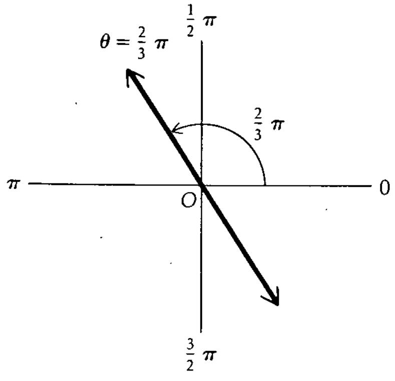


FIGURA 3

Em geral, a forma polar da equação de uma reta não é tão simples quanto a forma cartesiana. Contudo, se a reta for paralela ao eixo polar ou ao eixo $\frac{\pi}{2}$, a equação será razoavelmente simples.

Se uma reta for paralela ao eixo polar e contiver o ponto B cujas coordenadas cartesianas são $(0, b)$ e cujas coordenadas polares são $(b, \frac{\pi}{2})$, então a equação cartesiana será $y = b$. Substituindo y por $r \operatorname{sen} \theta$, temos

$$\boxed{r \operatorname{sen} \theta = b}$$

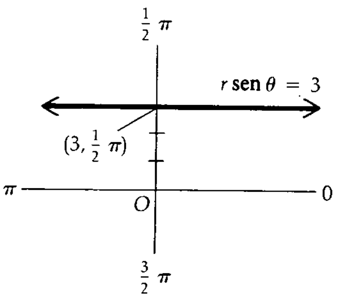

$\frac{1}{2}\pi$
$r \operatorname{sen} \theta = 3$
$(3, \frac{1}{2}\pi)$
π
O
0
$\frac{3}{2}\pi$

FIGURA 4

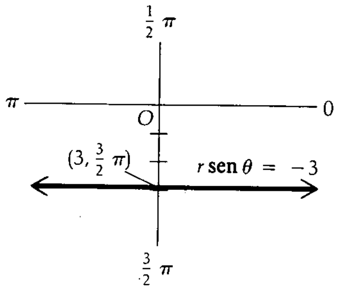

$\frac{1}{2}\pi$
π
O
0
$(3, \frac{3}{2}\pi)$
$r \operatorname{sen} \theta = -3$
$\frac{3}{2}\pi$

FIGURA 5

que é a equação polar de qualquer reta paralela ao eixo polar. Se b for positivo, a reta estará acima do eixo polar. Se b for negativo, ela estará abaixo do eixo polar.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Na Figura 4 temos um esboço do gráfico da equação

$$r \operatorname{sen} \theta = 3$$

e na Figura 5 temos um esboço do gráfico da equação

$$r \operatorname{sen} \theta = -3$$

◀

Agora, consideremos uma reta paralela ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ ou, equivalentemente, perpendicular ao eixo polar. Se a reta passar pelo ponto A cujas coordenadas cartesianas são $(a, 0)$ e cujas coordenadas polares são $(a, 0)$, a equação cartesiana será $x = a$. Substituindo x por $r \cos \theta$ obtemos

$$\boxed{r \cos \theta = a}$$

que é a equação de qualquer reta perpendicular ao eixo polar. Se a for positivo, a reta estará à direita do semi-eixo $\frac{\pi}{2}$. Se a for negativo, a reta estará à esquerda do semi-eixo $\frac{\pi}{2}$.

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** A Figura 6 mostra um esboço do gráfico da equação

$$r \cos \theta = 3$$

e a Figura 7 mostra um esboço do gráfico da equação

$$r \cos \theta = -3$$

◀

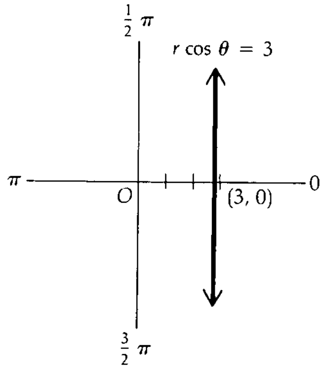

$\frac{1}{2}\pi$
$r \cos \theta = 3$
π
O
$(3, 0)$
0
$\frac{3}{2}\pi$

FIGURA 7

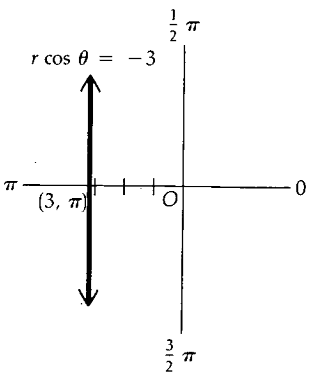

$\frac{1}{2}\pi$
$r \cos \theta = -3$
π
$(3, \pi)$
O
0
$\frac{3}{2}\pi$

FIGURA 8

O gráfico da equação

$$r = C$$

onde C é uma constante qualquer, é uma circunferência cujo centro está na origem e cujo raio é $|C|$. A mesma circunferência é dada pela equação

$$\boxed{r = -C}$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Na Figura 8 está um esboço do gráfico da equação

$$r = 4$$

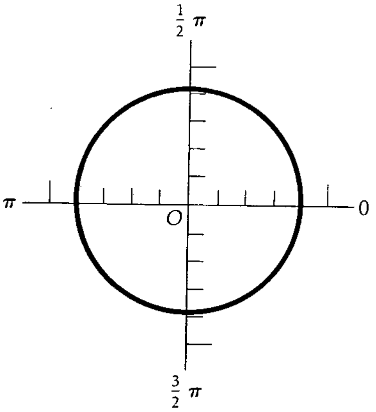

$\frac{1}{2}\pi$
π
O
0
$\frac{3}{2}\pi$

FIGURA 6

É uma circunferência com centro na origem e raio 4. A mesma circunferência é dada pela equação

$$r = -4$$

embora seja pouco comum o uso dessa equação. ◄

Como no caso da reta, a equação polar geral de uma circunferência não é tão simples quanto a forma cartesiana. Existem, todavia, casos particulares da equação da circunferência que merecem ser considerados na forma polar.

Se uma circunferência contém a origem (o polo) e tem o seu centro num ponto com coordenadas (a, b), então a sua equação cartesiana será.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$$

Uma equação polar dessa circunferência é

$$\begin{aligned} (r\cos\theta)^2 + (r \operatorname{sen}\theta)^2 - 2a(r\cos\theta) - 2b(r\operatorname{sen}\theta) &= 0 \\ r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) - 2ar\cos\theta - 2br\operatorname{sen}\theta &= 0 \\ r^2 - 2ar\cos\theta - 2br\operatorname{sen}\theta &= 0 \\ r(r - 2a\cos\theta - 2b\operatorname{sen}\theta) &= 0 \\ r = 0 \qquad r - 2a\cos\theta - 2b\operatorname{sen}\theta &= 0 \end{aligned}$$

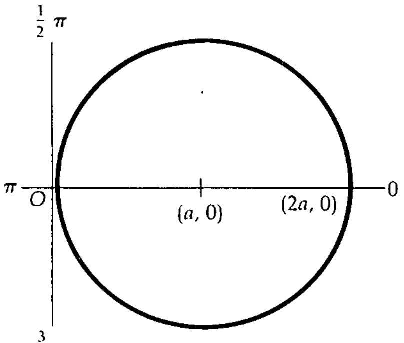


FIGURA 9

Como o gráfico de $r = 0$ é a origem e este ($r = 0$ quando $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(-\frac{a}{b})$) está no gráfico de $r - 2a\cos\theta - 2b\operatorname{sen}\theta = 0$, uma equação polar da circunferência será

$$r = 2a\cos\theta + 2b\operatorname{sen}\theta$$

Quando $b = 0$ nesta equação, a equação torna-se

$$\boxed{r = 2a\cos\theta}$$

que é uma equação polar da circunferência, de raio $|a|$ unidades, com seu centro sobre o eixo polar ou em sua extensão, e tangente ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$. Se $a > 0$, a circunferência está à direita da origem (veja a Figura 9), e se $a < 0$, a circunferência está à esquerda da origem.

Se $a = 0$ na equação $r = 2a\cos\theta + 2b\operatorname{sen}\theta$, temos

$$\boxed{r = 2b\operatorname{sen}\theta}$$

que é uma equação polar da circunferência, com raio $|b|$ unidades e centro sobre o semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ ou em sua extensão, e tangente ao eixo polar. Se $b > 0$, a circunferência está acima da origem e se $b < 0$, está abaixo dela.

EXEMPLO 1 Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes equações:

(a) $r = 5\cos\theta$ (b) $r = -6\operatorname{sen}\theta$

Solução

(a) A equação

$$r = 5\cos\theta$$

é da forma $r = 2a\cos\theta$ com $a = \frac{5}{2}$. Assim, o gráfico é uma circunferência com centro no ponto que tem coordenadas polares $(\frac{5}{2}, 0)$, sendo tangente ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$. Um esboço do gráfico está na Figura 10.

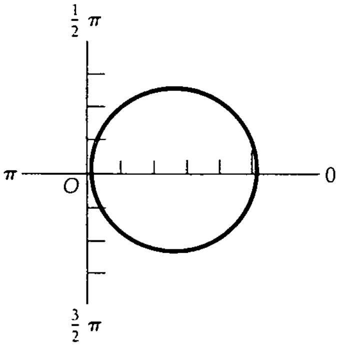


FIGURA 10

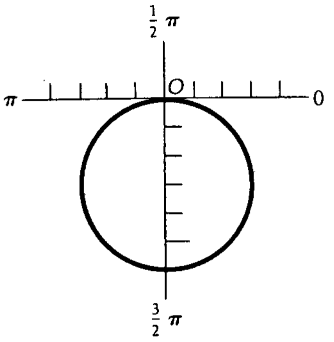


FIGURA 11

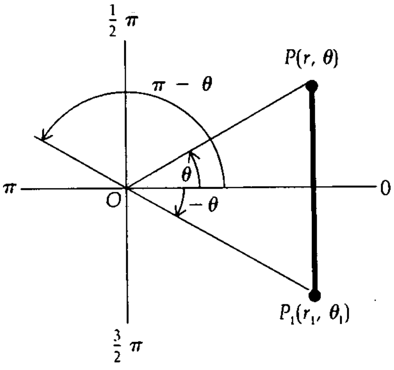


FIGURA 12

(b) A equação

$$r = -6 \text{ sen } \theta$$

é da forma $r = 2b \text{ sen } \theta$ com $b = -3$. O gráfico é a circunferência com centro no ponto tendo como coordenadas polares $(3, \frac{3\pi}{2})$ e tangente ao eixo polar. A Figura 11 mostra um esboço do gráfico.

Apresentamos casos especiais importantes (retas e circunferências) de gráficos de equações polares. Antes de discutir curvas mais gerais tendo equações polares, consideraremos as propriedades da simetria.

Na Secção 1.2 (Definição 1.2.4) ficou estabelecido que dois pontos P e Q são simétricos em relação a uma reta se e somente se a reta for perpendicular ao segmento PQ em seu ponto médio, e que dois pontos P e Q são simétricos em relação a um terceiro ponto se e somente se o terceiro ponto for o ponto médio do segmento de reta PQ. Logo, os pontos $(2, \frac{1}{3}\pi)$ e $(2, \frac{2}{3}\pi)$ são simétricos em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e os pontos $(2, \frac{1}{3}\pi)$ e $(2, -\frac{2}{3}\pi)$ são simétricos em relação à origem. Estabelecemos também (Definição 1.2.5) que o gráfico de uma equação é simétrico em relação a uma rela l se e somente se, para todo ponto P do gráfico, houver um ponto Q, também sobre o gráfico, tal que P e Q sejam simétricos em relação a l. Analogamente, o gráfico de uma equação será simétrico em relação a um ponto R se e somente se, para todo ponto P sobre o gráfico, existir um ponto S, também sobre o gráfico, tal que P e S sejam simétricos em relação a R. Temos três teoremas que podem ser usados como teste de simetria dos gráficos de equações polares.

10.6.1 TEOREMA Se, para uma equação em coordenadas polares, obtivermos uma equação equivalente quando (r, θ) for substituído por $(r, -\theta + 2n\pi)$ ou $(-r, \pi - \theta + 2n\pi)$, onde n é um inteiro qualquer, o gráfico da equação será simétrico em relação ao eixo polar.

Prova Se o ponto $P(r, \theta)$ for um ponto do gráfico de uma equação, então o gráfico será simétrico em relação ao eixo polar se existir um ponto $P_1(r_1, \theta_1)$ do gráfico tal que o eixo polar seja perpendicular ao ponto médio do segmento de reta P_1P (veja a Figura 12). Assim, se $r_1 = r$, então θ_1 precisa ser igual a $-\theta + 2n\pi$, onde n é um inteiro. E se $r_1 = -r$, então θ_1 precisa ser $\pi - \theta + 2n\pi$. ■

10.6.2 TEOREMA Se, para uma equação em coordenadas polares, obtivermos uma equação equivalente quando (r, θ) for substituído por $(r, \pi - \theta + 2n\pi)$ ou $(-r, -\theta + 2n\pi)$ onde n é qualquer inteiro, o gráfico da equação será simétrico em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$.

10.6.3 TEOREMA Se, para uma equação em coordenadas polares, obtivermos uma equação equivalente quando (r, θ) for substituído por $(-r, \theta + 2n\pi)$ ou $(r, \pi + \theta + 2n\pi)$, onde n é qualquer inteiro, o gráfico da equação será simétrico em relação à origem.

As demonstrações dos Teoremas 10.6.2 e 10.6.3 são similares à prova do Teorema 10.6.1 e serão deixadas como exercícios (veja os Exercícios 53 e 54).

► **ILUSTRAÇÃO 5** Para o gráfico da equação

$$r = 4 \cos 2\theta$$

testamos a simetria em relação ao eixo polar, ao eixo $\frac{\pi}{2}$, e à origem.

Usando o Teorema 10.6.1 para testar a simetria em relação ao eixo polar, substituímos (r, θ) por $(r, -\theta)$ e obtemos $r = 4 \cos(-2\theta)$, que é equivalente a $r = 4 \cos 2\theta$. Assim, o gráfico é simétrico em relação ao eixo polar.

Usando o Teorema 10.6.2 para testar a simetria em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$, substituímos (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ obtendo $r = 4 \cos(2(\pi - \theta))$ ou, equivalentemente, $r = 4 \cos(2\pi - 2\theta)$, que equivale à equação $r = 4 \cos 2\theta$. Logo, o gráfico é simétrico em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$.

Para testar a simetria em relação à origem, substituímos (r, θ) por $(-r, \theta)$ obtendo a equação $-r = 4 \cos 2\theta$, que não é equivalente à equação dada. Mas precisamos também determinar se podemos usar outro conjunto de coordenadas. Substituímos (r, θ) por $(r, \pi + \theta)$ obtendo $r = 4 \cos 2(\pi + \theta)$ ou equivalentemente, $r = 4 \cos(2\pi + 2\theta)$, que é equivalente à equação $r = 4 \cos 2\theta$. Logo, o gráfico é simétrico em relação à origem. ◄

Para esboçar um gráfico, é desejável determinar se a origem pertence a ele. Isso é feito substituindo r por 0 e resolvendo em θ. É também vantajoso colocar no gráfico pontos para os quais r tem valores máximo e mínimo relativos. Um recurso adicional para traçar o gráfico, se o gráfico contiver a origem, é traçar as retas tangentes ao gráfico pela origem. Quando for útil, usamos o fato mostrado na Secção Suplementar 10.9: se θ_1 for um valor de θ que satisfaça a equação polar da curva quando $r = 0$, então a reta $\theta = \theta_1$ será tangente à curva na origem.

EXEMPLO 2 Faça um esboço do gráfico da equação

$$r = 1 - 2 \cos \theta$$

Solução Substituindo (r, θ) por $(r, -\theta)$ obtemos uma equação equivalente. Logo, o gráfico é simétrico com relação ao eixo polar.

A Tabela 1 dá as coordenadas de alguns pontos do gráfico, com esses pontos traçamos a metade do gráfico; o restante é traçado pela simetria em relação ao eixo polar.

Se $r = 0$, obtemos $\cos \theta = \frac{1}{2}$ e se $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, então $\theta = \frac{\pi}{3}$. Assim, o ponto $(0, \frac{\pi}{3})$ está no gráfico. Além disso, uma equação da reta tangente ao gráfico pela origem é $\theta = \frac{\pi}{3}$. Um esboço do gráfico está na Figura 13.

Tabela 1

θ	r
0	-1
$\frac{1}{6}\pi$	$1 - \sqrt{3}$
$\frac{1}{3}\pi$	0
$\frac{1}{2}\pi$	1
$\frac{2}{3}\pi$	2
$\frac{5}{6}\pi$	$1 + \sqrt{3}$
π	3

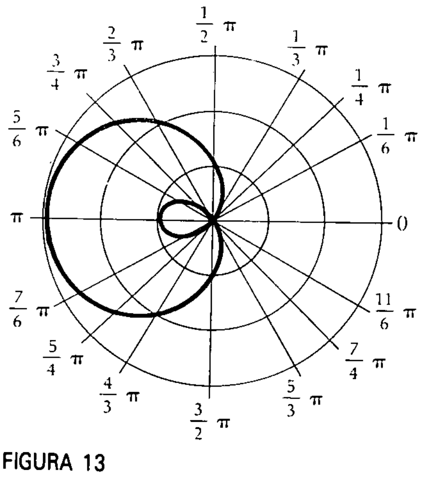


FIGURA 13

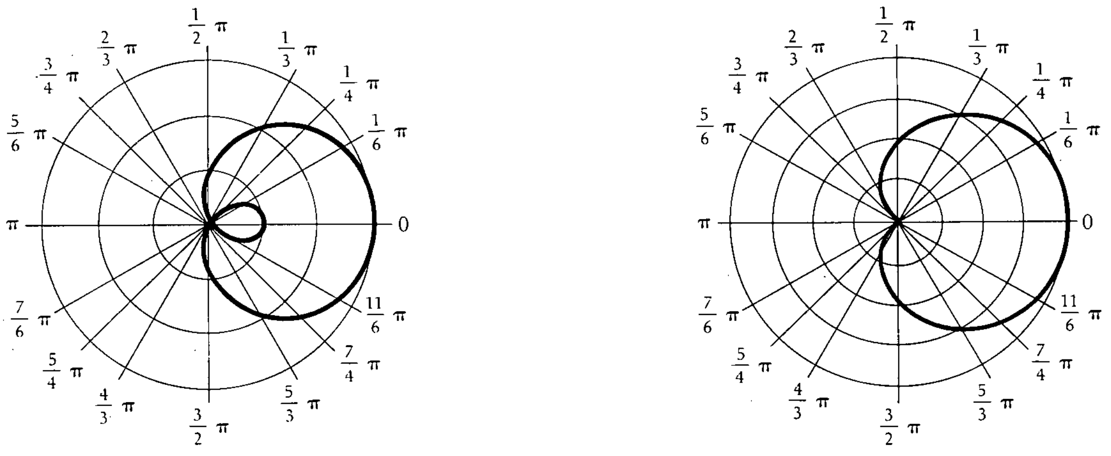
A curva do Exemplo 2 é chamada *limaçon*. O gráfico de uma equação da forma

$$r = a \pm b \cos \theta \quad \text{ou} \quad r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$$

é uma **limaçon**. Existem quatro tipos de *limaçon* e cada tipo depende da razão a/b, onde a e b são positivos. Vamos mostrar os quatro tipos obtidos da equação

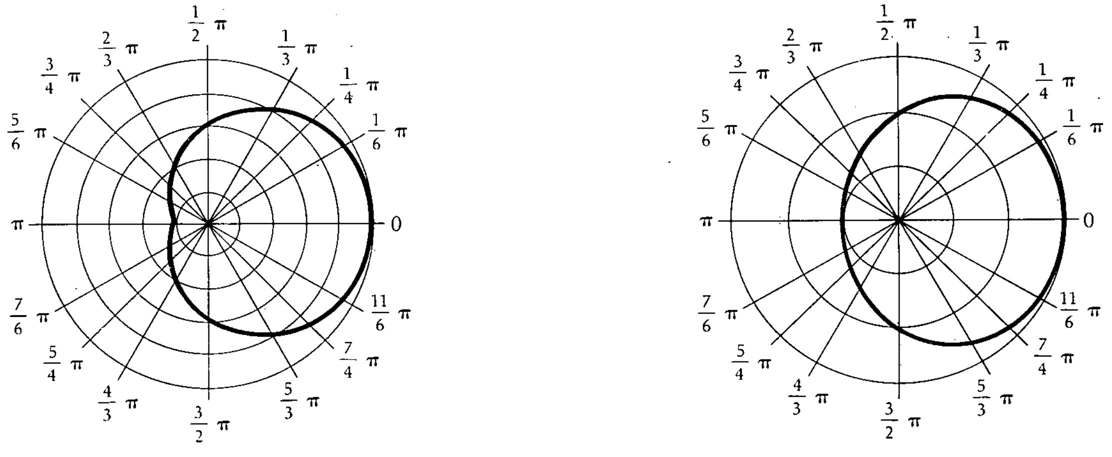
$$\boxed{r = a + b \cos \theta \qquad a > 0 \text{ e } b > 0}$$

1. $0 < \frac{a}{b} < 1$ **Limaçon com um laço**. Veja a Figura 14(a).
2. $\frac{a}{b} = 1$ **Cardióide** (formato de coração). Veja a Figura 14(b).
3. $1 < \frac{a}{b} < 2$ **Limaçon com um dente**. Veja a Figura 14(c).
4. $2 \leqslant \frac{a}{b}$ **Limaçon Convexa** (sem dente). Veja a Figura 14(d).



$0 < \frac{a}{b} < 1$
Limaçon com um laço
(a)

$\frac{a}{b} = 1$
Cardióide
(b)



$1 < \frac{a}{b} < 2$
Limaçon com um dente
(c)

$2 \leq \frac{a}{b}$
Limaçon Convexa
(d)

FIGURA 14

Se você estudar a Secção Suplementar 10.9, onde serão discutidas as retas tangentes horizontal e vertical a curvas polares, a distinção entre as *limaçons* dos tipos 3 (com um dente) e 4 (sem dente) ficará clara.

As *limaçons* obtidas da equação

$$\boxed{r = a + b \operatorname{sen} \theta \qquad a > 0 \text{ e } b > 0}$$

têm o semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ como eixo de simetria. Se a *limaçon* tiver a equação

$$\boxed{r - a = b\cos\theta \qquad a > 0 \text{ e } b > 0}$$

ela apontará na direção de π e se tiver a equação

$$\boxed{r = a - b\,\text{sen}\,\theta \qquad a > 0 \text{ e } b > 0}$$

apontará na direção de $\frac{3\pi}{2}$.

EXEMPLO 3 Faça um esboço do gráfico de cada uma das seguintes *limaçons*:

(a) $r = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$ (b) $r = 2 + 2\cos\theta$ (c) $r = 2 - \text{sen}\,\theta$

Solução

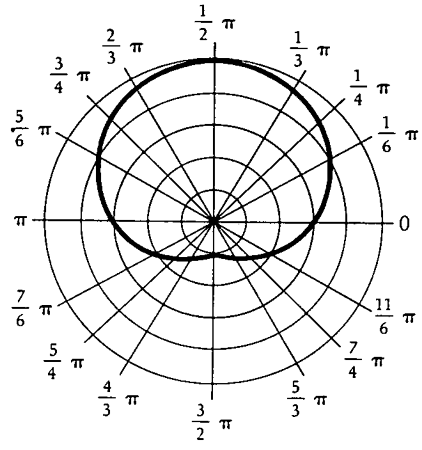


FIGURA 15

Tabela 2

θ	r
0	3
$\frac{1}{6}\pi$	4
$\frac{1}{3}\pi$	$3 + \sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	5
π	3
$\frac{7}{6}\pi$	2
$\frac{4}{3}\pi$	$3 - \sqrt{3}$
$\frac{3}{2}\pi$	1

(a) A equação

$$r = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$$

da forma de $r = a + b\,\text{sen}\,\theta$, com $a = 3$ e $b = 2$. Como $a/b = 3/2$, e $1 < \frac{3}{2} < 2$, o gráfico é uma *limaçon* com dente. Ela é simétrica em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$. A Tabela 2 dá as coordenadas de alguns pontos do gráfico. Um esboço está na Figura 15 e foi feito colocando no gráfico os pontos cujas coordenadas são dadas na Tabela 2 e usando as propriedades de simetria.

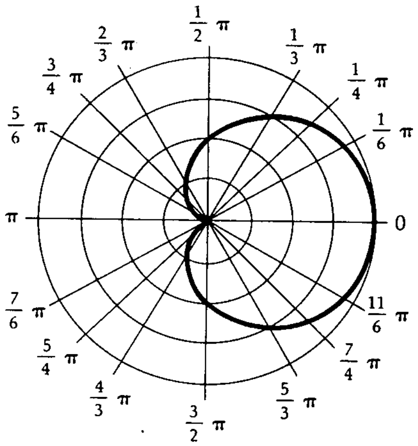


FIGURA 16

Tabela 3

θ	r
0	4
$\frac{1}{6}\pi$	$2 + \sqrt{3}$
$\frac{1}{3}\pi$	3
$\frac{1}{2}\pi$	2
$\frac{2}{3}\pi$	1
$\frac{5}{6}\pi$	$2 - \sqrt{3}$
π	0

(b) A equação

$$r = 2 + 2\cos\theta$$

é da forma de $r = a + b\cos\theta$, com $a = 2$ e $b = 2$. Como $a/b = 1$, o gráfico é uma cardióide. Ela é simétrica em relação ao eixo polar. As coordenadas de alguns pontos sobre o gráfico são dadas na Tabela 3. A Figura 16 é um esboço no qual colocamos esses pontos e usamos as propriedades de simetria.

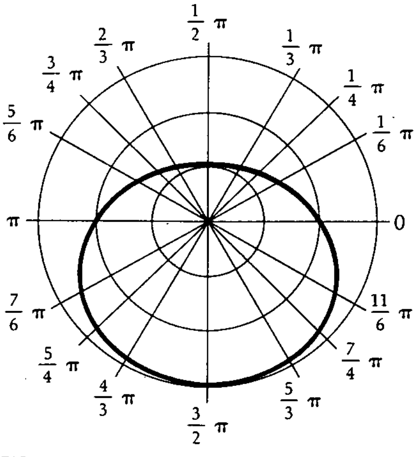


FIGURA 17

Tabela 4

θ	r
0	2
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	1
π	2
$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{2}$
$\frac{4}{3}\pi$	$2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{3}{2}\pi$	3

(c) A equação

$$r = 2 - \text{sen}\,\theta$$

é da forma $r = a - b\,\text{sen}\,\theta$, com $a = 2$ e $b = 1$. Como $a/b = 2$, o gráfico é uma *limaçon* convexa. Ela é simétrica em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e aos pontos na direção $\frac{3\pi}{2}$. A Figura 17 mostra um esboço do gráfico obtido a partir da Tabela 4 e usando as propriedades de simetria.

O gráfico de uma equação da forma

$$\boxed{r = a\cos n\theta \quad \text{ou} \quad r = a\,\text{sen}\,n\theta}$$

será uma **rosácea** com n folhas se n for ímpar e $2n$ folhas se n for par.

EXEMPLO 4 Faça um esboço da rosácea de quatro folhas

$$r = 4 \cos 2\theta$$

Solução Na Ilustração 5 provamos que o gráfico é simétrico em relação ao eixo polar, ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e à origem. Substituindo r por 0 na equação dada obtemos

$$\cos 2\theta = 0$$

de onde obtemos, para $0 \leqslant \theta < 2\pi$,

$$\theta = \tfrac{1}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{3}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{5}{4}\pi \qquad \theta = \tfrac{7}{4}\pi$$

As retas com essas equações são tangentes ao gráfico na origem.

A Tabela 5 dá os valores de r para alguns valores de θ de 0 até $\frac{\pi}{2}$. Desses valores e das propriedades de simetria podemos fazer o esboço da Figura 18.

Tabela 5

θ	r
0	4
$\frac{1}{12}\pi$	$2\sqrt{3}$
$\frac{1}{6}\pi$	2
$\frac{1}{4}\pi$	0
$\frac{1}{3}\pi$	-2
$\frac{5}{12}\pi$	$-2\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	-4

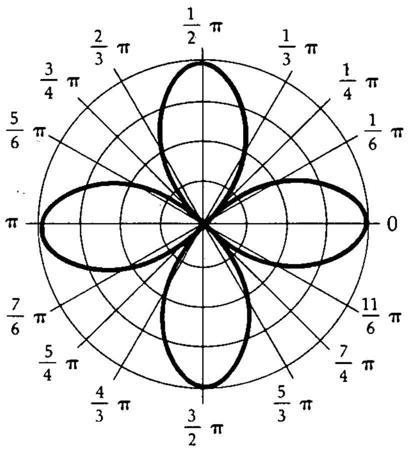


FIGURA 18

Observe que se fizermos $n = 1$ nas equações para uma rosácea, obteremos

$$r = a \cos \theta \quad \text{ou} \quad r = a \operatorname{sen} \theta$$

que são as equações de uma circunferência. Assim sendo, a circunferência pode ser considerada como uma rosácea de uma folha.

Outras curvas polares que ocorrem com freqüência são as *lemniscatas* (veja os Exercícios de 29 a 32) e as *espirais* (veja os Exercícios de 25 a 28). A curva do próximo exemplo é chamada de *espiral de Arquimedes.*

EXEMPLO 5 Faça um esboço do gráfico de

$$r = \theta \qquad \theta \geqslant 0$$

Solução Quando $\theta = n\pi$, onde n é um inteiro qualquer, o gráfico intercepta o eixo polar ou sua extensão e quando $\theta = \frac{1}{2}n\pi$, onde n é ímpar, o gráfico intercepta o semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ ou sua extensão. Quando $r = 0$, $\theta = 0$; assim, a reta tangente à curva na origem é o eixo polar. Um esboço do gráfico está na Figura 19.

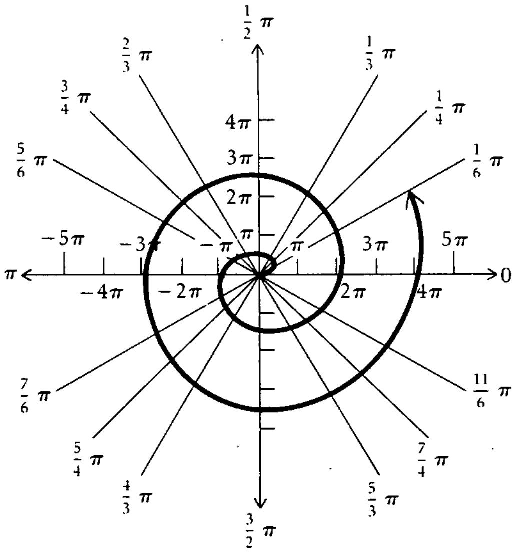


FIGURA 19

Para encontrar os pontos de intersecção de duas curvas dadas em coordenadas cartesianas, resolvemos as duas equações simultaneamente. As soluções comuns às equações dão todos os pontos de intersecção. Entretanto, como um ponto tem um número ilimitado de conjuntos de coordenadas polares, é possível ter como intersecção de duas curvas um ponto para o qual não exista um único par de coordenadas polares que satisfaçam ambas as equações. Isso está ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 6 Faça esboços dos gráficos de

$$r = 2 \operatorname{sen} 2\theta \quad \text{e} \quad r = 1$$

com a mesma origem e o mesmo eixo polar, e encontre os pontos de intersecção.

Solução O gráfico de $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ é uma rosácea de quatro folhas e o gráfico de $r = 1$ é uma circunferência com centro na origem e raio 1. Esboços dos gráficos estão na Figura 20. Resolvendo simultaneamente as duas equações teremos

$$2 \operatorname{sen} 2\theta = 1$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = \tfrac{1}{2}$$

Logo,

$$2\theta = \tfrac{1}{6}\pi \qquad 2\theta = \tfrac{5}{6}\pi \qquad 2\theta = \tfrac{13}{6}\pi \qquad 2\theta = \tfrac{17}{6}\pi$$

$$\theta = \tfrac{1}{12}\pi \qquad \theta = \tfrac{5}{12}\pi \qquad \theta = \tfrac{13}{12}\pi \qquad \theta = \tfrac{17}{12}\pi$$

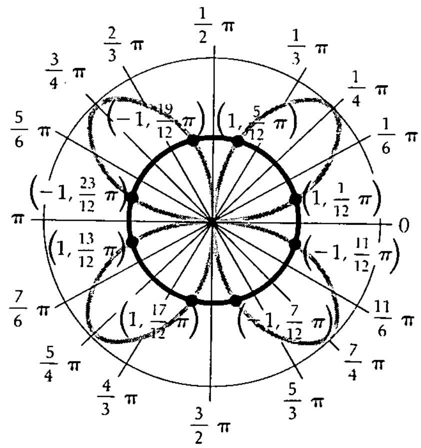


FIGURA 20

Assim, obtemos os pontos de intersecção $(1, \frac{1}{12}\pi)$, $(1, \frac{5}{12}\pi)$, $(1, \frac{13}{12}\pi)$, $(1, \frac{17}{12}\pi)$. Notamos na Figura 20 que existem oito pontos de intersecção. Os quatro pontos restantes são obtidos se tomarmos uma outra forma da equação da circunferência $r = 1$, isto é, reconsiderarmos a equação $r = -1$, que é a mesma circunferência. Resolvendo essa equação e a da rosácea de quatro folhas simultaneamente, teremos

$$\operatorname{sen} 2\theta = -\tfrac{1}{2}$$

Então, obtemos

$$2\theta = \tfrac{7}{6}\pi \qquad 2\theta = \tfrac{11}{6}\pi \qquad 2\theta = \tfrac{19}{6}\pi \qquad 2\theta = \tfrac{23}{6}\pi$$

$$\theta = \tfrac{7}{12}\pi \qquad \theta = \tfrac{11}{12}\pi \qquad \theta = \tfrac{19}{12}\pi \qquad \theta = \tfrac{23}{12}\pi$$

Assim, temos os quatro pontos $(-1, \frac{7}{12}\pi)$, $(-1, \frac{11}{12}\pi)$, $(-1, \frac{19}{12}\pi)$, e $(-1, \frac{23}{12}\pi)$. Incidentalmente, $(-1, \frac{7}{12}\pi)$ pode também ser escrito como $(1, \frac{19}{12}\pi)$, $(-1, \frac{11}{12}\pi)$ pode ser escrito como $(1, \frac{23}{12}\pi)$, $(-1, \frac{19}{12}\pi)$ pode ser escrito como $(1, \frac{7}{12}\pi)$ e $(-1, \frac{23}{12}\pi)$ pode ser escrito como $(1, \frac{11}{12}\pi)$.

Como $(0, \theta)$ representa a origem para qualquer θ, determinamos se a origem é um ponto de intersecção fazendo $r = 0$ em cada equação e resolvendo em θ.

Muitas vezes, as coordenadas dos pontos de intersecção de duas curvas podem ser encontradas diretamente de seus gráficos. No entanto, a seguir temos um método geral.

Se a equação polar de uma curva for dada por $r = f(\theta)$, então a mesma curva será dada por

$$(-1)^n r = f(\theta + n\pi) \qquad (1)$$

onde n é qualquer inteiro.

▶ **ILUSTRAÇÃO 6** Considere as curvas do Exemplo 6. O gráfico da equação $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ também tem a equação (fazendo $n = 1$ em (1))

$$(-1)r = 2 \operatorname{sen} 2(\theta + \pi) \Leftrightarrow -r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$$

Se fizermos $n = 2$ em (1), o gráfico de $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ também terá a equação

$$(-1)^2 r = 2 \operatorname{sen} 2(\theta + 2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$$

que é igual à equação original. Fazendo n igual a qualquer outro inteiro obtemos $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ ou $r = -2 \operatorname{sen} 2\theta$. O gráfico da equação $r = 1$ também terá a equação (fazendo $n = 1$ em (1)).

$$r = -1$$

Outros valores de n em (1) aplicados à equação $r = 1$ dão $r = 1$ ou $r = -1$. ◀

Se tivermos as equações $r = f(\theta)$ e $r = g(\theta)$, obteremos todos os pontos de intersecção dos gráficos das equações fazendo o seguinte:

(a) Use (1) para determinar todas as equações distintas das duas curvas:

$$r = f_1(\theta),\ r = f_2(\theta),\ r = f_3(\theta),\ \ldots \qquad (2)$$

$$r = g_1(\theta),\ r = g_2(\theta),\ r = g_3(\theta),\ \ldots \qquad (3)$$

(b) Resolva cada equação de (2) simultaneamente com cada equação de (3).

(c) Verifique se a origem é um ponto de intersecção, fazendo $r = 0$ em ambas, obtendo assim

$$f(\theta) = 0 \quad \text{e} \quad g(\theta) = 0$$

Se cada uma dessas equações tiver uma solução em θ, não necessariamente a mesma, então a origem estará em ambas as curvas.

EXEMPLO 7 Ache os pontos de intersecção das duas curvas

$$r = 2 - 2\cos\theta \quad \text{e} \quad r = 2\cos\theta$$

Faça esboços de seus gráficos.

Solução Para encontrar outra equação da curva representada por

$$r = 2 - 2\cos\theta$$

temos

$$(-1)r = 2 - 2\cos(\theta + \pi)$$
$$-r = 2 + 2\cos\theta$$

e

$$(-1)^2 r = 2 - 2\cos(\theta + 2\pi)$$
$$r = 2 - 2\cos\theta$$

que é igual à equação original.

Analogamente, encontramos outras equações da curva dada por $r = 2\cos\theta$:

$$(-1)r = 2\cos(\theta + \pi)$$

$$-r = -2\cos\theta$$

$$r = 2\cos\theta$$

que é igual à equação original.

Assim, temos duas equações possíveis para a primeira curva, $r = 2 - 2\cos\theta$ e $-r = 2 + 2\cos\theta$, e uma equação para a segunda curva, $r = 2\cos\theta$. Resolvendo simultaneamente $r = 2 - 2\cos\theta$ e $r = 2\cos\theta$, obtemos

$$2\cos\theta = 2 - 2\cos\theta$$

$$4\cos\theta = 2$$

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}$$

Assim, $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$, dando os pontos $(1, \frac{1}{3}\pi)$ e $(1, \frac{5}{3}\pi)$. Resolvendo simultaneamente $-r = 2 + 2\cos\theta$ e $r = 2\cos\theta$, teremos

$$2 + 2\cos\theta = -2\cos\theta$$

$$4\cos\theta = -2$$

$$\cos\theta = -\tfrac{1}{2}$$

Logo $\theta = \frac{2\pi}{3}$ e $\theta = \frac{4\pi}{3}$, dando os pontos $(-1, \frac{2}{3}\pi)$ e $(-1, \frac{4}{3}\pi)$. Entretanto, $(-1, \frac{2}{3}\pi)$ é o mesmo ponto que $(1, \frac{5}{3}\pi)$ e $(-1, \frac{4}{3}\pi)$ é o mesmo ponto que $(1, \frac{1}{3}\pi)$.

Verificando se a origem está na primeira curva, fazemos $r = 0$ na equação $r = 2 - 2\cos\theta$, obtendo

$$0 = 2 - 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = 1$$

$$\theta = 0$$

Logo, a origem está na primeira curva. Analogamente, tomamos $r = 0$ na equação $r = 2\cos\theta$, obtendo

$$0 = 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \theta = \tfrac{3}{2}\pi$$

Portanto, a origem está na segunda curva.

Assim sendo, os pontos de intersecção das duas curvas são $(1, \frac{1}{3}\pi)$, $(1, \frac{5}{3}\pi)$, e a origem. Esboços das curvas estão na Figura 21.

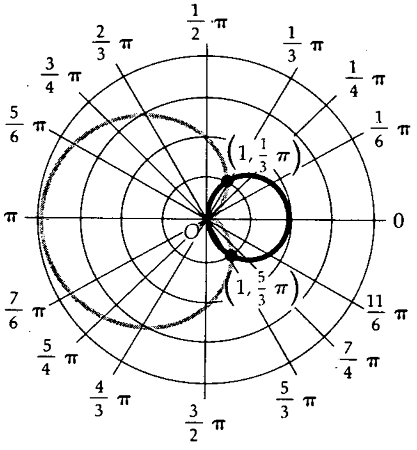


FIGURA 21

EXERCÍCIOS 10.6

Nos Exercícios de 1 a 36, faça um esboço do gráfico da equação dada.

1. (a) $\theta = \frac{1}{3}\pi$; (b) $r = \frac{1}{3}\pi$

2. (a) $\theta = \frac{3}{4}\pi$; (b) $r = \frac{3}{4}\pi$

3. (a) $\theta = 2$; (b) $r = 2$

4. (a) $\theta = -3$; (b) $r = -3$

5. (a) $r\cos\theta = 4$; (b) $r = 4\cos\theta$

6. (a) $r\,\text{sen}\,\theta = 2$; (b) $r = 2\,\text{sen}\,\theta$

7. (a) $r\,\text{sen}\,\theta = -4$; (b) $r = -4\,\text{sen}\,\theta$

8. (a) $r\cos\theta = -5$; (b) $r = -5\cos\theta$

9. $r = 4 - 4\cos\theta$

10. $r = 3 - 3\,\text{sen}\,\theta$

11. $r = 2 + 2\,\text{sen}\,\theta$

12. $r = 3 + 3\cos\theta$

13. $r = 2 - 3\,\text{sen}\,\theta$

14. $r = 4 - 3\,\text{sen}\,\theta$

15. $r = 3 - 2\cos\theta$

16. $r = 3 - 4\cos\theta$

17. $r = 4 + 2\,\text{sen}\,\theta$

18. $r = 6 + 2\cos\theta$

19. $r = 2\,\text{sen}\,3\theta$

20. $r = 4\,\text{sen}\,5\theta$

21. $r = 2\cos 4\theta$

22. $r = 3\cos 2\theta$

23. $r = 4\,\text{sen}\,2\theta$

24. $r = 3\cos 3\theta$

25. $r = e^{\theta}$ (espiral logarítmica)

26. $r = e^{\theta/3}$ (espiral logarítmica)

27. $r = \dfrac{1}{\theta}$ (espiral recíproca)

28. $r = 2\theta$ (espiral de Arquimedes)

29. $r^2 = 9\,\text{sen}\,2\theta$ (lemniscata)

30. $r^2 = 16\cos 2\theta$ (lemniscata)

31. $r^2 = -25\cos 2\theta$ (lemniscata)

32. $r^2 = -4\,\text{sen}\,2\theta$ (lemniscata)

33. $r = 2\,\text{sen}\,\theta\,\text{tg}\,\theta$ (cissóide)

34. $r = 2\sec\theta - 1$ (concóide de Nicomedes)

35. $r = |\text{sen}\,2\theta|$

36. $r = 2|\cos\theta|$

Nos Exercícios de 37 a 52, ache os pontos de intersecção dos gráficos do par de equações dadas. Faça um esboço de cada par de gráficos com o mesmo eixo polar e a mesma origem.

37. $\begin{cases} 2r = 3 \\ r = 3\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

38. $\begin{cases} 2r = 3 \\ r = 1 + \cos\theta \end{cases}$

39. $\begin{cases} r = 2\cos\theta \\ r = 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

40. $\begin{cases} r = 2\cos 2\theta \\ r = 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

41. $\begin{cases} r = 4\theta \\ r = \frac{1}{2}\pi \end{cases}$

42. $\begin{cases} r\,\text{sen}\,\theta = 4 \\ r\cos\theta = 4 \end{cases}$

43. $\begin{cases} r = \text{tg}\,\theta \\ r = 4\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

44. $\begin{cases} r = 2\cos\theta \\ r = 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

45. $\begin{cases} r = 3 \\ r = 2(1 + \cos\theta) \end{cases}$

46. $\begin{cases} r = \text{sen}\,\theta \\ r = \text{sen}\,2\theta \end{cases}$

47. $\begin{cases} r^2\,\text{sen}\,2\theta = 8 \\ r\cos\theta = 2 \end{cases}$

48. $\begin{cases} r = 4(1 + \text{sen}\,\theta) \\ r(1 - \text{sen}\,\theta) = 3 \end{cases}$

49. $\begin{cases} r = \cos\theta - 1 \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$

50. $\begin{cases} r = 1 - \text{sen}\,\theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$

51. $\begin{cases} r = \text{sen}\,2\theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases}$

52. $\begin{cases} r = 4\,\text{tg}\,\theta\,\text{sen}\,\theta \\ r = 4\cos\theta \end{cases}$

53. Prove o Teorema 10.6.2.

54. Prove o Teorema 10.6.3.

Nos Exercícios 55 e 56, o gráfico da equação dada intercepta a si mesmo. Ache os pontos nos quais isso ocorre.

55. $r = \text{sen}\,\frac{3}{2}\theta$

56. $r = 1 + 2\cos 2\theta$

10.7 ÁREA DE UMA REGIÃO EM COORDENADAS POLARES

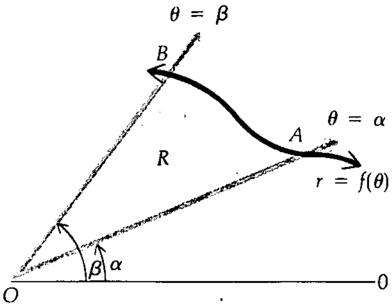


FIGURA 1

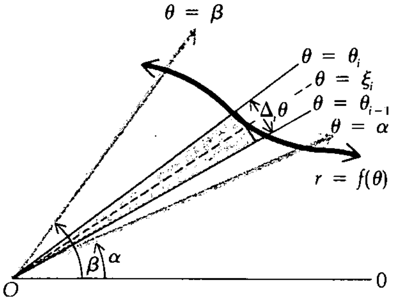


FIGURA 2

Vamos desenvolver agora um método para encontrar a área de uma região limitada por duas retas que passam pela origem e por uma curva cuja equação seja dada em coordenadas polares.

Seja f uma função contínua e não-negativa no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$. Seja R a região limitada pela curva cuja equação é $r = f(\theta)$ e pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$. Então, R é a região AOB da Figura 1.

Consideremos uma partição Δ de $[\alpha, \beta]$ definida por

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{i-1} < \theta_i < \ldots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

Temos, portanto, n subintervalos da forma $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, onde $i = 1, 2 \ldots, n$. Seja ξ_i um valor de θ no i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. Veja a Figura 2, onde o i-ésimo subintervalo é mostrado junto com $\theta = \xi_i$. A medida em radianos do ângulo entre as retas $\theta = \theta_{i-1}$ e $\theta = \theta_i$ será denotada por $\Delta_i\theta$. O número de unidades de área na área do setor circular de raio $f(\xi_i)$ unidades e ângulo central com $\Delta_i\theta$ rad é dado por

$$\tfrac{1}{2}[f(\xi_i)]^2\,\Delta_i\theta$$

Há um desses setores circulares para cada um dos n subintervalos. A soma das medidas das áreas desses n setores circulares é

$$\tfrac{1}{2}[f(\xi_1)]^2\,\Delta_1\theta + \tfrac{1}{2}[f(\xi_2)]^2\,\Delta_2\theta + \ldots + \tfrac{1}{2}[f(\xi_i)]^2\,\Delta_i\theta + \ldots + \tfrac{1}{2}[f(\xi_n)]^2\,\Delta_n\theta$$

que, usando somatória, pode ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\xi_2)]^2\,\Delta_2\theta \qquad (1)$$

Seja $\|\Delta\|$ a norma da partição Δ; isto é, $\|\Delta\|$ é a medida do maior $\Delta_i\theta$. Então, se A unidades de área for a área da região R, definimos A como o limite da soma de Riemann (1) quando $\|\Delta\|$ tende a zero, que é uma integral definida.

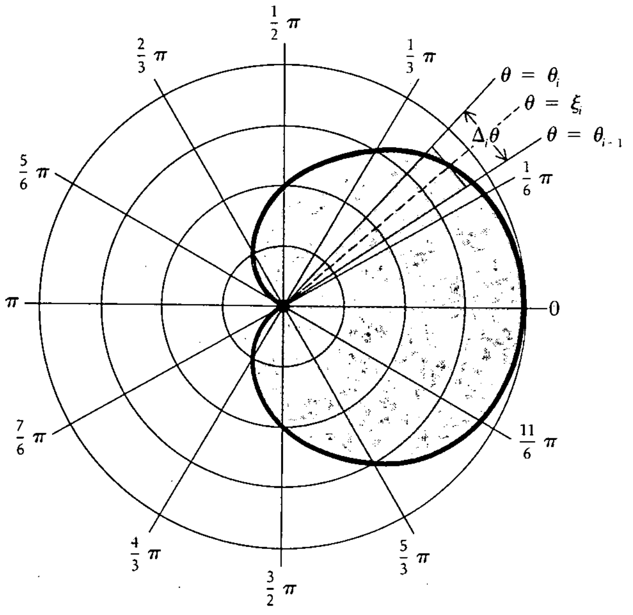
10.7.1 DEFINIÇÃO Seja R a região limitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e a curva cuja equação é $r = f(\theta)$, onde f é contínua e não-negativa no intervalo fechado $[\alpha\ \beta]$. Então, se A unidades de área for a área da região R,

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\xi_i)]^2\, \Delta_i\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2\, d\theta$$

EXEMPLO 1 Ache a área da região limitada pelo gráfico de $r = 2 + 2\cos\theta$

Solução A região, bem como um elemento de área, estão na Figura 3. Como a curva é simétrica em relação ao eixo polar, tomamos os limites de θ de 0 até π, o que determina a área da região limitada pela curva acima do eixo polar. Então, para determinar a área de toda a região, basta multiplicá-la por 2. Assim, se A unidades de área for a área pedida,



$\frac{1}{2}\pi$
$\frac{2}{3}\pi$
$\frac{1}{3}\pi$
$\theta = \theta_i$
$\theta = \xi_i$
$\Delta_i\theta$
$\theta = \theta_{i-1}$
$\frac{5}{6}\pi$
$\frac{1}{6}\pi$
π
0
$\frac{7}{6}\pi$
$\frac{11}{6}\pi$
$\frac{4}{3}\pi$
$\frac{5}{3}\pi$
$\frac{3}{2}\pi$

FIGURA 3

$$
\begin{aligned}
A &= 2 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}(2 + 2\cos \xi_i)^2 \, \Delta_i\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}(2 + 2\cos\theta)^2 \, d\theta \\
&= 4 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta \\
&= 4\Big[\theta + 2\,\text{sen}\,\theta + \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta\Big]_0^{\pi} \\
&= 4(\pi + 0 + \tfrac{1}{2}\pi + 0 - 0) \\
&= 6\pi
\end{aligned}
$$

Logo, a área é 6π unidades de área.

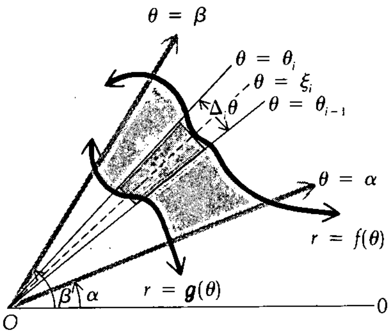


FIGURA 4

Consideremos agora a região limitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e pelas curvas cujas equações são $r = f(\theta)$ e $r = g(\theta)$, onde f e g são contínuas no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$ e $f(\theta) \geqslant g(\theta)$ em $[\alpha, \beta]$. Veja a Figura 4. Queremos encontrar a área dessa região. Consideremos uma partição do intervalo $[\alpha, \beta]$, sendo ξ_i um valor de θ no i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. A medida da área de um elemento de área é a diferença das medidas das áreas de dois setores circulares:

$$\tfrac{1}{2}[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i\theta - \tfrac{1}{2}[g(\xi_i)]^2 \, \Delta_i\theta = \tfrac{1}{2}([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \, \Delta_i\theta$$

A soma das medidas das áreas de n de tais elementos é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \, \Delta_i\theta$$

Assim, se A unidades de área for a área da região desejada, teremos

$$\boxed{A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \, \Delta_i\theta}$$

Como f e g são contínuas em $[\alpha, \beta]$, também $f - g$ será contínua; logo, existirá o limite e será igual a uma integral definida. Assim,

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2) \, d\theta}$$

EXEMPLO 2 Ache a área da região interior à circunferência $r = 3\,\text{sen}\,\theta$ e exterior à *limaçon* $r = 2 - \text{sen}\,\theta$.

Solução Para encontrar os pontos de intersecção tomamos

$$3\,\text{sen}\,\theta = 2 - \text{sen}\,\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \tfrac{1}{2}$$

$$\theta = \tfrac{1}{6}\pi \qquad \theta = \tfrac{5}{6}\pi$$

As curvas e a região são mostradas na Figura 5, bem como um elemento de área.

Seja $f(\theta) = 3\,\text{sen}\,\theta$ e $g(\theta) = 2 - \text{sen}\,\theta$, então, a equação da circunferência será $r = f(\theta)$, enquanto que a da *limaçon* será $r = g(\theta)$.

Em vez de tomar os extremos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$, usaremos as propriedades de simetria em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e tomaremos os extremos de $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{2}$; então multiplicaremos o resultado por 2.

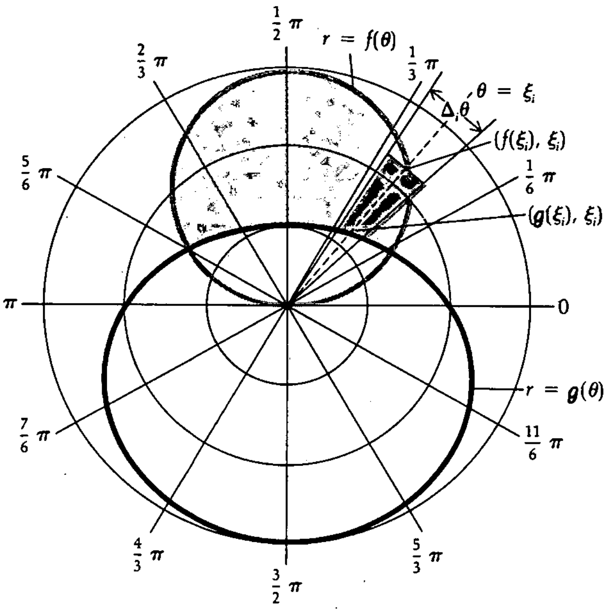

$\frac{1}{2}\pi$
$r = f(\theta)$
$\frac{1}{3}\pi$
$\theta = \xi_i$
$\Delta_i\theta$
$(f(\xi_i), \xi_i)$
$\frac{1}{6}\pi$
$(g(\xi_i), \xi_i)$
$\frac{2}{3}\pi$
$\frac{5}{6}\pi$
π
0
$r = g(\theta)$
$\frac{7}{6}\pi$
$\frac{11}{6}\pi$
$\frac{4}{3}\pi$
$\frac{5}{3}\pi$
$\frac{3}{2}\pi$

FIGURA 5

Logo, se A unidades de área for a área da região dada,

$$\begin{aligned}
A &= 2 \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i\theta \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2)\, d\theta \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/2} [9 \operatorname{sen}^2 \theta - (2 - \operatorname{sen}\theta)^2]\, d\theta \\
&= 8 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta + 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta - 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \\
&= 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta + \Big[-4\cos\theta - 4\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= 4\theta - 2\operatorname{sen} 2\theta - 4\cos\theta - 4\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= -2\operatorname{sen} 2\theta - 4\cos\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= (-2\operatorname{sen}\pi - 4\cos\tfrac{1}{2}\pi) - (-2\operatorname{sen}\tfrac{1}{3}\pi - 4\cos\tfrac{1}{6}\pi) \\
&= 2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + 4 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\
&= 3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Logo, a área é $3\sqrt{3}$ unidades de área.

EXERCÍCIOS 10.7

Nos Exercícios de 1 a 6, ache a área da região limitada pelo gráfico da equação dada.

1. $r = 3\cos\theta$

2. $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$

3. $r = 4\cos 3\theta$

4. $r = 4\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta$

5. $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$

6. $r = 4\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$

7. Ache a área da região limitada pelo gráfico da equação $r = \theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{3}{2}\pi$.

8. Ache a área da região limitada pelo gráfico de $r = e^{\theta}$ e pelas retas $\theta = 0$ e $\theta = 1$.

Nos Exercícios de 9 a 12, ache a área da região limitada por um laço do gráfico da equação dada.

9. $r = 3 \cos 2\theta$ **10.** $r = a(1 - 2 \cos \theta)$

11. $r = 1 + 3 \operatorname{sen} \theta$ **12.** $r = a \operatorname{sen} 3\theta$

Nos Exercícios de 13 a 16, ache a área de intersecção das regiões limitadas pelos gráficos das duas equações dadas.

13. $\begin{cases} r = 2 \\ r = 3 - 2 \cos \theta \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} r = 4 \operatorname{sen} \theta \\ r = 4 \cos \theta \end{cases}$

15. $\begin{cases} r = 3 \operatorname{sen} 2\theta \\ r = 3 \cos 2\theta \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} r^2 = 2 \cos 2\theta \\ r = 1 \end{cases}$

Nos Exercícios de 15 a 21, ache a área da região que está no interior da região limitada pelo gráfico da primeira equação e no exterior da região limitada pelo gráfico da segunda equação.

17. $\begin{cases} r = a \\ r = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta \\ r = \sqrt{2} \end{cases}$

19. $\begin{cases} r = 2 \operatorname{sen} \theta \\ r = \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \end{cases}$

20. $\begin{cases} r = 2a \operatorname{sen} \theta \\ r = a \end{cases}$

21. $\begin{cases} r = a(1 + \cos \theta) \\ r = 2a \cos \theta \end{cases}$

22. Determine o valor de a para o qual a região limitada pela cardióide $r = a(1 - \cos \theta)$ tem uma área de 9π unidades de área.

23. Numa armação de óculos o tamanho das lentes é dado pela região limitada pelo gráfico da equação $r^2 = 4 \cos 2\theta$. Quanto material é necessário para cobrir a região?

24. Ache a área da região varrida pelo raio vetor da espiral $r = a\theta$ durante sua segunda revolução, que não foi varrida em sua primeira revolução.

25. Ache a área da região varrida pelo raio vetor da curva do Exercício 24 durante sua terceira revolução, que não foi varrida durante sua segunda revolução.

10.8 UM TRATAMENTO UNIFICADO DE SECÇÕES CÔNICAS E EQUAÇÕES POLARES DAS CÔNICAS

Nas Secções 10.1 até 10.3 definimos cada um dos três tipos de secções cônicas separadamente. Uma abordagem alternativa é começar com uma definição que dê as propriedades comuns das cônicas e então introduzir cada cônica como um caso particular da definição geral. Vamos estabelecer essa definição no teorema a seguir. A constante positiva e no enunciado do teorema é chamada **excentricidade** da cônica.

10.8.1 TEOREMA

Uma secção cônica pode ser definida como o conjunto dos pontos P no plano, tal que a razão entre a distância não orientada de P a um ponto fixo e a distância não orientada de P a uma reta fixa que não contenha o ponto fixo seja uma constante positiva e. Além disso, se $e = 1$, a cônica será uma parábola; se $0 < e < 1$, ela será uma elipse e se $e > 1$, ela será uma hipérbole.

Prova Se $e = 1$, vemos, comparando a Definição 10.1.1 e o enunciado do teorema, que o conjunto é uma parábola tendo como ponto fixo seu foco e como reta fixa sua diretriz.

Suponha agora que $e \neq 1$. Primeiro vamos obter uma equação polar do conjunto de pontos descrito. Seja F o ponto fixo e l a reta fixa. Vamos tomar F como a origem e o eixo polar, bem como sua extensão, perpendicular a l. Vamos considerar primeiro a situação em que a reta l está à esquerda do ponto F. Seja D o ponto de intersecção de l com a extensão do eixo polar e d a distância não orientada de F a l. Consulte a Figura 1. Seja $P(r, \theta)$ qualquer ponto do conjunto à direita de l e sobre o lado terminal do ângulo de medida θ. Trace, perpendicularmente ao eixo polar e à reta l, PQ e PR respectivamente. O ponto P estará no conjunto descrito se e somente se

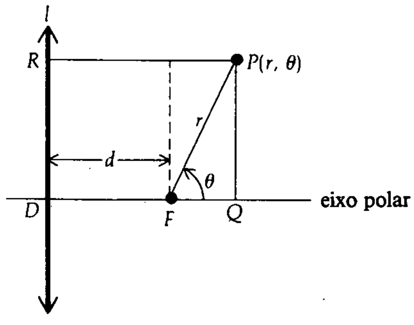


FIGURA 1

$$|\overline{FP}| = e|\overline{RP}| \tag{1}$$

Como P está à direita de l, $\overline{RP} > 0$; assim $|\overline{RP}| = \overline{RP}$. Além disso, $|\overline{FP}| = r$ pois $r > 0$. Assim de (1),

$$r = e(\overline{RP}) \tag{2}$$

Entretanto, $\overline{RP} = \overline{DQ}$ e como $\overline{DQ} = \overline{DF} + \overline{FQ}$, temos

$$\overline{RP} = d + r\cos\theta$$

Substituindo essa expressão de $\overline{RP}$ em (2), obtemos

$$r = e(d + r\cos\theta)$$

Resolvendo para r, temos

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} \tag{3}$$

Uma representação cartesiana de (3) pode ser obtida substituindo $\cos\theta$ por x/r. Temos

$$r = \frac{ed}{1 - \dfrac{ex}{r}}$$

$$r = \frac{edr}{r - ex}$$

$$r - ex = ed$$

$$r = e(x + d)$$

Agora substituímos r por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ obtendo

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = e(x + d)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade acima, temos

$$x^2 + y^2 = e^2x^2 + 2e^2dx + e^2d^2$$

$$y^2 + x^2(1 - e^2) = 2e^2dx + e^2d^2$$

Como $e \neq 1$, podemos dividir ambos os membros dessa equação por $1 - e^2$ e obter

$$x^2 - \frac{2e^2d}{1 - e^2}x + \frac{1}{1 - e^2}y^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

Completando os quadrados para os termos envolvendo x e y e somando $e^4d^2/(1 - e^2)^2$ a ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$\left(x - \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{1}{1 - e^2}y^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \tag{4}$$

Se a origem for transladada para o ponto $(e^2d/(1 - e^2), 0)$, a equação torna-se

$$\bar{x}^2 + \frac{1}{1 - e^2}\bar{y}^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$$

$$\frac{\bar{x}^2}{\dfrac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{\bar{y}^2}{\dfrac{e^2d^2}{1 - e^2}} = 1 \tag{5}$$

Agora seja,

$$\frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} = a^2 \qquad \text{onde } a > 0 \tag{6}$$

Então (5) pode ser escrita como

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

Substituindo $\bar{x}$ e $\bar{y}$ por x e y, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1 \tag{7}$$

Se $0 < e < 1$, então $a^2(1 - e^2) > 0$ e podemos fazer

$$b^2 = a^2(1-e^2) \qquad \text{onde } 0 < e < 1 \tag{8}$$

Substituindo (8) em (7), obtemos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Essa equação é uma forma padrão da equação cartesiana de uma elipse, tendo o eixo principal sobre o eixo x e centro na origem.

Se $e > 1$, então $a^2(e^2 - 1) > 0$ e podemos obter

$$b^2 = a^2(e^2-1) \qquad \text{onde } e > 1 \tag{9}$$

Substituindo essa equação em (7), obtemos

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

que é a forma padrão da equação cartesiana de uma hipérbole tendo o eixo principal sobre o eixo x e centro na origem.

De forma análoga, podemos deduzir a equação de uma cônica central (elipse ou hipérbole) de (1) quando $e \neq 1$ se a reta l estiver à direita do ponto F na origem. Neste caso, em vez da equação (3) temos

$$r=\frac{ed}{1+e\cos\theta} \tag{10}$$

A dedução de (10) será deixada como exercício (veja o Exercício 33).

Podemos também deduzir a equação de uma cônica central a partir de (1), quando $e \neq 1$, se a reta l for paralela ao eixo polar e o ponto F estiver na origem. Neste caso, em vez da equação (3) obtemos

$$r=\frac{ed}{1\pm e\,\text{sen}\,\theta} \tag{11}$$

onde e e d são, respectivamente, a excentricidade e a distância não orientada entre F e l. O sinal positivo é escolhido quando l estiver acima de F, e o sinal negativo será colocado quando ela estiver abaixo de F. As deduções de (11) serão deixadas como exercício (veja os Exercícios 34 e 35).

Podemos inverter o caminho que fizemos de (1) a (7). Assim, se P for qualquer ponto de uma cônica central, a equação (1) estará satisfeita.

Logo, podemos concluir que uma cônica pode ser definida pelo conjunto de pontos descrito. ■

Na demonstração acima mostramos que se a cônica for uma parábola, o ponto fixo F mencionado no teorema será o foco, enquanto que a reta fixa será a diretriz. Vamos mostrar que o ponto F será um dos focos quando tivermos uma cônica central. Como (4) é a equação de uma cônica central para a qual o ponto fixo F está na origem (pólo) e (7) é obtida de (4) transladando a origem para o ponto $(e^2d/(1 - e^2), 0)$, segue que para a cônica de equação (7), o ponto F está em $(-e^2d/(1 - e^2), 0)$. Queremos mostrar que esse ponto é um foco da cônica. De (6),

$$a = \begin{cases} \dfrac{ed}{1 - e^2} & \text{se } 0 < e < 1 \\ \dfrac{ed}{e^2 - 1} & \text{se } e > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-e^2d}{1 - e^2} = \begin{cases} -ae & \text{se } 0 < e < 1 \\ ae & \text{se } e > 1 \end{cases} \tag{12}$$

Se (7) for a equação de uma elipse $(0 < e < 1)$, sabemos que os focos estão em $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, onde

$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad c > 0$$

Substituindo (8) nessa equação, obtemos

$$c^2 = a^2 - a^2(1 - e^2)$$
$$c^2 = a^2e^2$$
$$c = ae \tag{13}$$

Comparando (13) e (12) concluímos que se (7) for a equação de uma elipse, o ponto F será o foco esquerdo.

Se (7) for a equação de uma hipérbole $(e > 1)$, de novo os focos estarão em $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, mas para a hipérbole,

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad c > 0$$

Substituindo (9) nessa equação, obtemos

$$c^2 = a^2 + a^2(e^2 - 1)$$
$$c^2 = a^2e^2$$
$$c = ae \tag{14}$$

Comparando (14) e (12), segue que se (7) for a equação de uma hipérbole, o ponto F será o foco direito.

A reta fixa l mencionada no Teorema 10.8.1 é chamada de **diretriz** correspondente ao foco em F. Quando o gráfico de (7) for uma elipse, a diretriz correspondente ao foco em $(-c, 0)$ ou, equivalentemente, $(-ae, 0)$ terá equação

$$x = -ae - d$$

Como quando $0 < e < 1$, $d = a(1 - e^2)/e$, essa equação torna-se

$$x = -ae - \frac{a(1 - e^2)}{e}$$

$$x = -\frac{a}{e}$$

Analogamente, se o gráfico de (7) for uma hipérbole, a diretriz correspondente ao foco em $(c, 0)$ ou, equivalentemente, $(ae, 0)$ terá a equação

$$x = ae - d$$

Quando $e > 1$, $d = a(e^2 - 1)/e$; assim a equação da diretriz acima pode ser escrita como

$$x = \frac{a}{e}$$

Logo, mostramos que se (7) for a equação de uma elipse, $(-ae, 0)$ e $x = -a/e$ serão um foco e sua diretriz correspondente. Se (7) for a equação de uma hipérbole, $(ae, 0)$ e $x = a/e$ serão um foco e sua diretriz correspondente.

Como (7) contém somente potências pares de x e y, seu gráfico será simétrico em relação a ambos os eixos x e y. Logo, se houver um foco em $(-ae, 0)$ sendo $x = -a/e$ a diretriz correspondente, por simetria haverá um foco em $(ae, 0)$ sendo $x = a/e$ a diretriz correspondente. Analogamente, para um foco em $(ae,0)$ sendo $x = a/e$ a diretriz correspondente, existirá um foco em $(-ae, 0)$ e a diretriz correspondente será $x = -a/c$. Esses resultados estão resumidos no teorema a seguir.

10.8.2 TEOREMA A cônica central com equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \tag{15}$$

onde $a > 0$, possui um foco em $(-ae, 0)$ cuja diretriz correspondente é $x = -a/e$ e um foco em $(ae, 0)$ cuja diretriz correspondente é $x = a/e$.

As Figuras 2 e 3 mostram esboços do gráfico de (15) com os focos e diretrizes nos casos respectivos de elipse e de hipérbole.

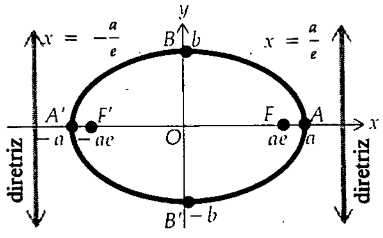


FIGURA 2

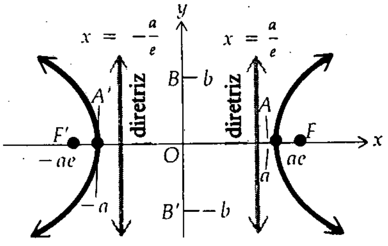


FIGURA 3

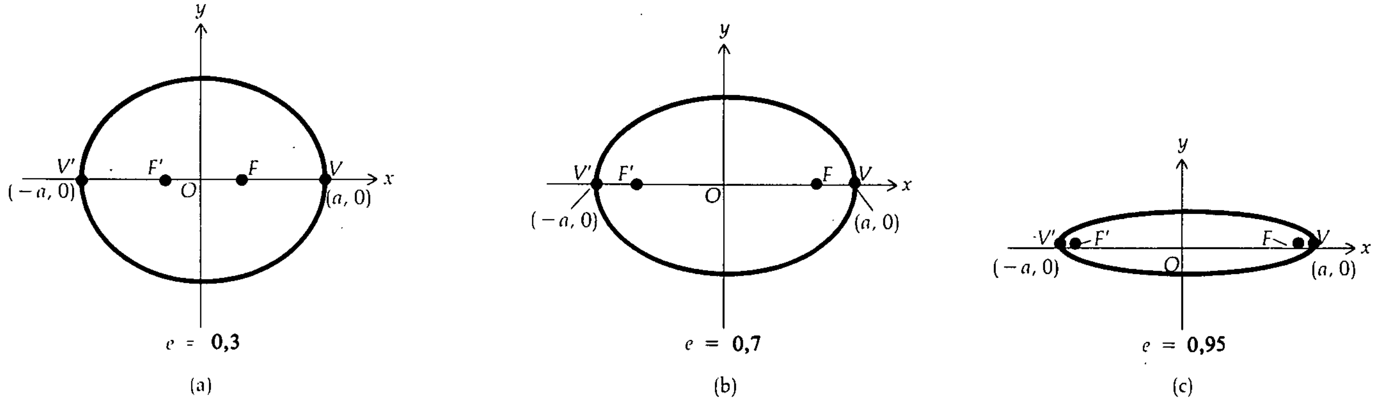
Das equações (13) e (14)

$$e = \frac{c}{a} \tag{16}$$

Como também $e = 2c/2a$, a excentricidade tanto da elipse como da hipérbole é a razão entre a distância não orientada entre os focos e a distância não orientada entre os vértices. Assim, a excentricidade dá uma indicação da forma da cônica central.

Para uma elipse, a excentricidade assume os valores entre 0 e 1. Quando os focos estão próximos, e tende a zero e a forma da elipse está próxima da circunferência. Veja a Figura 4(a) mostrando uma elipse para a qual $e = 0,3$. Se a permanecer fixo, então à medida que e cresce, o "achatamento" da elipse cresce. As Figuras 4(b) e (c) mostram elipses com excentricidades de 0,7 e 0,95, respectivamente, todas com o mesmo valor de a, como na Figura 4(a). As formas limites da elipse são uma circunferência de diâmetro $2a$ e um segmento de reta com $2a$ de comprimento.

Para uma hipérbole, a excentricidade é maior do que 1. A excentricidade de uma hipérbole equilátera é $\sqrt{2}$, que é obtida de (9), tomando $a = b$. Veja a Figura 5(b). Se e tende a 1 com a fixo, então c tende a a e b tende a zero, e a forma da hipérbole vai se "estreitando" em torno de seu eixo principal. A Figura 5(a) é uma hipérbole com $e = 1{,}05$ e com a de mesmo valor que na Figura 5(b). Se e cresce com a fixo, então c e b crescem, e a hipérbole vai "se alargando" em torno de seu eixo principal. Veja a Figura 5(c) para uma hipérbole com $e = 2$ e a com o mesmo valor que nas Figuras 5(a) e (b).



$e = 0{,}3$

(a)

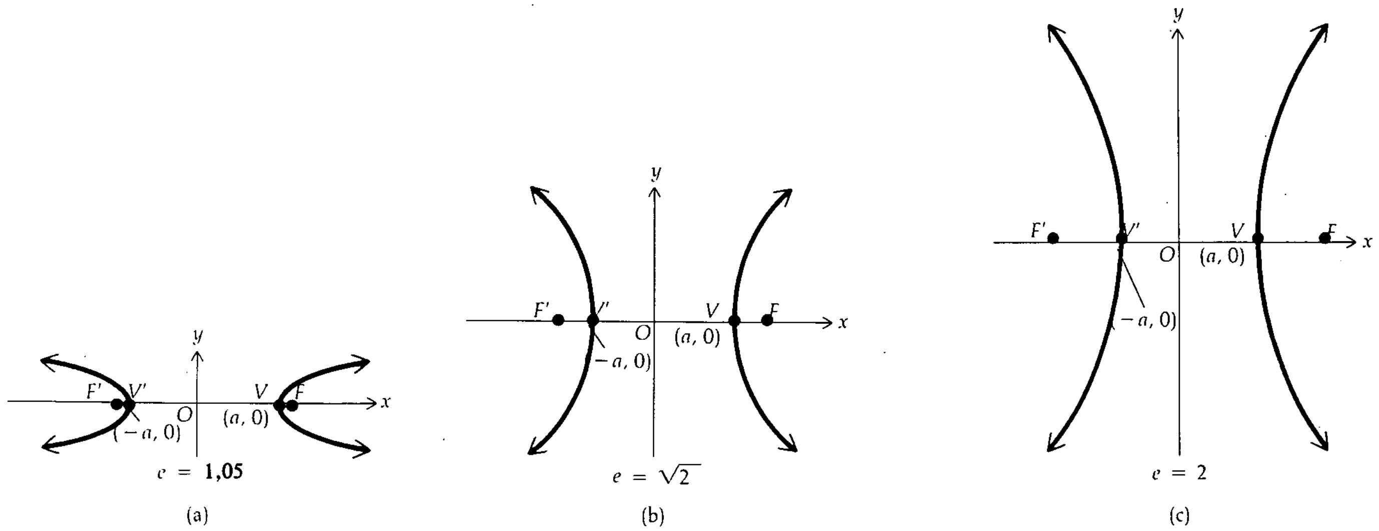
$e = 0{,}7$

(b)

$e = 0{,}95$

(c)

FIGURA 4



$e = 1{,}05$

(a)

$e = \sqrt{2}$

(b)

$e = 2$

(c)

FIGURA 5

EXEMPLO 1 A elipse do Exemplo 1 da Secção 10.2 tem equação

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

(a) Ache a excentricidade e as diretrizes dessa elipse. (b) Faça um esboço mostrando a elipse, as diretrizes e os focos. Escolha três pontos P quaisquer na elipse e trace os segmentos de reta cujos comprimentos são as distâncias não orientadas de P a um foco e à diretriz correspondente. Observe que a razão dessas distâncias é e.

Solução

(a) Da equação da elipse, $a = 5$ e $b = 4$. Foi mostrado no Exemplo 1 da Secção 10.2 que $c = 3$. Logo, de (16), $e = \frac{3}{5}$. Como $a/e = \frac{25}{3}$, segue do Teorema 10.8.2 que a diretriz correspondente ao foco em (3,0) tem equação $x = \frac{25}{3}$, e a diretriz correspondente ao foco em $(-3, 0)$ tem equação $x = -\frac{25}{3}$

(b) A Figura 6 mostra a elipse, as diretrizes e os focos, bem como três pontos P_1, P_2 e P_3 da elipse. Para cada um desses pontos,

$$\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|} = \frac{3}{5}$$

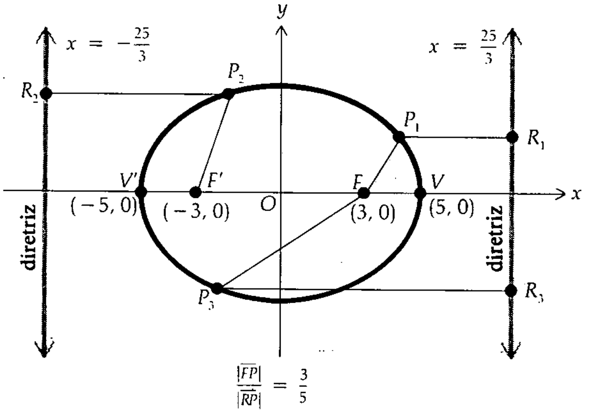

y
$x = -\frac{25}{3}$
$x = \frac{25}{3}$
P_2
R_2
P_1
R_1
V'
F'
F
V
$(-5, 0)$
$(-3, 0)$
O
$(3, 0)$
$(5, 0)$
x
diretriz
diretriz
P_3
R_3
$\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|} = \frac{3}{5}$

FIGURA 6

EXEMPLO 2 A hipérbole do Exemplo 1 da Secção 10.3 tem equação

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

(a) Ache a excentricidade e as diretrizes dessa hipérbole. (b) Faça um esboço mostrando a hipérbole, as diretrizes e os focos. Escolha também três pontos quaisquer P sobre a hipérbole e trace segmentos de reta cujos comprimentos são as distâncias não orientadas de P ao foco e à sua diretriz correspondente. Observe que a razão entre essas distâncias é e.

Solução

(a) Da equação da hipérbole, $a = 3$ e $b = 4$. No Exemplo 1 da Secção 10.3 mostramos que $c = 5$. De (16), $e = \frac{5}{3}$. Como $a/e = \frac{9}{5}$, concluímos do Teorema 10.8.2 que a diretriz correspondente ao foco em (5, 0) tem equação $x = \frac{9}{5}$ e a diretriz correspondente ao foco em $(-5, 0)$ tem equação $x = -\frac{9}{5}$.

(b) A Figura 7 mostra a hipérbole, as diretrizes e os focos, bem como três pontos P_1, P_2 e P_3 da hipérbole. Para cada um desses pontos,

$$\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|} = \frac{5}{3}$$

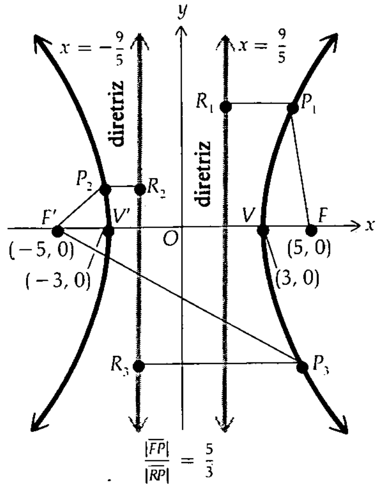

y
$x = -\frac{9}{5}$
$x = \frac{9}{5}$
diretriz
diretriz
R_1
P_1
P_2
R_2
F'
V'
O
V
F
x
$(-5, 0)$
$(-3, 0)$
$(5, 0)$
$(3, 0)$
R_3
P_3
$\frac{|\overline{FP}|}{|\overline{RP}|} = \frac{5}{3}$

FIGURA 7

Na demonstração do Teorema 10.8.1 vimos que todos os três tipos de cônicas têm equações polares com a mesma forma. Quando um foco está na origem e a diretriz correspondente é perpendicular ou paralela ao eixo polar, a equação da cônica terá a forma de (3), (10) ou (11). Temos, assim, o teorema a seguir.

10.8.3 TEOREMA Vamos supor que tenhamos uma cônica para a qual e e d sejam, respectivamente, a excentricidade e a distância não orientada entre o foco e a diretriz correspondente.

(i) Se um foco da cônica estiver na origem e a diretriz correspondente for perpendicular ao eixo polar, então a equação da cônica será

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta} \tag{17}$$

onde o sinal positivo é tomado quando a diretriz correspondente ao foco na origem está à direita do foco. Tomamos o sinal negativo quando ela estiver à esquerda do foco.

(ii) Se um foco da cônica estiver na origem e a diretriz correspondente for paralela ao eixo polar, então a equação da cônica será

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta} \tag{18}$$

onde o sinal positivo é tomado quando a diretriz correspondente ao foco na origem estiver acima do foco e o sinal negativo é tomado quando ela estiver abaixo do foco.

EXEMPLO 3 Uma parábola tem foco na origem e vértice em $(4, \pi)$. Ache a equação da parábola e uma equação da diretriz. Faça um esboço da parábola e da diretriz.

Solução Como o foco está na origem e o vértice está em $(4, \pi)$, o eixo polar e sua extensão estão ao longo do eixo da parábola. Além disso, o vértice está à esquerda do foco; assim a diretriz também está à esquerda do foco. Logo, a equação da parábola é da forma (17), com sinal negativo. Como o vértice está em $(4, \pi)$, $\frac{1}{2}d = 4$; assim $d = 8$. A excentricidade $e = 1$, e portanto obtemos a equação

$$r = \frac{8}{1 - \cos \theta}$$

A equação da diretriz é dada por $r \cos \theta = -d$, e como $d = 8$, então $r \cos \theta = -8$. A Figura 8 mostra um esboço da parábola e da diretriz.

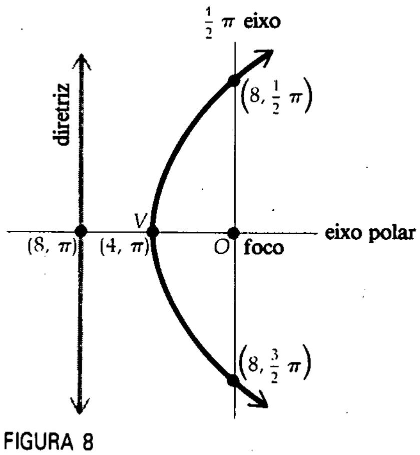


FIGURA 8

EXEMPLO 4 A equação de uma cônica é

$$r = \frac{5}{3 + 2 \operatorname{sen} \theta}$$

Ache a excentricidade, identifique a cônica, escreva a equação da diretriz correspondente ao foco na origem, ache os vértices e faça um esboço da curva.

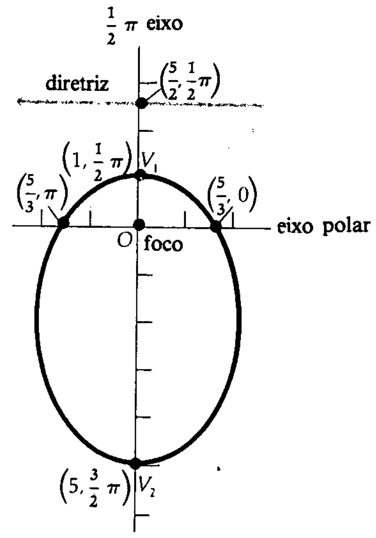

$\frac{1}{2}\pi$ eixo
diretriz
$\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\pi\right)$
$\left(1, \frac{1}{2}\pi\right)$
V_1
$\left(\frac{5}{3}, \pi\right)$
$\left(\frac{5}{3}, 0\right)$
O
foco
eixo polar
$\left(5, \frac{3}{2}\pi\right)$
V_2

FIGURA 9

Solução Dividindo por 3 o numerador e o denominador da equação dada, obtemos

$$r = \frac{\frac{5}{3}}{1 + \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta}$$

que é da forma (18) com o sinal positivo. A excentricidade $e = \frac{2}{3}$. Como $e < 1$, a cônica é uma elipse. Como $ed = \frac{5}{3}$, $d = \frac{5}{3} \div \frac{2}{3}$; assim $d = \frac{5}{2}$. O semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e sua extensão estão ao longo do eixo principal. A diretriz correspondente ao foco na origem está acima do foco e sua equação é $r \operatorname{sen}\theta = \frac{5}{2}$. Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 1$; e quando $\theta = \frac{3}{2}\pi$, $r = 5$. Os vértices estão, portanto, em $(1, \frac{\pi}{2})$ e $(5, \frac{3}{2}\pi)$. Um esboço da elipse está na Figura 9.

EXEMPLO 5 O eixo polar e sua extensão estão ao longo do eixo principal de uma hipérbole tendo um foco na origem. A diretriz correspondente está à esquerda do foco. Se a hipérbole contém o ponto $(1, \frac{2}{3}\pi)$ e $e = 2$, ache (a) a equação da hipérbole; (b) os vértices; (c) o centro; (d) a equação da diretriz correspondente ao foco na origem. (e) Faça um esboço da hipérbole.

Solução A equação da hipérbole é da forma (17) com o sinal negativo e $e = 2$. Temos, então,

$$r = \frac{2d}{1 - 2\cos\theta}$$

(a) Como o ponto $(1, \frac{2}{3}\pi)$ está na hipérbole, suas coordenadas satisfazem a equação. Logo,

$$1 = \frac{2d}{1 - 2(-\frac{1}{2})}$$

de onde obtemos $d = 1$. Logo, a equação da hipérbole é

$$r = \frac{2}{1 - 2\cos\theta} \tag{19}$$

(b) Os vértices são os pontos da hipérbole para os quais $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. De (19), quando $\theta = 0$, $r = -2$ e quando $\theta = \pi$, $r = \frac{2}{3}$. Conseqüentemente, o vértice esquerdo V_1 está no ponto $(-2, 0)$ e o vértice direito V_2 está no ponto $(\frac{2}{3}, \pi)$.

(c) O centro da hipérbole é o ponto sobre o eixo principal no ponto médio do segmento que une os vértices. Esse é o ponto $(\frac{4}{3}, \pi)$.

(d) A equação da diretriz correspondente ao foco na origem é dada por $r\cos\theta = -d$. Como $d = 1$, essa equação é $r\cos\theta = -1$.

(e) Para facilitar o esboço da hipérbole, vamos traçar as duas assíntotas. Essas retas passam pelo centro da hipérbole e são paralelas às retas $\theta = \theta_1$, e $\theta = \theta_2$, onde θ_1 e θ_2 são os valores de θ no intervalo $[0, 2\pi)$ para os quais r não está definido. De (19), r não está definido quando $1 - 2\cos\theta = 0$. Logo, $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ e $\theta_2 = \frac{5}{3}\pi$. A Figura 10 mostra um esboço da hipérbole, bem como as duas assíntotas e a diretriz correspondente ao foco na origem.

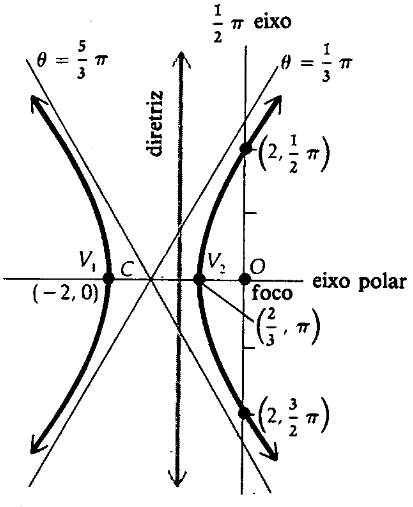

$\frac{1}{2}\pi$ eixo
$\theta = \frac{5}{3}\pi$
$\theta = \frac{1}{3}\pi$
diretriz
$\left(2, \frac{1}{2}\pi\right)$
V_1
C
V_2
O
$(-2, 0)$
foco
eixo polar
$\left(\frac{2}{3}, \pi\right)$
$\left(2, \frac{3}{2}\pi\right)$

FIGURA 10

EXERCÍCIOS 10.8

Nos Exercícios de 1 a 8, (a) ache a excentricidade, os focos e as diretrizes da cônica central dada. (b) Faça um esboço mostrando a cônica, os focos e as diretrizes. Também escolha quatro pontos P (um em cada quadrante) sobre a cônica e trace os segmentos de reta cujos comprimentos são as distâncias não orientadas de P ao foco e à diretriz correspondente. Observe que a razão entre essas distâncias é e.

1. $4x^2 + 9y^2 = 36$
2. $4x^2 + 9y^2 = 4$
3. $25x^2 + 4y^2 = 100$
4. $16x^2 + 9y^2 = 144$
5. $4x^2 - 25y^2 = 100$
6. $x^2 - 9y^2 = 9$
7. $16x^2 - 9y^2 = 144$
8. $4y^2 - x^2 = 16$

Nos Exercícios 9 e 10, cada equação polar representa uma cônica tendo um foco na origem. Identifique a cônica.

9. (a) $r = \dfrac{3}{1 - \cos\theta}$; (b) $r = \dfrac{6}{4 + 5\,\text{sen}\,\theta}$; (c) $r = \dfrac{5}{4 - \cos\theta}$;
(d) $r = \dfrac{4}{1 + \text{sen}\,\pi}$

10. (a) $r = \dfrac{1}{1 - \text{sen}\,\theta}$; (b) $r = \dfrac{2}{3 + \text{sen}\,\theta}$; (c) $r = \dfrac{3}{2 + 4\cos\theta}$;
(d) $r = \dfrac{5}{1 - \cos\pi}$

Nos Exercícios de 11 a 22, a equação é de uma cônica tendo um foco na origem. Em cada exercício, (a) ache a excentricidade, (b) identifique a cônica, (c) escreva a equação da diretriz que corresponde ao foco na origem, (d) faça o esboço da curva.

11. $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$
12. $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$
13. $r = \dfrac{5}{2 + \text{sen}\,\theta}$
14. $r = \dfrac{4}{1 - 3\cos\theta}$
15. $r = \dfrac{6}{3 - 2\cos\theta}$
16. $r = \dfrac{1}{2 + \text{sen}\,\theta}$
17. $r = \dfrac{9}{5 - 6\,\text{sen}\,\theta}$
18. $r = \dfrac{1}{1 - 2\,\text{sen}\,\theta}$
19. $r = \dfrac{10}{7 - 2\,\text{sen}\,\theta}$
20. $r = \dfrac{7}{3 + 4\cos\theta}$
21. $r = \dfrac{10}{4 + 5\cos\theta}$
22. $r = \dfrac{1}{5 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

Nos Exercícios de 23 a 28, ache a equação polar da cônica que tem um foco na origem e que satisfaz as condições dadas.

23. Parábola; vértice em $(4, \frac{3}{2}\pi)$.
24. Elipse; $e = \frac{1}{2}$, vértice em $(4, \pi)$.
25. Hipérbole; $e = \frac{4}{3}$, $r\cos\theta = 9$ é a diretriz correspondente ao foco na origem.
26. Hipérbole; vértices em $(1, \frac{1}{2}\pi)$ e $(3, \frac{1}{2}\pi)$.
27. Elipse; vértices em $(3, 0)$ e $(1, \pi)$.
28. Parábola; vértice em $(6, \frac{1}{2}\pi)$.

29. (a) Ache a equação polar da hipérbole que tem um foco na origem, a diretriz correspondente à esquerda do foco, se o ponto $(2, \frac{4}{3}\pi)$ está na hipérbole e $e = 3$. (b) Escreva a equação da diretriz que corresponde ao foco na origem.

30. (a) Ache a equação polar da hipérbole para a qual $e = 3$ e que tem a reta $r\,\text{sen}\,\theta = 3$ como a diretriz correspondente ao foco na origem. (b) Ache as equações polares de duas retas que passam pela origem e são paralelas às assíntotas da hipérbole.

31. Ache a área da região interior à elipse $r = 6/(2 - \text{sen}\,\theta)$ acima da parábola $r = 3/(1 + \text{sen}\,\theta)$.

32. Para a elipse e a parábola do Exercício 31, ache a área da região dentro da elipse e abaixo da parábola.

33. Mostre que a equação de uma cônica que tem eixo principal ao longo do eixo polar e de sua extensão, um foco na origem e cuja diretriz correspondente está à direita do foco, é $r = ed/(1 + e\cos\theta)$.

34. Mostre que a equação de uma cônica que tem eixo principal ao longo do semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e de sua extensão, um foco na origem e cuja diretriz correspondente está acima do foco é $r = ed/(1 + e\,\text{sen}\,\theta)$.

35. Mostre que a equação da cônica que tem eixo principal ao longo do semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ e de sua extensão, um foco na origem e cuja diretriz correspondente está abaixo do foco, é $r = ed/(1 - e\,\text{sen}\,\theta)$.

36. Mostre que a equação $r = k\,\text{cosec}^2\,\frac{1}{2}\,\theta$, onde k é uma contante, é a equação polar de uma parábola.

37. Um cometa move-se numa órbita parabólica em torno do Sol, no foco da parábola. Quando o cometa está a 80 milhões de quilômetros do Sol, o segmento de reta do cometa ao Sol faz um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ rad com o eixo da órbita. (a) Ache a equação da órbita do cometa. (b) Qual a distância mínima entre o cometa e o Sol?

38. A órbita de um planeta é elíptica com equação $r = p/(1 + e\cos\theta)$ onde o Sol está na origem. Ache a distância média entre o planeta e o Sol em relação a θ.

39. Use o Teorema 10.8.1 para achar a equação polar de uma cônica central cujo centro está na origem, o eixo principal está ao longo do eixo polar e de sua extensão e a distância da origem à diretriz é a/e.

40. Mostre que as retas tangentes nos pontos de intersecção das parábolas $r = a/(1 + \cos\theta)$ e $r = b/(1 - \cos\theta)$ são perpendiculares.

10.9 RETAS TANGENTES A CURVAS EM COORDENADAS POLARES (*Suplementar*)

Primeiro derivamos uma fórmula para encontrar a inclinação de uma reta tangente a uma curva em coordenadas polares no ponto (r, θ) da curva. Seja $r = f(\theta)$ uma equação polar da curva. Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas retangulares e um sistema de coordenadas polares no mesmo plano e com o eixo polar coincidindo com o semi-eixo x positivo. Na Secção

10.5 vimos que esses dois sistemas estão ligados pelas relações

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

As variáveis x e y podem ser consideradas como funções de θ, pois $r = f(\theta)$. Se derivarmos em relação a θ ambos os membros dessas relações, obtemos, aplicando a regra da cadeia,

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta\,\frac{dr}{d\theta} - r\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{1}$$

e

$$\frac{dy}{d\theta} = \mathrm{sen}\,\theta\,\frac{dr}{d\theta} + r\cos\theta \tag{2}$$

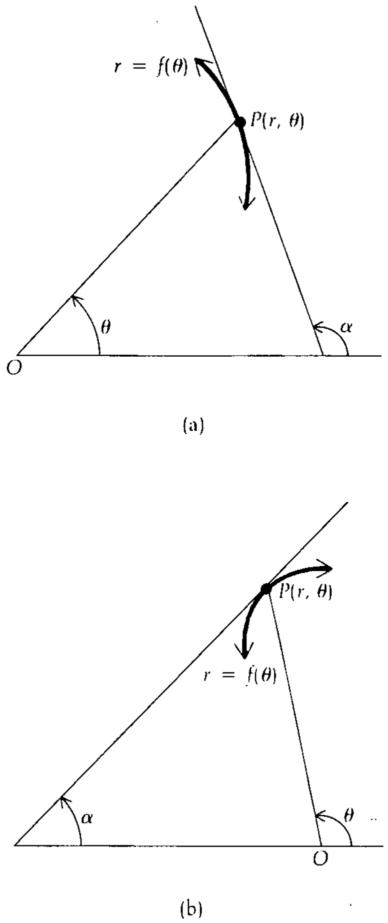


FIGURA 1

Seja α a medida em radianos da inclinação da reta tangente à curva em (r, θ). Veja a Figura 1(a) e (b) onde em (a) $\alpha \geqslant \theta$ e em (b) $\alpha < \theta$. Em ambos os casos

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{dy}{dx}$$

e se $\dfrac{dx}{d\theta} \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}$$

Substituindo (1) e (2) nessa equação, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta\,\dfrac{dr}{d\theta} + r\cos\theta}{\cos\theta\,\dfrac{dr}{d\theta} - r\,\mathrm{sen}\,\theta} \tag{3}$$

Se $\cos\theta \neq 0$, dividimos o numerador e o denominador do segundo membro de (3) por $\cos\theta$ e substituímos $\dfrac{dy}{dx}$ por $\mathrm{tg}\,\alpha$, obtendo

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\theta\,\dfrac{dr}{d\theta} + r}{\dfrac{dr}{d\theta} - r\,\mathrm{tg}\,\theta}} \tag{4}$$

Se em (3), $\cos\theta = 0$, obtemos

$$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} \tag{5}$$

que é verdadeira para os pontos sobre o semi-eixo $\frac{1}{2}\pi$ ou em sua extensão.

Observe em (4) que se $r = 0$ e $\dfrac{dr}{d\theta} \neq 0$,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\theta$$

Dessa equação concluímos que os valores de θ que satisfazem uma equação polar da curva quando $r = 0$ são as inclinações das retas tangentes à curva na origem. Assim, se $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ são esses valores de θ, então as equações das retas tangentes à curva na origem são

$$\theta = \theta_1,\ \theta = \theta_2,\ \ldots,\ \theta = \theta_k$$

Na Secção 10.6 usamos essa informação para auxiliar o traçado de esboços de curvas polares.

EXEMPLO 1 Ache a inclinação da reta tangente à curva do Exemplo 3(c) da Secção 10.6 no ponto onde (a) $\theta = 0$ e (b) $\theta = \frac{5}{6}\pi$.

Solução A equação da curva é

$$r = 2 - \operatorname{sen} \theta \tag{6}$$

Assim

$$\frac{dr}{d\theta} = -\cos \theta$$

Se α for a medida em radianos do ângulo de inclinação da reta tangente em (r, θ), então de (4),

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \alpha &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}(-\cos \theta) + (2 - \operatorname{sen} \theta)}{-\cos \theta - (2 - \operatorname{sen} \theta)\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}} \\
&= \frac{-\operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{-\cos^2 \theta - 2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} \\
&= \frac{-2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2 \cos \theta}{-1 + \operatorname{sen}^2 \theta - 2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} \\
&= \frac{2 \cos \theta (1 - \operatorname{sen} \theta)}{2 \operatorname{sen}^2 \theta - 2 \operatorname{sen} \theta - 1}
\end{aligned}$$

(a) Em $\theta = 0$, $r = 2$ e de (7),

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \alpha &= \frac{2(1)(1 - 0)}{2(0) - 2(0) - 1} \\
&= -2
\end{aligned}$$

(b) Em $\theta = \frac{5}{6}\pi$, $r = \frac{3}{2}$ e

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \alpha &= \frac{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{2(\frac{1}{4}) - 2(\frac{1}{2}) - 1} \\
&= \frac{-\sqrt{3}(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2} - 1 - 1} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

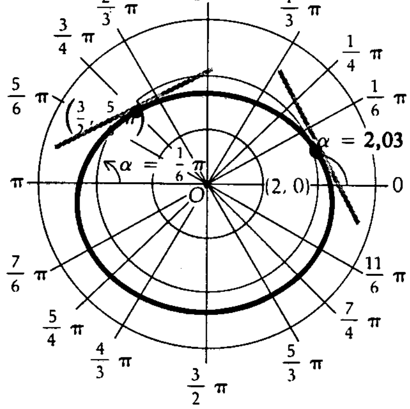


FIGURA 2

A Figura 2 mostra um esboço do gráfico de (6) e as retas tangentes em $\theta = 0$ e $\theta = \frac{5}{6}\pi$. Em $\theta = 0$, como $\operatorname{tg} \alpha = -2$, $\alpha \approx 2{,}03$; em $\theta = \frac{5}{6}\pi$, como $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\alpha = \frac{1}{6}\pi$.

A fórmula (4) pode ser usada para determinar onde uma curva polar tem retas tangentes horizontal e vertical. Essa informação é muito útil ao esboçar gráficos de equações polares. O procedimento está mostrado na ilustração e no exemplo a seguir, aplicado a duas *limaçons* do Exemplo 3 da Secção 10.6.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** A curva do Exemplo 3(c) da Secção 10.6 e do Exemplo 1 desta secção tem a equação

$$r = 2 - \operatorname{sen}\theta$$

As retas tangentes horizontais a essa curva ocorrem quando tg α = 0. Assim, igualamos o numerador de (7) a zero e resolvemos em θ.

$$2\cos\theta(1 - \operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$\cos\theta = 0 \qquad\qquad 1 - \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \theta = \tfrac{3}{2}\pi \qquad\qquad \operatorname{sen}\theta = 1$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Logo, a curva tem uma reta tangente horizontal nos pontos $(1, \frac{1}{2}\pi)$ e $(3, \frac{3}{2}\pi)$. As retas tangentes verticais ocorrerão quando o denominador de (7) for zero e o numerador for diferente de zero. Vamos resolver a equação resultante.

$$2\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\theta &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4}\\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4}\\ &= \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\operatorname{sen}\theta = 1{,}3660 \qquad \operatorname{sen}\theta = -0{,}3660$$

não tem solução $\qquad \theta \approx 3{,}51 \qquad \theta \approx 5{,}91$

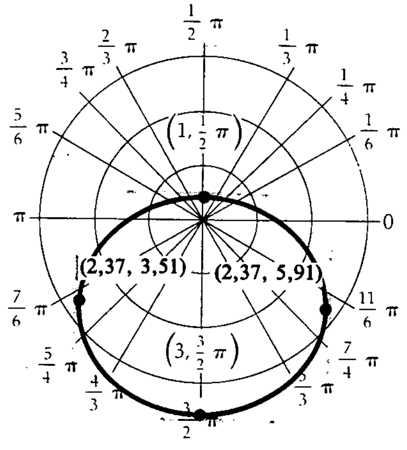


FIGURA 3

Logo, a curva tem uma reta tangente vertical nos pontos com coordenadas polares (2,37, 3,51) e (2,37, 5,91). A Figura 3 mostra um esboço do gráfico da curva e das retas tangentes horizontal e vertical. ◀

EXEMPLO 2 Determine os pontos nos quais a curva do Exemplo 3(a) da Secção 10.6 tem retas tangentes horizontal e vertical. Faça um esboço do gráfico e mostre essas retas tangentes.

Solução A curva tem a equação

$$r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$$

Logo

$$\frac{dr}{d\theta} = 2\cos\theta$$

Se α for a medida em radianos do ângulo de inclinação da reta tangente em (r, θ), temos, de (4),

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \alpha &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}(2 \cos \theta) + (3 + 2 \operatorname{sen} \theta)}{2 \cos \theta - (3 + 2 \operatorname{sen} \theta)\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 3 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{2 \cos^2 \theta - 3 \operatorname{sen} \theta - 2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\
&= \frac{4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 3 \cos \theta}{2 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta - 3 \operatorname{sen} \theta - 2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\
&= -\frac{\cos \theta (4 \operatorname{sen} \theta + 3)}{4 \operatorname{sen}^2 \theta + 3 \operatorname{sen} \theta - 2} \qquad (8)
\end{aligned}$$

Para determinar as retas tangentes horizontais igualamos o numerador de (8) a zero.

$$\cos \theta (4 \operatorname{sen} \theta + 3) = 0$$

$$\cos \theta = 0 \qquad\qquad 4 \operatorname{sen} \theta + 3 = 0$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \theta = \tfrac{3}{2}\pi \qquad\qquad \operatorname{sen} \theta = -\tfrac{3}{4}$$

$$\theta \approx 3{,}99 \qquad \theta \approx 5{,}44$$

Assim, a curva tem uma reta tangente horizontal nos pontos $(5, \frac{1}{2}\pi)$, $(1, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}, 3{,}99)$ e $(\frac{3}{2}, 5{,}44)$.

As retas tangentes verticais são encontradas igualando a zero o denominador de (8).

$$4 \operatorname{sen}^2 \theta + 3 \operatorname{sen} \theta - 2 = 0$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$$

$$\operatorname{sen} \theta = 0{,}4254 \qquad\qquad \operatorname{sen} \theta = -1{,}1754$$

$$\theta \approx 0{,}44 \qquad \theta \approx 2{,}70 \qquad \text{não tem solução}$$

Logo, a curva tem uma reta tangente vertical nos pontos com coordenadas polares $(3{,}85, 0{,}44)$ e $(3{,}85, 2{,}70)$.

Veja a Figura 4 que mostra um esboço do gráfico da curva e das retas tangentes horizontal e vertical.

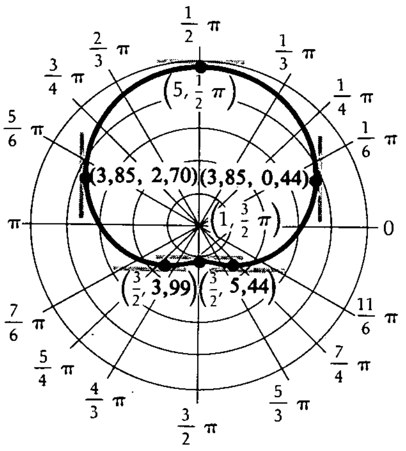


FIGURA 4

Observe, na Figura 4, que a *limaçon* tem um dente. Esse fato é evidente pois existem quatro retas tangentes horizontais. A *limaçon* da Figura 3 não tem dente; ela tem apenas duas retas tangentes horizontais.

A fórmula (4) é geralmente de aplicação complicada. Uma fórmula mais simples é obtida considerando o ângulo entre a reta OP e a reta tangente. Esse ângulo terá uma medida de χ rad, sendo medido da reta OP, no sentido anti-horário, até a reta tangente, $0 \leqslant \chi < \pi$.

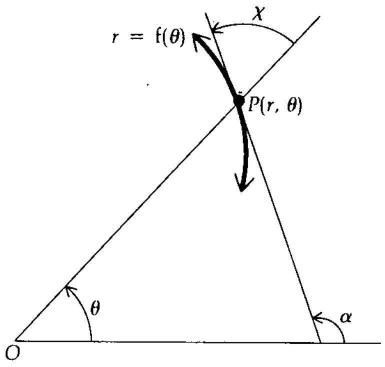


FIGURA 5

Há dois casos possíveis: $\alpha \geqslant \theta$ e $\alpha < \theta$. Esses dois casos estão ilustrados nas Figuras 5 e 6. Na Figura 5, $\alpha > \theta$ e $\chi = \alpha - \theta$. Na Figura 6, $\alpha < \theta$ e $\chi = \pi - (\theta - \alpha)$. Em cada caso

$$\operatorname{tg} \chi = \operatorname{tg} (\alpha - \theta)$$

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta}$$

Substituindo o valor de tg α de (4) nessa equação, obtemos

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\dfrac{\operatorname{tg} \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r}{\dfrac{dr}{d\theta} - r \operatorname{tg} \theta} - \operatorname{tg} \theta}{1 + \left(\dfrac{\operatorname{tg} \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r}{\dfrac{dr}{d\theta} - r \operatorname{tg} \theta} \right) \operatorname{tg} \theta}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r - \operatorname{tg} \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r \operatorname{tg}^2 \theta}{\dfrac{dr}{d\theta} - r \operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg}^2 \theta \dfrac{dr}{d\theta} + r \operatorname{tg} \theta}$$

$$= \frac{r(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \dfrac{dr}{d\theta}}$$

$$= \frac{r}{\dfrac{dr}{d\theta}}$$

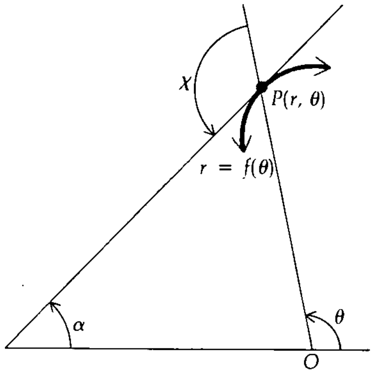


FIGURA 6

Provamos o teorema a seguir.

10.9.1 TEOREMA Seja χ a medida em radianos do ângulo entre a reta OP e a reta tangente ao gráfico de $r = f(\theta)$ no ponto $P(r, \theta)$, onde P não está no semi-eixo $\frac{1}{2}\pi$ ou em sua extensão. O ângulo χ é medido de OP no sentido anti-horário até a reta tangente, e $0 \leqslant \chi < \pi$. Então,

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{r}{\dfrac{dr}{d\theta}} \tag{9}$$

Comparando a equação no Teorema 10.9.1, com (4) você pode ver por que é mais desejável considerar χ em vez de α, quando trabalhamos com coordenadas polares. O Teorema 10.9.1 não pode ser usado se P estiver no semi-eixo $\frac{1}{2}\pi$ ou em sua extensão. Nesse caso, usamos (5) para calcular tg α.

EXEMPLO 3 Dada a cardióide com equação

$$r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$$

Ache χ e α nos pontos onde (a) $\theta = \frac{1}{6}\pi$, (b) $\theta = \frac{1}{3}\pi$ e (c) $\theta = \frac{2}{3}\pi$. (d) Faça um esboço da cardióide e mostre χ e α em cada um desses pontos.

Solução Da equação dada

$$\frac{dr}{d\theta} = 2 \cos \theta$$

Do Teorema 10.9.1,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \chi &= \frac{2 + 2 \operatorname{sen} \theta}{2 \cos \theta} \\ &= \frac{1 + \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \end{aligned} \tag{9}$$

(a) Quando $\theta = \frac{1}{6}\pi$, de (9) obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \chi &= \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Assim, $\chi = \frac{1}{3}\pi$. Como $\alpha > \theta$, $\chi = \alpha - \theta$. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{1}{3}\pi \\ &= \tfrac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

(b) Quando $\theta = \frac{1}{3}\pi$, de (9)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \chi &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Logo, $\chi \approx 1{,}31$. Como $\alpha > \theta$, $\chi = \alpha - \theta$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \tfrac{1}{3}\pi + 1{,}31 \\ &\approx 2{,}36 \end{aligned}$$

(c) Quando $\theta = \frac{2}{3}\pi$, de (9)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \chi &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \\ &= -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Logo, $\chi \approx 1{,}83$. Como $\alpha < \theta$, $\chi = \pi - (\theta - \alpha)$. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha &\approx (\tfrac{2}{3}\pi + 1{,}83) - \pi \\ &= 1{,}83 - \tfrac{1}{3}\pi \\ &\approx 0{,}78 \end{aligned}$$

(d) A Figura 7 mostra um esboço da cardióide e χ e α em cada um dos pontos $(3, \frac{1}{6}\pi)$, $(2 + \sqrt{3}, \frac{1}{3}\pi)$ e $(2 + \sqrt{3}, \frac{2}{3}\pi)$.

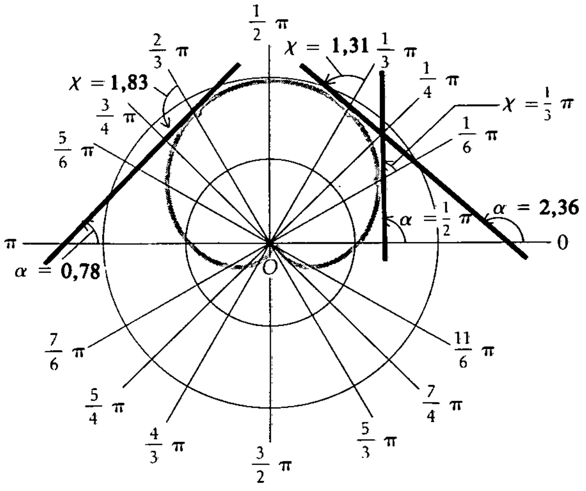

$\frac{1}{2}\pi$
$\frac{2}{3}\pi$
$\chi = 1{,}31$
$\frac{1}{3}\pi$
$\frac{1}{4}\pi$
$\chi = 1{,}83$
$\frac{3}{4}\pi$
$\chi = \frac{1}{3}\pi$
$\frac{5}{6}\pi$
$\frac{1}{6}\pi$
$\alpha = 2{,}36$
$\alpha = \frac{1}{2}\pi$
π
0
O
$\alpha = 0{,}78$
$\frac{7}{6}\pi$
$\frac{11}{6}\pi$
$\frac{5}{4}\pi$
$\frac{7}{4}\pi$
$\frac{4}{3}\pi$
$\frac{5}{3}\pi$
$\frac{3}{2}\pi$

FIGURA 7

EXEMPLO 4 Ache, com precisão de 10 min, a medida do menor ângulo entre as retas tangentes às curvas

$$r = 3 \cos 2\theta \quad \text{e} \quad r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$$

no ponto $P(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{8}\pi)$.

Solução O gráfico de cada uma das equações é uma rosácea de quatro folhas. Veja a Figura 8 que mostra uma parte de cada curva no ponto P; χ_1 é a medida em radianos do ângulo entre a reta OP e a reta tangente à curva $r = 3 \cos 2\theta$, e χ_2 é a medida em radianos do ângulo entre a reta OP e a reta tangente à curva $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$. Se β for o ângulo entre as retas tangentes em P, então

$$\beta = \chi_1 - \chi_2$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (\chi_1 - \chi_2)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \chi_1 - \operatorname{tg} \chi_2}{1 + \operatorname{tg} \chi_1 \operatorname{tg} \chi_2} \tag{10}$$

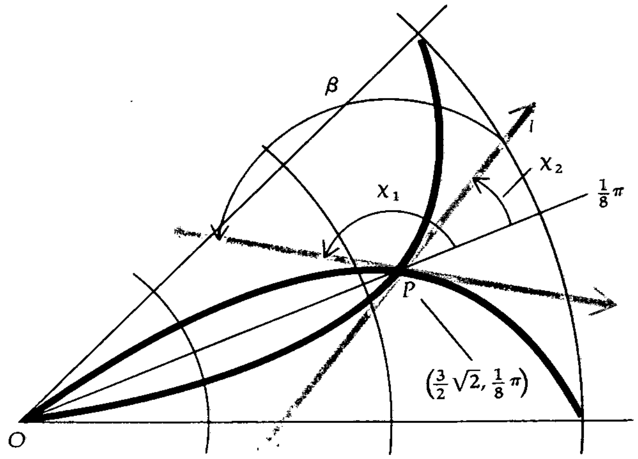

β
l
χ_2
$\frac{1}{8}\pi$
χ_1
P
$(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{8}\pi)$
O

FIGURA 8

Os valores de tg χ_1 e tg χ_2 são encontrados pelo Teorema 10.9.1. Para o cálculo de tg χ_1, usamos $r = 3\cos 2\theta$ e $dr/d\theta = -6\operatorname{sen} 2\theta$. Para tg χ_2 temos $r = 3\operatorname{sen} 2\theta$ e $dr/d\theta = 6\cos 2\theta$. Assim,

$$\operatorname{tg}\chi_1 = \frac{3\cos 2\theta}{-6\operatorname{sen} 2\theta} \qquad \operatorname{tg}\chi_2 = \frac{3\operatorname{sen} 2\theta}{6\cos 2\theta}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg} 2\theta \qquad\qquad = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2\theta$$

Quando $\theta = \frac{1}{8}\pi$,

$$\operatorname{tg}\chi_1 = -\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{4}\pi \qquad \operatorname{tg}\chi_2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\pi$$

$$= -\tfrac{1}{2} \qquad\qquad = \tfrac{1}{2}$$

Substituindo esses valores em (10), obtemos

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1 + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}$$

$$= -\tfrac{4}{3}$$

O ângulo β tem uma medida de 126°50′ com precisão de 10 min. Assim, a medida do menor ângulo entre as duas retas tangentes é 180° − 126°50′ = 53°10′.

EXERCÍCIOS 10.9

Nos Exercícios de 1 a 8, ache a inclinação da reta tangente à curva dada no ponto, cujo valor de θ é o indicado. Faça também um esboço do gráfico e da reta tangente.

1. $r = 2\operatorname{sen}\theta;\ \theta = \frac{1}{6}\pi$
2. $r = 4\cos\theta;\ \theta = \frac{1}{3}\pi$
3. $r = 1 - \cos\theta;\ \theta = \frac{1}{4}\pi$
4. $r = 2 + 2\operatorname{sen}\theta;\ \theta = \frac{1}{4}\pi$
5. $r = 6 + 2\operatorname{sen}\theta;\ \theta = \frac{5}{6}\pi$
6. $r = 3 - 2\cos\theta;\ \theta = \frac{2}{3}\pi$
7. $r = 3\cos 2\theta;\ \theta = \frac{2}{3}\pi$
8. $r = 2\operatorname{sen} 3\theta;\ \theta = \frac{5}{6}\pi$

Nos Exercícios de 9 a 20, determine os pontos nos quais a curva dada tem retas tangentes verticais e horizontais. Faça um esboço do grdfico e mostre essas retas tangentes.

9. $r = 4 + 3\operatorname{sen}\theta$
10. $r = 2 + \cos\theta$
11. $r = 4 - 2\cos\theta$
12. $r = 3 - 2\operatorname{sen}\theta$
13. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$
14. $r = 3 - 3\cos\theta$
15. $r = 2 + 3\cos\theta$
16. $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$
17. $r = \cos 2\theta$
18. $r = 2\operatorname{sen} 3\theta$
19. $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$
20. $r^2 = 9\cos 2\theta$

Nos Exercícios de 21 a 28, ache χ e α para a curva dada no ponto cujo valor de θ é o indicado. Faça um esboço da curva e mostre χ e α.

21. $r\theta = 4;\ \theta = 1$
22. $r = 2\theta;\ \theta = \frac{5}{2}\pi$
23. $r = \sec 2\theta;\ \theta = -\frac{1}{8}\pi$
24. $r = 4\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta;\ \theta = \frac{1}{3}\pi$
25. $r = \theta^2;\ \theta = \frac{1}{2}\pi$
26. $r = \cos 2\theta;\ \theta = \frac{1}{12}\pi$
27. $r = 3\sqrt{\cos 2\theta};\ \theta = \frac{1}{6}\pi$
28. $r = 2(1 - \operatorname{sen}\theta);\ \theta = \pi$

Nos Exercícios de 29 a 32, ache a medida, em graus, do menor ângulo entre as retas tangentes ao par de curvas dadas nos pontos de intersecção indicados.

29. $\begin{cases} r = 2\cos\theta \\ r = 2\operatorname{sen}\theta \end{cases};\ (\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$
30. $\begin{cases} r = 3 \\ r = 6\operatorname{sen}\theta \end{cases};\ (3, \frac{1}{6}\pi)$
31. $\begin{cases} r = 4\cos\theta \\ r = 4\cos^2\theta - 3 \end{cases};\ (-2, \frac{2}{3}\pi)$
32. $\begin{cases} r = -4\operatorname{sen}\theta \\ r = 4\cos 2\theta \end{cases};$ a origem

Nos Exercícios de 33 a 36, ache a medida, em graus, do ângulo entre as retas tangentes ao par de curvas dadas em todos os pontos de intersecção.

33. $\begin{cases} r = 1 - \operatorname{sen}\theta \\ r = 1 + \operatorname{sen}\theta \end{cases}$
34. $\begin{cases} r = 2\sec\theta \\ r = \operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\theta \end{cases}$
35. $\begin{cases} r = \cos\theta \\ r = \operatorname{sen} 2\theta \end{cases}$
36. $\begin{cases} r = 3\cos\theta \\ r = 1 + \cos\theta \end{cases}$

37. Dada a curva $r = k$, onde k é uma constante não-nula e α é a medida em radianos da inclinação da reta tangente à curva no ponto (r, θ). Mostre que tg α tg $\theta = -1$ para todo θ tal que tg $\theta \neq 0$.
38. Prove que em cada ponto da espiral logarítmica $r = be^{a\theta}$, χ é o mesmo.
39. Prove que tg χ = tg $\frac{1}{2}\theta$ em todos os pontos da cardióide $r = 2(1 - \cos\theta)$.
40. Para a curva $r\cos\theta = 4$ ache $\lim\limits_{\theta \to \pi/2} \chi$.

41. Prove que nos pontos de intersecção das cardióides $r = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$ e $r = b(1 - \operatorname{sen}\theta)$ suas retas tangentes são perpendiculares para todos os valores de a e b.

42. Prove que nos pontos de intersecção de duas curvas $r = a \sec^2 \frac{1}{2}\theta$ e $r = b \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}\theta$ suas retas tangentes são perpendiculares.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 10

Nos Exercícios de 1 a 4, (a) ache a equação da parábola tendo o foco e a diretriz dados, (b) ache o comprimento do latus rectum e (c) faça um esboço da parábola.

1. Foco em $(0, -3)$; diretriz, $y = 3$

2. Foco em $(0, 4)$; diretriz, $y = -4$

3. Foco em $(1, 0)$; diretriz, $x = -1$

4. Foco em $(6, 0)$; diretriz, $x = -6$

5. Faça um esboço da parábola com equação $x^2 = 6y$ e ache (a) o foco e (b) a equação da diretriz.

6. Faça um esboço da parábola com equação $y = x^2 - 8x$. Ache (a) o vértice, (b) a equação do eixo, (c) o foco e (d) a equação da diretriz.

7. Dada a parábola com equação $y^2 + 8x - 6y = 7$, ache (a) o vértice, (b) a equação do eixo, (c) o foco e (d) a equação da diretriz. Faça um esboço da curva.

8. Ache a equação da parábola com vértice em $(-3, 5)$ e foco em $(-3, -1)$.

9. Ache a equação da parábola tendo vértice em $(5, 1)$, eixo paralelo ao eixo y e passando pelo ponto $(9, 3)$.

10. Mostre que toda a equação da forma $xy + ax + by + c = 0$ pode sempre ser escrita na forma $x'y' = k$ por uma translação de eixos, e determine o valor de k.

11. Qualquer secção de um espelho parabólico feita por um plano que passa pelo eixo do espelho é um segmento de parábola. A altura do segmento é 12 cm e o comprimento da base é 18 cm. Uma secção do espelho feita por um plano perpendicular ao seu eixo é uma circunferência. Ache a circunferência da secção plana circular se o plano perpendicular ao eixo estiver a 3 cm do vértice.

12. A diretriz da parábola $y^2 = 4px$ é tangente à circunferência que tem o foco da parábola como centro. Ache a equação da circunferência e os pontos de intersecção das duas curvas.

Nos Exercícios de 13 a 20, o gráfico da equação dada é uma elipse ou uma hipérbole. Ache o centro, vértices e focos da cônica. Se o gráfico for uma elipse, ache também as extremidades do eixo menor. Se o gráfico for uma hipérbole, ache também as equações das assíntotas. Faça um esboço da curva e mostre os focos. Se a curva for uma hipérbole, trace também as assíntotas.

13. $4x^2 + 25y^2 = 100$
14. $25x^2 - 4y^2 = 100$
15. $16x^2 - 9y^2 = 144$
16. $9x^2 + 16y^2 = 144$
17. $4x^2 + y^2 + 24x - 16y + 84 = 0$
18. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$
19. $25x^2 - y^2 + 50x + 6y - 9 = 0$
20. $3x^2 - 2y^2 + 6x - 8y + 11 = 0$

Nos Exercícios 21 e 22, ache a equação da elipse com as propriedades dadas e faça um esboço do gráfico.

21. Vértices em $(0, 8)$ e $(0, -4)$ e um foco em $(0, 6)$.

22. Focos em $(-3, -2)$ e $(-3, 6)$ e o comprimento do semi-eixo menor é três quartos do comprimento do semi-eixo maior.

Nos Exercícios 23 e 24, ache a equação da hipérbole com as propriedades dadas e faça um esboço do gráfico.

23. Focos em $(-5, 1)$ e $(1, 1)$ e um vértice em $(-4, 1)$.

24. Centro em $(-5, 2)$, um vértice em $(-1, 2)$ e um foco em $(0, 2)$.

Nos Exercícios de 25 a 28, ache a equação polar do gráfico tendo a equação cartesiana dada.

25. $4x^2 - 9y^2 = 36$
26. $2xy = 1$
27. $x^2 + y^2 - 9x + 8y = 0$
28. $y^4 = x^2(a^2 - y^2)$

Nos Exercícios de 29 a 32, ache a equação cartesiana do gráfico tendo a equação polar dada.

29. $r = 9 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta$
30. $r(1 - \cos\theta) = 2$
31. $r = 4 \cos 3\theta$
32. $r = a \operatorname{tg}^2 \theta$

33. Faça um esboço do gráfico de (a) $r\theta = 3$ (espiral recíproca) e (b) $3r = \theta$ (espiral de Arquimedes).

34. Mostre que as equações $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ e $r = \operatorname{sen}\theta - 1$ têm o mesmo gráfico.

35. Faça um esboço do gráfico de $r = \sqrt{|\cos\theta|}$.

36. Faça um esboço do gráfico de $r = \sqrt{|\cos 2\theta|}$.

37. Faça um esboço do gráfico de $r = 2(1 + \cos\theta)$.

38. Faça um esboço do gráfico de $r^2 = 16 \cos\theta$.

Nos Exercícios 39 e 40, ache todos os pontos de intersecção dos gráficos das duas curvas dadas.

39. $\begin{cases} r = 2(1 + \cos\theta) \\ r^2 = 2\cos\theta \end{cases}$
40. $\begin{cases} r\cos\theta = 1 \\ r = 1 + 2\cos\theta \end{cases}$

41. Ache a área da região limitada por (a) o laço da *limaçon* $r = 4(1 + 2\cos\theta)$ e (b) a parte externa da *limaçon*.

42. Ache a área de uma folha da rosácea $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$.

43. Ache a área da região interior ao gráfico de $r = 2a \operatorname{sen}\theta$ e exterior ao gráfico de $r = a$.

44. Ache a área da região interior ao gráfico da *lemniscata* $r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ e exterior ao gráfico da circunferência $r = 1$.

45. Ache a área da região varrida pelo raio vetor da espiral logarítmica $r = e^{k\theta}$ $(k > 0)$ quando θ varia de 0 a 2π.

46. Ache a área da intersecção das regiões limitadas pelos gráficos das duas equações $r = a\cos\theta$ e $r = a(1 - \cos\theta)$, $a > 0$.

47. Prove que a distância entre os pontos $P_1(r_1, \theta_1)$ e $P_2(r_2, \theta_2)$ é $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

48. Ache os pontos de intersecção dos gráficos das equações $r = \operatorname{tg}\theta$ e $r = \operatorname{cotg}\theta$.

49. Ache uma equação polar da circunferência com centro em (r_0, θ_0) e raio de a unidades. (*Sugestão*: aplique a lei dos cosenos ao triângulo com vértices na origem, em (r_0, θ_0) e em (r, θ)).

50. Ache a área da região limitada por um laço da curva $r = a \operatorname{sen} n\theta$, onde n é um inteiro positivo.

Nos Exercícios de 51 a 54 é dada a equação de uma cônica com foco na origem. Em cada exercício, (a) ache a excentricidade; (b) identifique a cônica; (c) escreva a equação da diretriz que corresponde ao foco na origem; (d) faça um esboço da curva.

51. $r = \dfrac{2}{2 - \operatorname{sen}\theta}$

52. $r = \dfrac{5}{3 + 3\operatorname{sen}\theta}$

53. $r = \dfrac{4}{2 + 3\cos\theta}$

54. $r = \dfrac{4}{3 - 2\cos\theta}$

Nos Exercícios de 55 a 58, ache a equação polar da cônica que satisfaz as condições dadas e faça um esboço do gráfico.

55. Um foco na origem; vértices em $(2, \pi)$ e $(4, \pi)$.

56. Um foco na origem; um vértice em $(6, \frac{1}{2}\pi)$; $e = \frac{3}{4}$.

57. Um foco na origem; um vértice em $(3, \frac{3}{2}\pi)$; $e = 1$.

58. A reta $r \operatorname{sen}\theta = 6$ é a diretriz correspondente ao foco na origem e $e = \frac{5}{3}$.

Nos Exercícios 59 e 60, simplifique a equação dada por uma rotação e uma translação de eixos. Faça um esboço do gráfico e mostre os três conjuntos de eixos.

59. $3x^2 - 3xy - y^2 - 6y = 0$

60. $4x^2 + 3xy + y^2 - 6x + 12y = 0$

Nos Exercícios 61 e 62, (a) ache a excentricidade, os focos e as diretrizes da cônica central dada. (b) Faça um esboço mostrando a cônica, os focos e as diretrizes.

61. $25x^2 - 9y^2 = 225$

62. $4x^2 + y^2 = 64$

63. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pela hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ e pela reta $x = 2a$.

64. Mostre que a hipérbole $x^2 - y^2 = 4$ tem os mesmos focos que a elipse $x^2 + 9y^2 = 9$.

65. Um satélite gira em torno da Terra numa órbita elíptica com excentricidade de $\frac{1}{3}$ e tendo a Terra em um foco. A menor distância do satélite à Terra é de 300 km. Ache a maior distância entre o satélite e a Terra.

66. A órbita do planeta Mercúrio em torno do Sol é elíptica com o Sol em um foco, um semi-eixo maior com comprimento de 58 milhões de quilômetros e uma excentricidade de 0,206. Ache (a) a menor distância entre Mercúrio e o Sol e (b) a maior distância entre os dois.

67. Um cometa move-se numa órbita parabólica em torno do Sol que está no foco F da parábola. É feita uma observação quando ele está num ponto P_1, a 15 milhões de quilômetros do Sol e uma segunda quando ele está em P_2, a 5 milhões de quilômetros do Sol. Os segmentos de reta FP_1 e FP_2 são perpendiculares. Com essas informações existem duas órbitas possíveis para o cometa. Ache qual a menor distância ao Sol para cada órbita.

68. Um arco de uma ponte tem a forma de uma semi-elipse com uma abertura horizontal de 60 m e uma altura de 20 m no centro. Qual a altura do arco 10 m à direita ou à esquerda do centro?

69. Ache a equação polar da parábola contendo o ponto $(2, \frac{1}{3}\pi)$, cujo foco está na origem e cujo vértice está na extensão do eixo polar.

70. A distância entre as duas diretrizes de uma elipse é três vezes a distância entre os focos. Ache a excentricidade.

71. Os pontos A e B estão separados por 1.000 m. Pelo som de uma explosão ouvida nesses pontos em instantes diferentes, foi determinado que a localização da explosão é 600 m mais perto de A do que de B. Mostre que a localização da explosão está restrita a uma certa curva e ache uma equação dessa curva.

72. Uma corda focal de uma cônica é dividida em dois segmentos pelo foco. Prove que a soma dos recíprocos das medidas dos comprimentos dos dois segmentos é a mesma, não importando a corda tomada. (*Sugestão*: use coordendas polares.)

73. Uma corda focal é o segmento de reta que passa pelo foco cujas extremidades estão sobre a cônica. Prove que se duas cordas focais de uma parábola são perpendiculares, então a soma dos recíprocos das medidas de seus comprimentos é uma constante. (*Sugestão*: use coordenadas polares.)

74. Ache a área da região limitada pelas duas parábolas $r = 2/(1 - \cos\theta)$ e $r = 2/(1 + \cos\theta)$.

75. Prove que a reta $y = 2x$ é uma assíntota do gráfico da função f, tal que $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

76. Prove que os pontos médios de todas as cordas paralelas a uma corda fixa de uma parábola estão sobre uma reta paralela ao eixo da parábola.

77. Mostre que $\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \pm\sqrt{a}$ representa uma família monoparamétrica de cônicas e determine o tipo da cônica. Faça esboços das cônicas para $a = 1$, $a = 2$ e $a = 4$.

78. O gráfico da equação $(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$ é uma cônica central tendo excentricidade e e um foco em $(p, 0)$. Simplifique a equação por uma translação de eixos. Ache a nova origem em relação aos eixos x e y e determine o tipo da cônica.

Os Exercícios de 79 a 86 referem-se à Secção Suplementar 10.9.

79. Determine os pontos nos quais a curva $r = 3 - 3\operatorname{sen}\theta$ tem retas tangentes horizontal e vertical. Faça um esboço do gráfico com essas retas tangentes.

80. Determine os pontos onde a curva $r = 4 + 3\cos\theta$ tem retas tangentes horizontal e vertical. Faça um esboço do gráfico mostrando essas retas.

81. Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico de $r = \frac{1}{2} + \operatorname{sen}\theta$ no ponto $(1, \frac{1}{6}\pi)$. Faça um esboço do gráfico com a reta tangente.

82. Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico de $r = 6\cos\theta - 2$ no ponto $(1, \frac{5}{3}\pi)$. Faça um esboço do gráfico com a reta tangente.

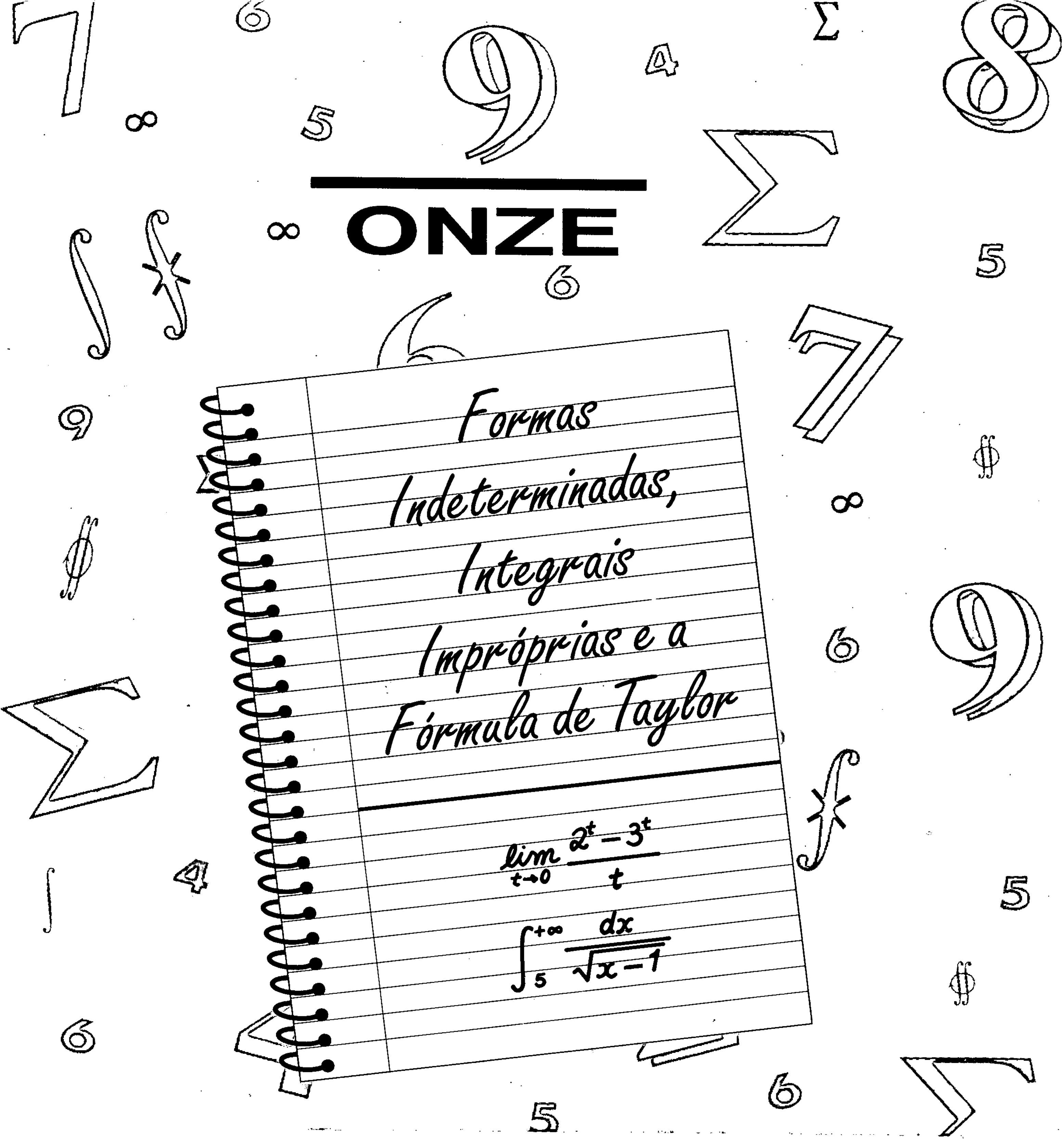
83. Ache a medida em radianos do ângulo entre as retas tangentes em cada ponto de intersecção dos gráficos das equações $r = -6\cos\theta$ e $r = 2(1 - \cos\theta)$.

84. Prove que os gráficos de $r = a\theta$ e $r\theta = a$ têm um número ilimitado de pontos de intersecção. Prove também que as retas tangentes são perpendiculares em somente dois desses pontos de intersecção, que deverão ser determinados.

85. Para a curva $r = 2\sqrt{\cos\frac{1}{2}\theta}$, ache χ e α no ponto $(1, \frac{2}{3}\pi)$. Faça um esboço da curva mostrando χ e α.

86. Para a curva $r = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$, ache χ e α no ponto $(3, \frac{1}{6}\pi)$. Faça um esboço da curva mostrando χ e α.

ONZE



Formas Indeterminadas, Integrais Impróprias e a Fórmula de Taylor

$$\lim_{t\to 0}\frac{2^t-3^t}{t}$$

$$\int_5^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

Métodos para calcular certos limites envolvendo *formas indeterminadas* são tratados nas duas primeiras secções deste capítulo. A técnica usada é chamada *regra de L'Hôpital*, em homenagem ao matemático francês Guillaume François de L'Hôpital (1661-1707), que escreveu o primeiro texto de Cálculo, publicado em 1696.

As Secções 11.3 e 11.4 referem-se a *integrais impróprias*. Aquelas na Secção 11.3 são integrais de intervalos sem limite, ou seja, têm extremos infinitos de integração. Cada uma das integrais impróprias na Secção 11.4 envolve uma função não limitada em um intervalo fechado [*a*, b]; isto é, o integrando tem uma descontinuidade infinita em [*a*, *b*].

Na Secção 11.5 discutimos a *fórmula de Taylor*, que dá um procedimento para aproximarmos funções por meio de polinômios.

11.1 A FORMA INDETERMINADA 0/0

O Teorema de Limite 9 (2.2.9) estabelece que se $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

desde que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Existem várias situações nas quais esse teorema não pode ser aplicado. Especificando, o Teorema de Limite 12 (2.4.4) pode ser aplicado se $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} f(x) = k$, onde k é uma constante diferente de zero. Consideremos o caso quando tanto $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ como $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Alguns limites desse tipo já foram discutidos.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Queremos encontrar

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4}$$

Aqui, $\lim_{x \to 4} (x^2 - x - 12) = 0$ e $\lim_{x \to 4} (x^2 - 3x - 4) = 0$. Entretanto, o numerador e o denominador podem ser fatorados, resultando

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} &= \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)(x + 3)}{(x - 4)(x + 1)} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{x + 3}{x + 1} \\ &= \tfrac{7}{5}\end{aligned}$$ ◀

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$ e $\lim_{x \to 0} x = 0$ e pelo Teorema 2.8.2,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$ ◀

11.1.1 DEFINIÇÃO Se f e g forem duas funções tais que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então a função f/g tem a **forma indeterminada 0/0 em a.**

▶ **ILUSTRAÇÃO 3** Da Definição 11.1.1 $(x^2 - x - 12)/(x^2 - 3x - 4)$ tem uma forma indeterminada 0/0 em 4; contudo, vimos na Ilustração 1 que

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \frac{7}{5}$$

Também, sen x/x tem em 0 a forma indeterminada 0/0, enquanto que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, conforme indicado na Ilustração 2. ◀

Vamos considerar agora um método mais geral para encontrar o limite, se existir, de uma função em um número onde ela tem a forma indeterminada 0/0. O método é conhecido como a *regra de L'Hôpital.*

11.1.2 TEOREMA
Regra de L'Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente em um número a em I. Suponha que, para todo $x \neq a$ em I, $g'(x) \neq 0$. Então, se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ e se

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

segue que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

O teorema é válido se ambos os limites forem laterais à direita ou à esquerda.

Antes de apresentar a demonstração do Teorema 11.1.2, vamos mostrar como usar o teorema através de exemplos e ilustrações.

▶ **ILUSTRAÇÃO 4** Vamos usar a regra de L'Hôpital para calcular os limites nas Ilustrações 1 e 2. Na Ilustração 1, como $\lim_{x \to 4} (x^2 - x - 12) = 0$ e $\lim_{x \to 4} (x^2 - 3x - 4) = 0$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital e obter

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{2x - 1}{2x - 3}$$
$$= \tfrac{7}{5}$$

A regra de L'Hôpital pode ser aplicada na Ilustração 2, pois $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$ e $\lim_{x \to 0} x = 0$. Então,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1}$$
$$= 1$$

◀

EXEMPLO 1 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x}$$

Solução Como $\lim_{x \to 0} x = 0$ e $\lim_{x \to 0} (1 - e^x) = 0$, a regra de L'Hôpital pode ser aplicada. Assim,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{-e^x}$$
$$= \frac{1}{-1}$$
$$= -1$$

EXEMPLO 2 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2}$$

Solução

$$\lim_{x \to 1} (1 - x + \ln x) = 1 - 1 + 0 = 0 \qquad \lim_{x \to 1} (x^3 - 3x + 2) = 1 - 3 + 2 = 0$$

Logo, aplicando a regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{3x^2 - 3}$$

Agora, como $\lim_{x \to 1} (-1 + 1/x) = 0$ e $\lim_{x \to 1} (3x^2 - 3) = 0$, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente, obtendo

$$\lim_{x \to 1} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{3x^2 - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{6x} = -\tfrac{1}{6}$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2} = -\frac{1}{6}$$

Para provar o Teorema 11.1.2 teremos que usar o chamado *teorema do valor médio de Cauchy*, que estende para duas funções o teorema do valor médio (4.3.2) para uma única função. Esse teorema é atribuído ao matemático francês Augustin L. Cauchy (1789-1857).

11.1.3 TEOREMA Teorema do Valor Médio de Cauchy

Se f e g forem funções tais que

(i) f e g são contínuas no intervalo fechado $[a, b]$;
(ii) f e g são diferenciáveis no intervalo aberto (a, b);
(iii) para todo x no intervalo aberto (a, b), $g'(x) \neq 0$,

então existirá um número z no intervalo aberto (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Prova Vamos mostrar primeiro que $g(b) \neq g(a)$. Suponha $g(b) = g(a)$. Como g satisfaz as duas condições da hipótese do teorema do valor médio, existe algum número c em (a, b) tal que $g'(c) = [g(b) - g(a)]/(b - a)$. Mas se $g(b) = g(a)$, então existe algum número c em (a, b) tal que $g'(c) = 0$. Mas a condição (iii) da hipótese desse teorema estabelece que para todo x em (a, b), $g'(x) \neq 0$. Há, portanto, uma contradição. Logo, a hipótese de que $g(b) = g(a)$ é falsa. Assim $g(b) \neq g(a)$ e, conseqüentemente, $g(b) - g(a) \neq 0$.

Consideremos agora a função h definida por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right][g(x) - g(a)]$$

Então,

$$h'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right] g'(x) \tag{1}$$

Logo, h é diferenciável em (a, b), pois f e g são diferenciáveis no intervalo, e h é contínua em $[a, b]$, pois f e g são contínuas nesse intervalo.

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right][g(a) - g(a)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right][g(b) - g(a)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Desta forma, a função h satisfaz as três condições do teorema de Rolle. Logo, existe um número z no intervalo aberto (a, b), tal que $h'(z) = 0$. Assim, de (1),

$$f'(z) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(z) = 0$$

Como $g'(z) \neq 0$ em (a, b), da igualdade acima temos que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

onde z é algum número em (a, b). Isso prova o teorema. ■

Se g for a função $g(x) = x$, a conclusão do teorema do valor médio de Cauchy é a conclusão do antigo teorema do valor médio, pois $g'(z) = 1$. Assim sendo, o teorema do valor médio é um caso particular do teorema do valor médio de Cauchy.

Uma interpretação geométrica do teorema do valor médio de Cauchy é dada na Secção 14.3. Adiamos a discussão até então, pois vamos precisar de equações paramétricas.

▶ **ILUSTRAÇÃO 5** Suponha que $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$ e $g(x) = x^3 - 4x + 2$. Queremos encontrar um número z em $(0, 1)$, previsto pelo Teorema 11.1.3.

$$f'(x) = 6x + 3 \qquad g'(x) = 3x^2 - 4$$

Assim sendo, f e g são contínuas e diferenciáveis em toda parte e para todo x em $(0, 1)$, $g'(x) \neq 0$. Assim, pelo Teorema 11.1.3, existe um z em $(0, 1)$, tal que

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{6z + 3}{3z^2 - 4}$$

Substituindo $f(1) = 5$, $g(1) = -1$, $f(0) = -1$ e $g(0) = 2$ e resolvendo em z, teremos

$$\frac{5-(-1)}{-1-2} = \frac{6z+3}{3z^2-4}$$

$$6z^2 + 6z - 5 = 0$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{-6 \pm \sqrt{36+120}}{12} \\ &= \frac{-6 \pm 2\sqrt{39}}{12} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{39}}{6} \end{aligned}$$

Somente um desses números está em (0, 1), a saber, $z = \frac{1}{6}(-3 + \sqrt{39})$. ◀

Agora estamos em condições de provar o Teorema 11.1.2. Vamos considerar três casos: (i) $x \to a^+$; (ii) $x \to a^-$; (iii) $x \to a$.

Prova do Teorema 11.1.3(i) Como na hipótese não foi suposto que f e g eram definidas em a, consideremos duas novas funções F e G para as quais

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \quad \text{se } x \neq a \text{ e } F(a) = 0 \\ G(x) &= g(x) \quad \text{se } x \neq a \text{ e } G(a) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Seja b o extremo direito do intervalo aberto I dado na hipótese. Como f e g são ambas diferenciáveis em I, exceto possivelmente em a, concluímos que F e G são ambas diferenciáveis no intervalo $(a, x]$, onde $a < x < b$. Logo, F e G são contínuas em $(a, x]$. As funções F e G são também contínuas à direita de a, pois $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 0$, que é $F(a)$; analogamente, $\lim\limits_{x \to a^+} G(x) = G(a)$. Logo, F e G são contínuas no intervalo fechado $[a, x]$. Assim, F e G satisfazem as três condições da hipótese do teorema do valor médio de Cauchy (Teorema 11.1.3) no intervalo $[a, x]$. Assim,

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}$$

onde z é algum número tal que $a < z < x$. De (2) e da igualdade acima, temos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Como $a < z < x$, segue que quando $x \to a^+$, $z \to a^+$; assim sendo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to a^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} \\ &= \lim_{z \to a^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} \end{aligned}$$

Mas, por hipótese, esse limite é L. Logo,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad \blacksquare$$

A demonstração do caso (ii) é análoga à de (i) e será deixada como exercício (veja o Exercício 34). A demonstração do caso (iii) baseia-se nos resultados dos casos (i) e (ii) e será também deixada como um exercício (veja o Exercício 35).

A regra de L'Hôpital também é válida quando x cresce sem limitação ou decresce sem limitação, conforme será provado no próximo teorema.

11.1.4 TEOREMA
Regra de L'Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis para todo $x > N$, onde N é uma constante positiva, e suponha que para todo $x > N$, $g'(x) \neq 0$. Então, se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ e se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

segue que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

O teorema continua válido se trocarmos $x \to +\infty$ por $x \to -\infty$.

Prova Vamos demonstrar o teorema para $x \to +\infty$. A demonstração quando $x \to -\infty$ será deixada como um exercício (veja o Exercício 38).

Para todo $x > N$, seja $x = 1/t$, então $t = 1/x$. Sejam F e G as funções definidas por $F(t) = f(1/t)$ e $G(t) = g(1/t)$, se $t \neq 0$. Então $f(x) = F(t)$ e $g(x) = G(t)$, onde $x > N$ e $0 < t < 1/N$. Das Definições 2.5.1 e 2.3.1, podemos mostrar que as afirmativas

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = M \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^+} F(t) = M$$

têm o mesmo significado. A prova desse fato será deixada como exercício (veja o Exercício 36). Como, por hipótese, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, podemos concluir que

$$\lim_{t \to 0^+} F(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^+} G(t) = 0 \tag{3}$$

Considerando o quociente $F'(t)/G'(t)$, temos, usando a regra da cadeia,

$$\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{-\dfrac{1}{t^2} f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{-\dfrac{1}{t^2} g'\left(\dfrac{1}{t}\right)}$$

$$= \frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)}$$

$$= \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Como por hipótese $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)/g'(x) = L$, do que está acima segue que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = L \tag{4}$$

Como para todo $x > N$, $g'(x) \neq 0$,

$$G'(t) \neq 0 \text{ para todo } 0 < t < \frac{1}{N}$$

Dessa afirmação, de (3) e de (4) segue, do Teorema 11.1.2 que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = L$$

Mas como $F(t)/G(t) = f(x)/g(x)$ para todo $x > N$ e $t \neq 0$, então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

e assim o teorema está provado. ■

Os Teoremas 11.1.2 e 11.1.4 continuam válidos se L for trocado por $+\infty$ ou $-\infty$. As demonstrações serão omitidas.

EXEMPLO 3 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}}{\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)}$$

Solução $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sen}(1/x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{tg}^{-1}(1/x) = 0$. Assim, da regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}}{\operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos \dfrac{1}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos \dfrac{1}{x}}{\dfrac{x^2}{x^2 + 1}}$$

Como

$$\lim_{x \to +\infty} \cos \frac{1}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= 1$$

segue que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2+1}} = 1$$

Portanto, o limite dado é 1.

EXEMPLO 4 Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Prove que f é contínua em 0 usando a Definição 2.6.1. (b) Prove que f é diferenciável em 0 calculando $f'(0)$.

Solução

(a) Vamos verificar as três condições para a continuidade.

(i) $f(0) = 1$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

Para calcular o limite, vamos aplicar a regra de L'Hôpital, pois $\lim\limits_{x \to 0} (e^x - 1) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$. Temos

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1}$$
$$= 1$$

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

Logo, f é contínua em 0.

(b) $$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} (e^x - 1 - x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, aplicamos a regra de L'Hôpital e obtemos

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} (e^x - 1) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$, aplicamos novamente a regra de L'Hôpital e obtemos

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} \\
&= \tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

EXERCÍCIOS 11.1

*Nos Exercícios de 1 a 5, ache todos os valores de z no intervalo (*a, b*) dado, satisfazendo a conclusão do Teorema 11.1.3 para o par de funções dadas.*

1. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$; $(a, b) = (0, 2)$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$, $g(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$; $(a, b) = (0, 2)$
3. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$; $(a, b) = (0, \pi)$
4. $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$; $(a, b) = (0, \frac{1}{2}\pi)$
5. $f(x) = \sqrt{x + 5}$, $g(x) = x + 3$; $(a, b) = (-4, -1)$

Nos Exercícios de 6 a 30, calcule o limite, se ele existir.

6. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{3 \cos x}{2x - \pi}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{x}}$
10. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{2 - x}$
11. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2^x}{e^x}$
12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{x \operatorname{sen} x}$
13. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2}$
14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$
15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{x}$
16. $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^n - 2^n}{t - 2}$
17. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\theta - \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{tg}^3 \theta}$
18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x^2} - 1}{\operatorname{sen}^2 x}$
19. $\lim\limits_{z \to +\infty} \dfrac{1 - e^{1/z}}{-\dfrac{3}{z}}$
20. $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y^2}{1 - \cosh y}$
21. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{\ln(2e^t - 1)}$
22. $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{5z}{5^z - e^z}$
23. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t^2}$
24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tgh} 2x}{\operatorname{tgh} x}$
25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^{1/5} - (1 - x)^{1/5}}{(1 + x)^{1/3} - (1 - x)^{1/3}}$
26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 10^x}{x}$
27. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \operatorname{sen} x}$
28. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^2} - 2 \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}$
29. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cosh x}{x^2}$
30. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

31. Um circuito elétrico tem uma resistência de R ohms, uma indutância de L henrys e uma força eletromotriz de E volts, onde R, L e E são positivos. Se i ampères for a corrente passando no circuito t segundos depois que ele foi ligado, então

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

Se t, E e L são constantes, ache $\lim\limits_{R \to 0^+} i$.

32. Numa progressão geométrica, se a for o primeiro termo, r for a razão comum a dois termos sucessivos e S for a soma dos n primeiros termos, então se $r \neq 1$,

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Ache o $\lim\limits_{r \to 1} S$. O resultado será consistente com a soma dos n primeiros termos se $r = 1$?

33. Ache os valores para a e b tais que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x + ax + bx^3}{x^3} = 0$$

34. Prove o Teorema 11.1.2(ii).
35. Prove o Teorema 11.1.2(iii).
36. Suponha que f seja uma função definida para todo $x > N$, onde N é uma constante positiva. Se $t = 1/x$ e $F(t) = f(1/t)$, onde $t \neq 0$, prove que as afirmações $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = M$ e $\lim\limits_{t \to 0^+} F(t) = M$ têm o mesmo significado.
37. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Prove que f é contínua em 0, usando a Definição 2.6.1.
(b) Prove que f é diferenciável em 0, calculando $f'(0)$.

38. Prove o Teorema 11.1.4 para $x \to -\infty$.
39. Prove que $x^{10} < e^x$ para x suficientemente grande, calculando $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{10}}{e^x}$.
40. Prove que $\ln x < x^p$ para todo $p > 0$ e x suficientemente grande, calculando $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^p}$.

11.2 OUTRAS FORMAS INDETERMINADAS

Suponha que nosso problema seja determinar se

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

existe. Não podemos aplicar o teorema envolvendo o limite de um quociente pois $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} (1/x) = +\infty$. Nesse caso, dizemos que a função definida por $\ln x/(1/x)$ tem a forma indeterminada $(-\infty)/(+\infty)$ em $x = 0$. A regra de L'Hôpital também se aplica a uma forma indeterminada desse tipo, bem como àquelas dos tipos $(+\infty)/(+\infty)$, $(-\infty)/(-\infty)$ e $(+\infty)/(-\infty)$. Isso tudo é dado pelos próximos teoremas, cujas provas serão omitidas, pois estão fora do contexto deste livro.

11.2.1 TEOREMA Regra de L'Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis no intervalo aberto I, exceto possivelmente em um número a em I, e suponha que para todo $x \neq a$ em I, $g'(x) \neq 0$. Então, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$, e se

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

segue que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

O teorema continua válido se todos os limites forem laterais à direita ou laterais à esquerda.

EXEMPLO 1 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Solução Como $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} (1/x) = +\infty$, aplicamos a regra de L'Hôpital obtendo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to 0^+} (-x)\\ &= 0\end{aligned}$$

11.2.2 TEOREMA Regra de L'Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis para todo $x > N$, onde N é uma constante positiva, e suponha que para todo $x > N$, $g'(x) \neq 0$. Então, se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$, e se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

segue que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

O teorema continua válido se $x \to +\infty$ for substituído por $x \to -\infty$.

Os Teoremas 11.2.1 e 11.2.2 também são válidos quando L é substituído por $+\infty$ ou $-\infty$, e as demonstrações desses casos também serão omitidas.

EXEMPLO 2 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2 + e^x)}{3x}$$

Solução Como $\lim_{x \to +\infty} \ln(2 + e^x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$, aplicando a regra de L'Hôpital obtemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2 + e^x)}{3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2 + e^x} \cdot e^x}{3}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6 + 3e^x}$$

Agora, como $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} (6 + 3e^x) = +\infty$, aplicamos a regra de L'Hôpital novamente, obtendo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2 + e^x)}{3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3e^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3}$$

$$= \tfrac{1}{3}$$

EXEMPLO 3 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x}$$

Solução $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \sec^2 x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \sec^2 3x = +\infty$. Assim, da regra de L'Hôpital segue que

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x} = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x}{6 \sec^2 3x \operatorname{tg} 3x}$$

$$\lim_{x \to \pi/2^-} 2 \sec^2 x \operatorname{tg} x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \pi/2^-} 6 \sec^2 3x \operatorname{tg} 3x = +\infty$$

Observe que qualquer nova aplicação da regra de L'Hôpital não irá nos ajudar. Todavia, o quociente original pode ser reescrito:

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x} = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$$

Agora, como $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \cos^2 3x = 0$ e $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \cos^2 x = 0$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital, obtendo

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} &= \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{-6 \cos 3x \operatorname{sen} 3x}{-2 \cos x \operatorname{sen} x} \\ &= \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{3(2 \cos 3x \operatorname{sen} 3x)}{(2 \cos x \operatorname{sen} x)} \\ &= \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{3 \operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 2x}\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} 3 \operatorname{sen} 6x = 0$ e $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \operatorname{sen} 2x = 0$, aplicamos novamente a regra de L'Hôpital, obtendo

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{3 \operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 2x} &= \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{18 \cos 6x}{2 \cos 2x} \\ &= \frac{18(-1)}{2(-1)} \\ &= 9\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x} = 9$$

O limite do Exemplo 3 pode ser calculado sem a regra de L'Hôpital, através do Teorema 2.8.2. Esse cálculo será deixado como exercício (veja o Exercício 38).

Além de $0/0$ e $\pm\infty/\pm\infty$, temos ainda as formas indeterminadas $0 \cdot (+\infty)$, $+\infty - (+\infty)$, 0^0, $(\pm\infty)^0$ e $1^{\pm\infty}$. Essas formas são definidas da mesma maneira que as outras duas. Por exemplo, se o $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, então a função definida por $f(x)^{g(x)}$ tem em a uma forma indeterminada $(+\infty)^0$. Para encontrarmos o limite de uma função tendo uma dessas formas indeterminadas, precisamos transformá-la numa das formas $0/0$ ou $\pm\infty/\pm\infty$, antes de aplicar a regra de L'Hôpital. Os exemplos a seguir ilustram o método.

EXEMPLO 4 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}^{-1} x \operatorname{cosec} x$$

Solução Como $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}^{-1} x = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{cosec} x = +\infty$, a função definida por $\operatorname{sen}^{-1} x \operatorname{cosec} x$ tem uma forma indeterminada do tipo $0 \cdot (+\infty)$ em 0. Para podermos aplicar a regra de L'Hôpital, reescrevemos $\operatorname{sen}^{-1} x \operatorname{cosec} x$ como $\operatorname{sen}^{-1} x / \operatorname{sen} x$ e consideramos $\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen}^{-1} x / \operatorname{sen} x)$. Agora $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}^{-1} x = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$; temos assim a forma indeterminada 0/0. Logo, pela regra de L'Hôpital, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1\end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right)$$

Solução Como

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2 \sec x} = +\infty$$

temos a forma indeterminada $+\infty - (+\infty)$. Reescrevendo a expressão, temos

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sec x - 1}{x^2 \sec x}$$

$\lim_{x \to 0} (\sec x - 1) = 0$ e $\lim_{x \to 0} (x^2 \sec x) = 0$; aplicamos então a regra de L'Hôpital e obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\sec x - 1}{x^2 \sec x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{2x \sec x + x^2 \sec x \operatorname{tg} x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x + x^2 \operatorname{tg} x}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{tg} x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} (2x + x^2 \operatorname{tg} x) = 0$$

Assim, aplicamos novamente a regra obtendo

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x + x^2 \operatorname{tg} x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x}{2 + 2x \operatorname{tg} x + x^2 \sec^2 x} \\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) = \frac{1}{2}$$

Para qualquer uma das formas indeterminadas 0^0, $(\pm\infty)^0$, $1^{\pm\infty}$, o procedimento para calcular o limite está no Exemplo 6.

EXEMPLO 6 Calcule o limite, se existir:

$$\lim_{x \to 0^+} (x + 1)^{\text{cotg}\, x}$$

Solução Como $\lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} \text{cotg}\, x = +\infty$, temos a forma indeterminada $1^{+\infty}$. Seja

$$y = (x + 1)^{\text{cotg}\, x} \tag{1}$$

Então,

$$\begin{aligned} \ln y &= \text{cotg}\, x \ln(x + 1) \\ &= \frac{\ln(x + 1)}{\text{tg}\, x} \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x + 1)}{\text{tg}\, x} \tag{2}$$

Como $\lim_{x \to 0^+} \ln(x + 1) = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} \text{tg}\, x = 0$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital ao segundo membro de (2), obtendo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x + 1)}{\text{tg}\, x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x + 1}}{\sec^2 x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, substituindo por 1 o segundo membro de (2) teremos

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = 1 \tag{3}$$

Como a função exponencial é contínua em todo o seu domínio, que é o conjunto de todos os números reais, podemos aplicar o Teorema 2.7.1 e assim

$$\lim_{x \to 0^+} \exp(\ln y) = \exp\left(\lim_{x \to 0^+} \ln y\right)$$

Logo, segue de (3) e dessa igualdade que

$$\lim_{x \to 0^+} y = e^1$$

Mas de (1), $y = (x + 1)^{\text{cotg}\, x}$ e, portanto,

$$\lim_{x \to 0^+} (x + 1)^{\text{cotg}\, x} = e$$

EXERCÍCIOS 11.2

Nos Exercícios de 1 a 34, calcule o limite, se existir.

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$.
2. $\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\text{tg}\, x)}$
3. $\lim_{x \to 1/2^-} \frac{\ln(1 - 2x)}{\text{tg}\, \pi x}$
4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$
5. $\lim_{x \to 0^+} x \text{ cosec } x$
6. $\lim_{x \to 1/2^+} (2x - 1) \text{ tg}\, \pi x$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to0^+} \operatorname{tg}^{-1} x \operatorname{cotg} x$

9. $\lim\limits_{x\to0^+} \operatorname{tg} x(\ln x)$

10. $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to0^+} (\operatorname{senh} x)^{\operatorname{tg} x}$

13. $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

14. $\lim\limits_{x\to0} (x + e^{2x})^{1/x}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 2})$

16. $\lim\limits_{x\to2} \left(\dfrac{5}{x^2 + x - 6} - \dfrac{1}{x-2}\right)$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$

18. $\lim\limits_{x\to0^+} (1 + x)^{\ln x}$

19. $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + x)^{2/x}$

20. $\lim\limits_{x\to0^+} x^{1/\ln x}$

21. $\lim\limits_{x\to0} (1 + ax)^{1/x}$; $a \neq 0$

22. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 2x}{e^{3x} - 1}$

23. $\lim\limits_{x\to0^+} (\operatorname{sen} x)^{x^2}$

24. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^{x^2}$

25. $\lim\limits_{x\to0} (1 + \operatorname{senh} x)^{2/x}$

26. $\lim\limits_{x\to2} (x - 2) \operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi x$

27. $\lim\limits_{x\to0} [(\cos x)e^{x^2/2}]^{4/x^4}$

28. $\lim\limits_{x\to0} (\cos x)^{1/x^2}$

29. $\lim\limits_{x\to+\infty} [(x^6 + 3x^5 + 4)^{1/6} - x]$

30. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x + e^x)}{3x}$

31. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$

32. $\lim\limits_{x\to0^+} x^{x^x}$

33. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

34. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$

35. Se $f(x) = \begin{cases} (1 - e^{4x})^x & \text{se } x < 0 \\ k & \text{se } 0 \leqslant x \end{cases}$, ache k de forma que f seja contínua em $x = 0$.

36. Se $f(x) = \begin{cases} (x + 1)^{(\ln k)/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, ache k de forma que f seja contínua em $x = 0$.

37. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{nx + 1}{nx - 1}\right)^x = 9$, ache n.

38. Calcule o limite no Exemplo 3 sem usar a regra de L'Hôpital, mas usando o Teorema 2.8.2 e as identidades $\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \operatorname{sen} t$ e $\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$.

39. (a) Prove que $\lim\limits_{x\to0} (e^{-1/x^2}/x^n) = 0$ para todo n inteiro positivo. (b) Se $f(x) = e^{-1/x^2}$, use o resultado de (a) para provar que os limites de f, e todas as suas derivadas, são 0 para x tendendo a 0.

40. Suponha que $f(x) = \int_1^x e^{3t} \sqrt{9t^4 + 1}\, dt$ e $g(x) = x^n e^{3x}$. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right] = 1$, ache n.

Nos Exercícios 41 e 42, faça um esboço do gráfico de f, determinando primeiro os extremos relativos de f e as assíntotas horizontais do gráfico, se existirem.

41. $f(x) = x^{1/x}, x > 0$

42. $f(x) = x^x, x > 0$

43. Determine cada um dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cosec} x}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right)^x$. Seria $0^{+\infty}$ uma forma indeterminada?

11.3 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS COM EXTREMOS DE INTEGRAÇÃO INFINITOS

Ao definirmos a integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$, supusemos que a função f deveria ser definida e contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Vamos estender agora a definição de integral definida para poder considerar um intervalo de integração infinito e chamar tal integral de **integral imprópria**. Na Secção 11.4 discutiremos um outro tipo de integral imprópria.

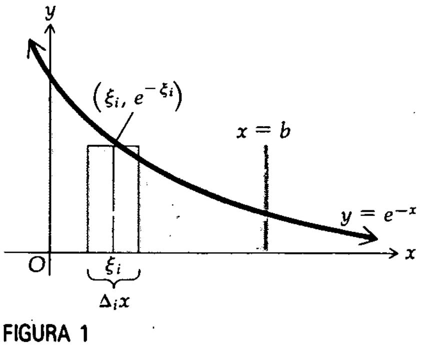


FIGURA 1

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Consideremos o problema de encontrar a área da região limitada pela curva $y = e^{-x}$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = b$; onde $b > 0$. A região está na Figura 1. Se A unidades de área for a área da região,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\|\to0} \sum_{i=1}^{n} e^{-\xi_i} \Delta_i x \\ &= \int_0^b e^{-x}\, dx \\ &= -e^{-x}\Big]_0^b \\ &= 1 - e^{-b} \end{aligned}$$

Se deixarmos b crescer sem limitação, então

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} (1 - e^{-b})$$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx = 1 \tag{1}$$

De (1) segue que, não importando quão grande seja o valor de b, a área da região mostrada na Figura 1 será sempre menor do que 1 unidade de área. ◀

A equação (1) estabelece que se $b > 0$, para todo $\epsilon > 0$ existe um $N > 0$ tal que

$$\text{se } b > N \text{ então } \left| \int_0^b e^{-x}\, dx - 1 \right| < \epsilon$$

Em lugar de (1) escrevemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$$

Em geral, temos a definição a seguir.

11.3.1 DEFINIÇÃO Se f for contínua para todo $x \geqslant a$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

se esse limite existir.

Se o extremo inferior da integração for infinito, temos a definição a seguir.

11.3.2 DEFINIÇÃO Se f for contínua para todo $x \geqslant b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

se esse limite existir.

Finalmente, temos o caso em que ambos os extremos de integração são infinitos.

11.3.3 DEFINIÇÃO Se f for contínua para todos os valores de x e c for um número real qualquer, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\, dx + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)\, dx \tag{2}$$

se esses limites existirem.

No Exercício 40 você deverá provar que se o limite existir, o segundo membro de (2) será independente da escolha de c. Nas aplicações da Definição 11.3.3 costumamos tomar c igual a 0.

Nas três definições anteriores, se os limites existirem, diremos que a integral imprópria é **convergente**. Se os limites não existirem, diremos que a integral imprópria é **divergente**.

EXEMPLO 1 Calcule a integral, se ela convergir:

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}\\ &= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{4-x}\right]_a^2\\ &= \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4-a}\right)\\ &= \tfrac{1}{2} - 0\\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

EXEMPLO 2 Calcule a integral, se ela convergir:

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\,dx$$

Solução

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} xe^{-x}\,dx$$

Para calcular a integral, usaremos integração por partes com $u = x$, $dv = e^{-x}dx$, $du = dx$ e $v = -e^{-x}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^b\\ &= \lim_{b\to+\infty} (-be^{-b} - e^{-b} + 1)\\ &= -\lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b} - 0 + 1 \,. \qquad (3)\end{aligned}$$

Para calcular $\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b}$, aplicamos a regra de L'Hôpital pois $\lim\limits_{b\to+\infty} b = +\infty$ e $\lim\limits_{b\to+\infty} e^b = +\infty$. Teremos

$$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b} &= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^b}\\ &= 0\end{aligned}$$

Logo, de (3),

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1$$

EXEMPLO 3 Calcule, se existirem:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ (b) $\lim\limits_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} x\,dx$

Solução

(a) Da Definição 11.3.3, com $c = 0$, temos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx &= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} x\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} x\,dx \\ &= \lim_{a \to -\infty} \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{a}^{0} + \lim_{b \to +\infty} \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{0}^{b} \\ &= \lim_{a \to -\infty} \left(-\tfrac{1}{2}a^2\right) + \lim_{b \to +\infty} \tfrac{1}{2}b^2\end{aligned}$$

Como nenhum dos dois limites existe, a integral imprópria diverge.

(b)
$$\begin{aligned}\lim_{r + \infty} \int_{-r}^{r} x\,dx &= \lim_{r \to +\infty} \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{-r}^{r} \\ &= \lim_{r \to +\infty} \left(\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{2}r^2\right) \\ &= \lim_{r \to +\infty} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

O Exemplo 3 ilustra por que não usamos o limite em (b) para determinar a convergência de uma integral imprópria quando ambos os extremos de integração são infinitos. Isto é, a integral imprópria em (a) é divergente, mas o limite em (b) existe e é 0.

EXEMPLO 4 Calcule a integral, se ela convergir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12} &= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2 + 3} + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{(x+3)^2 + 3} \\ &= \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x+3}{\sqrt{3}}\right]_{a}^{0} + \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x+3}{\sqrt{3}}\right]_{0}^{b} \\ &= \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{a+3}{\sqrt{3}}\right) + \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{b+3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{3}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\lim_{a \to -\infty} \left(-\operatorname{tg}^{-1} \frac{a+3}{\sqrt{3}}\right) + \lim_{b \to +\infty} \operatorname{tg}^{-1} \frac{b+3}{\sqrt{3}}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[-\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

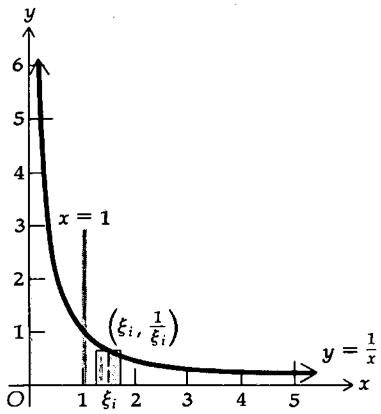


FIGURA 2

EXEMPLO 5 É possível indicar um número para representar a medida da área da região à direita da reta $x = 1$, abaixo do gráfico de $y = 1/x$, e acima do eixo x?

Solução A região está na Figura 2. Seja L o número que queremos atribuir à medida da área, se for possível. Seja A a medida da área da região limitada pelos gráficos das equações $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = b$, onde $b > 1$. Então

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i} \Delta_i x \\ &= \int_1^b \frac{1}{x}\, dx \end{aligned}$$

Assim, chamamos de $L = \lim_{b \to +\infty} A$ se esse limite existir. Mas

$$\begin{aligned} \lim_{b \to +\infty} A &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\, dx \\ &= \lim_{b \to +\infty} [\ln b - \ln 1] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Portanto, não é possível atribuir um número à medida da área da região.

EXEMPLO 6 É possível atribuir um número finito à medida do volume do sólido formado pela rotação em torno do eixo x, da região do Exemplo 5?

Solução O elemento de volume é um disco circular com espessura $\Delta_i x$ e raio da base $1/\xi_i$. Seja L o número que queremos atribuir à medida do volume e seja V a medida do volume do sólido formado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelos gráficos das equações $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = b$, onde $b > 1$. Então,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi \left(\frac{1}{\xi_i}\right)^2 \Delta_i x \\ &= \pi \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx \end{aligned}$$

Seja $L = \lim_{b \to +\infty} V$, se o limite existir.

$$\begin{aligned} \lim_{b \to +\infty} V &= \lim_{b \to +\infty} \pi \int_1^b \frac{dx}{x^2} \\ &= \pi \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b \\ &= \pi \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) \end{aligned}$$

Logo, atribuímos o valor π à medida do volume do sólido.

EXEMPLO 7 Determine se $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x \, dx$ é convergente ou divergente.

Solução

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x \, dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \lim_{b \to +\infty} \Big[-\cos x\Big]_0^b \\ &= \lim_{b \to +\infty} (-\cos b + 1)\end{aligned}$$

Para todo inteiro n, enquanto b assume todos os valores de $n\pi$ a $2n\pi$, cos b assume todos os valores desde -1 até 1. Logo, $\lim_{b \to +\infty} \cos b$ não existe. Assim sendo, a integral imprópria é divergente.

O Exemplo 7 ilustra o caso no qual a integral imprópria é divergente, porém o limite não é infinito.

Uma aplicação de integral imprópria com um extremo de integração infinito envolve o cálculo de probabilidades. A probabilidade de um evento particular ocorrer é um número no intervalo fechado [0, 1]. Se houver certeza de que um evento ocorrerá, então a probabilidade será 1; se o evento não ocorrer nunca, então sua probabilidade será 0. Quanto mais certeza tivermos de que um evento irá ocorrer, mais próxima de 1 será sua probabilidade.

Suponha que o conjunto de todos os resultados possíveis de uma determinada situação seja o conjunto de todos os números x num certo intervalo I. Por exemplo, x pode representar quantos minutos alguém espera até vagar um lugar em um determinado restaurante; quantas horas de vida útil tem um tubo de televisor ou a altura de uma pessoa em centímetros. É necessário, algumas vezes, determinar qual a probabilidade de x estar em algum subintervalo de I. Por exemplo, podemos querer determinar qual a probabilidade de que uma pessoa tenha de esperar de 20 a 30 min por uma mesa em um restaurante, ou a probabilidade de que um tubo de televisor dure mais de 2.000 h, ou ainda, a probabilidade de que alguém escolhido ao acaso tenha entre 1,60 e 1,80 cm de altura. Tais problemas envolvem o cálculo da integral de uma função chamada de *função densidade de probabilidade*. As funções densidade de probabilidade são obtidas de experiências estatísticas. Vamos apresentar uma breve discussão informal dessas funções aqui, para mostrar como aparecem as integrais impróprias.

Uma **função densidade de probabilidade** é uma função f cujo domínio é o conjunto R de números reais e que satisfazem as duas condições seguintes:

1. $f(x) \geqslant 0$ para todo x em R
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 1$

Vamos considerar aqui a *função densidade exponencial* definida por

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

onde $k > 0$. Para verificar se essa função qualifica-se como uma função densidade de probabilidade, vejamos se ela satisfaz as duas propriedades acima referidas.

1. Se $x < 0$, $f(x) = 0$; se $x \geqslant 0$, $f(x) = ke^{-kx}$, e como $k > 0$, $ke^{-kx} > 0$.

2. $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} ke^{-kx}\,dx\\ &= 0 + \lim_{b\to+\infty}\left[-\int_0^b e^{-kx}(-k\,dx)\right]\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-kx}\right]_0^b\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-kb}+1\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

Se f for uma função densidade de probabilidade de ocorrência de determinado evento, então a **probabilidade de que o evento irá ocorrer no intervalo fechado [a, b]** será denotada por $P([a, b])$ e

$$P([a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx$$

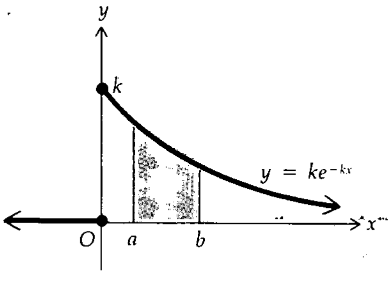


FIGURA 3

A Figura 3 mostra um esboço do gráfico da função densidade exponencial. Como $\int_0^{+\infty} ke^{-kx}\,dx = 1$, a medida da área da região limitada por $y = ke^{-kx}$, pelo eixo x e pelo eixo y é 1. A medida da área da região sombreada na figura é $P([a, b])$.

EXEMPLO 8 Para determinado tipo de bateria elétrica, a função densidade de probabilidade de que x horas seja o tempo de vida útil de uma bateria escolhida ao acaso é dada por

$$f(x) = \begin{cases}\frac{1}{60}e^{-x/60} & \text{se } x \geqslant 0\\ 0 & \text{se } x < 0\end{cases} \qquad (5)$$

Ache a probabilidade de que uma bateria escolhida ao acaso tenha um tempo de vida (a) entre 15 e 25 h e (b) pelo menos 50 h.

Solução A função definida por (5) é da forma de (4) com $k = \frac{1}{60}$. (a) A probabilidade de que o tempo de vida de uma bateria escolhida ao acaso esteja entre 15 e 25 h é $P([15, 25])$, e (b) a probabilidade de que o tempo de vida seja pelo menos 50 h é $P([50, +\infty])$.

(a) $$\begin{aligned}P([15,25]) &= \int_{15}^{25} \tfrac{1}{60}e^{-x/60}\,dx\\ &= -\int_{15}^{25} e^{-x/60}\left(-\tfrac{1}{60}dx\right)\\ &= -e^{-x/60}\Big]_{15}^{25}\\ &= -e^{-25/60} + e^{-15/60}\\ &= -e^{-0{,}417} + e^{-0{,}250}\\ &= -0{,}659 + 0{,}779\\ &= 0{,}120\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b) } P([50, +\infty)) &= \lim_{b\to+\infty} \int_{50}^{b} \tfrac{1}{60}e^{-x/60}\,dx\\ &= \lim_{b\to+\infty} \Big[-e^{-x/60}\Big]_{50}^{b}\\ &= \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-b/60} + e^{-50/60}\right)\\ &= 0 + e^{-0{,}833}\\ &= 0{,}435\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 11.3

Nos Exercícios de 1 a 18, determine se a integral imprópria é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule-a.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

2. $\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx$

3. $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx$

4. $\int_1^{+\infty} 2^{-x}\,dx$

5. $\int_0^{+\infty} x2^{-x}\,dx$

6. $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

7. $\int_{-\infty}^{+\infty} x\cosh x\,dx$

8. $\int_{-\infty}^{0} x^2e^x\,dx$

9. $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x\,dx}{(3x^2+2)^3}$

11. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{3\,dx}{x^2+9}$

12. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

13. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$

14. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$

15. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{16+x^2}$

17. $\int_1^{+\infty} \ln x\,dx$

18. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$

19. Calcule, se existir:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx$ (b) $\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} \operatorname{sen} x\,dx$

20. Prove que se $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ for convergente, então $\int_{-b}^{+\infty} f(-x)dx$ também será convergente e terá o mesmo valor.

21. Mostre que a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-2}\,dx$ é convergente e a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-1}\,dx$ é divergente.

22. Prove que a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ será convergente se e somente se $n > 1$.

23. Determine se é possível atribuir um número finito para representar a área da região limitada pela curva cuja equação é $y = 1/(e^x + e^{-x})$ e pelo eixo x. Caso seja possível, determine-o.

24. Determine se é possível atribuir um número finito para representar a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é $y = 1/(x^2 - 1)$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$. Caso seja possível, determine-o.

25. Determine se é possível atribuir um número finito para representar a medida do volume do sólido formado pela rotação, em torno do eixo x, da região à direita da reta $x = 1$ e limitada pela curva cuja equação é $y = 1/x^{3/2}$ e pelo eixo x. Caso seja possível, determine-o.

26. Determine se é possível atribuir um número finito para representar a medida do volume do sólido formado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo eixo x, pelo eixo y e pela curva cuja equação é $y = e^{-2x}$. Caso seja possível, determine-o.

27. Para a bateria do Exemplo 8, ache a probabilidade de que uma bateria escolhida ao acaso tenha um tempo de vida de (a) não mais do que 50 h e (b) pelo menos 75 h.

28. Para um certo tipo de lâmpada, a função densidade de probabilidade de que x horas seja o tempo de vida útil de seu bulbo, escolhido ao acaso, é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40}e^{-x/40} & \text{se } x \geqslant 0\\ 0 & \text{se } x < 0\end{cases}$$

Ache a probabilidade de que o tempo de vida útil de um bulbo escolhido ao acaso: (a) esteja entre 40 e 60 h, e (b) seja de pelo menos 60 h.

29. Em uma certa cidade, a função densidade de probabilidade de que x min seja a duração de uma chamada telefônica escolhida ao acaso, é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x/3} & \text{se } x \geqslant 0\\ 0 & \text{se } x < 0\end{cases}$$

Ache a probabilidade de que uma chamada telefônica escolhida ao acaso dure: (a) entre 1 min e 2 min e (b) pelo menos 5 min.

30. Para um determinado aparelho, a função densidade de probabilidade de que ele irá precisar de manutenção x meses após sua compra é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}02e^{-0{,}02x} & \text{se } x \geqslant 0\\ 0 & \text{se } x < 0\end{cases}$$

Se o aparelho tiver um ano de garantia, qual será a probabilidade de que um comprador escolhido ao acaso não precise consertar seu aparelho durante o prazo de garantia?

31. Se f for uma função densidade de probabilidade, então a *média* (ou *valor médio*) das probabilidades será dada por $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$. Ache a média das probabilidades obtidas da função de densidade exponencial (4).

32. Uma função densidade de probabilidade *uniforme* é definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < c \\ \dfrac{1}{d-c} & \text{se } c \leqslant x \leqslant d \\ 0 & \text{se } d < x \end{cases}$$

Mostre que essa função satisfaz as condições necessárias para que possamos classificá-la como uma função densidade de probabilidade.

Os Exercícios de 33 a 36 mostram aplicações de integrais impróprias no campo da Economia. Suponha que exista um fluxo contínuo de rendimento para o qual os juros sejam compostos continuamente a uma taxa anual 100i% e seja $f(t)$ o rendimento em t anos. Se o rendimento continuar indefinidamente, o valor atual V, de toda a renda futura, será definido por

$$V = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-it}\,dt$$

33. Um fluxo contínuo de renda decresce com o tempo e em t anos o rendimento é $1.000 \cdot 2^{-t}$. Ache o valor atual dessa renda, se for usada permanentemente, uma taxa anual de juros de 8%, compostos continuamente.

34. Suponha que o dono de um imóvel comercial receba um aluguel permanente pela propriedade, pago indefinidamente. Se o aluguel anual for de \$ 12.000 e o dinheiro render 10% ao ano, compostos continuamente, ache o valor atual de todos os pagamentos futuros.

35. O bônus do Governo Britânico é uma apólice que rende ao portador apenas um pagamento anual. Sendo R o valor atual de um fluxo de pagamentos anuais e usando a taxa de juros correntes anuais de $100i\%$, compostos continuamente, mostre que um preço satisfatório para a venda de um desses bônus é R/i.

36. O fluxo contínuo de lucros de uma empresa é crescente no tempo e em t anos o montante do lucro é proporcional a t. Mostre que o valor atual da empresa é inversamente proporcional a i^2, onde $100i\%$ é a taxa de juros compostos continuamente.

37. Determine os valores de n para os quais a seguinte integral imprópria é convergente: $\int_e^{+\infty} \dfrac{dx}{x(\ln x)^n}$.

38. Determine um valor de n para o qual a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \left(\dfrac{n}{x+1} - \dfrac{3x}{2x^2+n}\right)dx$ é convergente e calcule a integral para esse valor de n.

39. Determine um valor de n para o qual a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \left(\dfrac{nx^2}{x^3+1} - \dfrac{1}{3x+1}\right)dx$ é convergente e calcule a integral para esse valor de n.

40. Suponha que f seja contínua para todos os valores de x. Prove que se

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\,dx = L \quad \text{e} \quad \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)\,dx = M$$

então, sendo d um número real qualquer,

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^d f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_d^b f(x)\,dx = L + M$$

Sugestão: $\int_a^d f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$

$\int_d^b f(x)\,dx = \int_d^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

11.4 OUTRAS INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

A Figura 1 mostra a região limitada pela curva cuja equação é $y = 1/\sqrt{x}$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = 4$. Se for possível ter um número que represente a medida da área dessa região, ele será obtido por

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\xi_i}} \Delta_i x$$

Se esse limite existir, ele será a integral definida denotada por

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} \tag{1}$$

Entretanto, o integrando é descontínuo no extremo inferior zero. Além disso, $\lim_{x \to 0^+} 1/\sqrt{x} = +\infty$, assim dizemos que o integrando tem uma descontinuidade infinita no extremo inferior. Essa integral é imprópria e sua existência pode ser determinada através da definição dada a seguir.

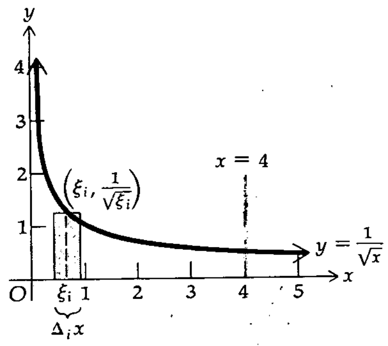


FIGURA 1

11.4.1 DEFINIÇÃO Se f for contínua para todo x no intervalo semi-aberto à esquerda $(a, b]$, e se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

se esse limite existir.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos determinar se é possível representar por um número a medida da área da região mostrada na Figura 1. Da discussão que precedeu a Definição 11.4.1, a medida da área da região dada será uma integral imprópria (1), se ela existir. Pela Definição 11.4.1,

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{t \to 0^+} \int_t^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}\\ &= \lim_{t \to 0^+} 2x^{1/2}\Big]_t^4\\ &= \lim_{t \to 0^+} (4 - 2\sqrt{t})\\ &= 4 - 0\\ &= 4\end{aligned}$$

Logo, 4 será a medida da área da região dada. ◀

Se o integrando tiver uma descontinuidade infinita no extremo superior da integração, usaremos a seguinte definição para determinar a existência da integral imprópria.

11.4.2 DEFINIÇÃO Se f for contínua em todos os x no intervalo semi-aberto à direita $[a, b)$ e se $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

se esse limite existir.

Se existir uma descontinuidade infinita num ponto interior ao intervalo de integração, a existência da integral imprópria será determinada a partir da definição a seguir.

11.4.3 DEFINIÇÃO Se f for contínua em todos os valores de x no intervalo $[a, b]$ exceto c, onde $a < c < b$ e se $\lim\limits_{x \to c} |f(x)| = +\infty$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{s \to c^+} \int_s^b f(x)\,dx$$

se esses limites existirem.

Se $\int_a^b f(x)\,dx$ for uma integral imprópria, ela será convergente se o limite correspondente existir; caso contrário ela será divergente.

EXEMPLO 1 Calcule a integral, se ela for convergente:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Solução O integrando tem uma descontinuidade infinita em 1. Aplicando a Definição 11.4.3, temos

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{s\to 1^+} \int_s^2 \frac{dx}{(x-1)^2}\\ &= \lim_{t\to 1^-} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^t + \lim_{s\to 1^+} \left[-\frac{1}{x-1}\right]_s^2\\ &= \lim_{t\to 1^-} \left[-\frac{1}{t-1} - 1\right] + \lim_{s\to 1^+} \left[-1 + \frac{1}{s-1}\right]\end{aligned}$$

Como nenhum desses limites existe, a integral imprópria é divergente.

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Suponha que, ao calcular a integral do Exemplo 1, passou despercebida a descontinuidade infinita do integrando em 1. Teríamos obtido

$$\begin{aligned}-\frac{1}{x-1}\bigg]_0^2 &= -\frac{1}{1} + \frac{1}{-1}\\ &= -2\end{aligned}$$

Esse resultado é, obviamente, incorreto. Como $1/(x-1)^2$ nunca é negativo, a integral de 0 a 2 não poderia ser um número negativo. ◀

EXEMPLO 2 Calcule a integral, se ela for convergente:

$$\int_0^1 x \ln x \, dx$$

Solução O integrando tem uma descontinuidade no extremo inferior. Da Definição 11.4.1,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \ln x \, dx &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 x \ln x \, dx\\ &= \lim_{t\to 0^+} \left[\tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2\right]_t^1\\ &= \lim_{t\to 0^+} \left[\tfrac{1}{2}\ln 1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}t^2 \ln t + \tfrac{1}{4}t^2\right]\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = 0 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} \lim_{t\to 0^+} t^2 \ln t + 0 \tag{2}$$

Para calcular

$$\lim_{t\to 0^+} t^2 \ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t^2}}$$

aplicamos a regra de L'Hôpital, pois $\lim_{t \to 0^+} \ln t = -\infty$ e $\lim_{t \to 0^+} 1/t^2 = +\infty$. Temos

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t^2}} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \left[-\frac{t^2}{2}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

Logo, de (2)

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = -\tfrac{1}{4}$$

EXEMPLO 3 Calcule a integral, se ela for convergente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Solução Nessa integral, temos tanto um extremo superior infinito quanto uma descontinuidade infinita do integrando no extremo inferior. Procedemos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{t \to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{t \to 1^+} \Big[\sec^{-1} x\Big]_t^2 + \lim_{b \to +\infty} \Big[\sec^{-1} x\Big]_2^b \\ &= \lim_{t \to 1^+} (\sec^{-1} 2 - \sec^{-1} t) + \lim_{b \to +\infty} (\sec^{-1} b - \sec^{-1} 2) \\ &= \tfrac{1}{3}\pi - \lim_{t \to 1^+} \sec^{-1} t + \lim_{b \to +\infty} \sec^{-1} b - \tfrac{1}{3}\pi \\ &= -0 + \tfrac{1}{2}\pi \\ &= \tfrac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

A integral do Exemplo 3 é chamada de *integral imprópria de tipo misto.*

EXERCÍCIOS 11.4

Nos Exercícios de 1 a 25, determine se a integral imprópria é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule-a.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$
2. $\int_0^{16} \frac{dx}{x^{3/4}}$
3. $\int_{-5}^{-3} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-9}}$
4. $\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$
5. $\int_2^4 \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}}$
6. $\int_{-4}^1 \frac{dz}{(z+3)^3}$
7. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec\theta\,d\theta$
8. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$
10. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}\theta\,d\theta$
11. $\int_0^{\pi/2} \frac{dy}{1-\operatorname{sen} y}$
12. $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$
13. $\int_0^4 \frac{dx}{x^2-2x-3}$
14. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$
15. $\int_0^{+\infty} \ln x\,dx$
16. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
17. $\int_{-2}^0 \frac{dw}{(w+1)^{1/3}}$
18. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$
19. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^3}$
20. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
21. $\int_{1/2}^2 \frac{dz}{z(\ln z)^{1/5}}$

22. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{1-x}$ 23. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 24. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$

25. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dy}{\sqrt[3]{y-2}}$

26. Calcule, se existir: (a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$; (b) $\displaystyle\lim_{r\to 0^+}\left[\int_{-1}^{-r}\frac{dx}{x}+\int_r^1\frac{dx}{x}\right]$.

Nos Exercícios de 27 a 29, ache os valores de n para os quais a integral imprópria converge e para esses valores calcule a integral.

27. $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx$ 28. $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x\,dx$ 29. $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln^2 x\,dx$

30. Mostre que é possível representar por um número a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é $y = 1/\sqrt{x}$, pela reta $x = 1$ e pelos eixos x e y; mas que não é possível representar por um número finito o volume do sólido obtido pela rotação da região em torno do eixo x.

31. Determine se é possível representar por um número a medida do volume do sólido formado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela curva cuja equação é $y = x^{-1/3}$, pela reta $x = 8$ e pelos eixos x e y.

32. Dada a integral imprópria $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ onde $b > a$, determine se a integral é convergente ou divergente em cada um dos casos: (a) $0 < n < 1$; (b) $n = 1$; (c) $n > 1$. Se a integral for convergente, calcule-a.

33. Use integração para provar que a circunferência do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ é $2\pi a$.

11.5 A FÓRMULA DE TAYLOR

Os valores de uma função polinomial podem ser encontrados através de um número finito de adições e multiplicações. Por outro lado, existem outras funções, tais como a logarítmica, a exponencial e as funções trigonométricas, que não podem ser calculadas tão facilmente. Vamos mostrar nesta secção que muitas funções podem ser aproximadas por polinômios e que os polinômios, em vez da função original, podem ser usados para cálculos, quando a diferença entre o valor da função em um ponto e o da aproximação polinomial for suficientemente pequena.

Existem vários métodos para aproximar uma função dada por polinômios. Um dos mais usados é o que envolve a **fórmula de Taylor**, assim chamada em homenagem ao matemático inglês Brook Taylor (1685-1731). O teorema a seguir, que pode ser considerado como uma generalização do teorema do valor médio (4.3.2), estabelece a fórmula de Taylor.

11.5.1 TEOREMA

Seja f uma função tal que f e suas n primeiras derivadas são contínuas no intervalo fechado $[a, b]$. Além disso, $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo x no intervalo aberto (a, b). Então, existe um número ξ no intervalo aberto (a, b) tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \quad (1)$$

A fórmula (1) também é válida se $b < a$; neste caso, $[a, b]$ é substituído por $[b, a]$ e (a, b) por (b, a).

Note que se $n = 0$, (1) torna-se

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

onde ξ está entre a e b. Esse resultado é o teorema do valor médio.

Adiaremos a prova do Teorema 11.5.1, que será dada ainda nesta secção.

Se em (1) b for substituído por x, obteremos a fórmula de Taylor. Ela é

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}} \qquad (2)$$

onde ξ está entre a e x.

A condição sob a qual (2) é válida é que f e suas n primeiras derivadas devem ser contínuas num intervalo fechado contendo a e x, e a $(n + 1)$-ésima derivada de f deve existir em todos os pontos do intervalo aberto correspondente. A fórmula (2) pode ser escrita

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad (3)$$

onde

$$\boxed{P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n} \qquad (4)$$

e

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{onde } \xi \text{ está entre } a \text{ e } x} \qquad (5)$$

$P_n(x)$ é chamado **polinômio de Taylor** de enésimo grau da função f no número a e $R_n(x)$ é chamado de *resto*. O termo $R_n(x)$, conforme dado em (5), é chamado de resto *na forma de Lagrange*, em homenagem ao matemático francês Joseph L. Lagrange (1736-1813).

O caso especial da fórmula de Taylor, obtida tomando $a = 0$ em (2) é

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}}$$

onde ξ está entre 0 e x. Essa fórmula é chamada de **fórmula de Maclaurin** em homenagem ao matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746). Entretanto, a fórmula foi obtida antes por Taylor e por outro matemático britânico, James Stirling (1692-1770). O **polinômio de Maclaurin** de enésimo grau para uma função f, obtida de (4) com $a = 0$, é

$$\boxed{P_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n} \qquad (6)$$

Podemos aproximar uma função através de um polinômio de Taylor em um número a ou por um polinômio de Maclaurin.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos calcular o polinômio de Maclaurin do enésimo grau para a função exponencial natural. Se $f(x) = e^x$, todas as derivadas de f em x são e^x e as derivadas em 0 são iguais a 1. Logo, de (6)

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \qquad (7)$$

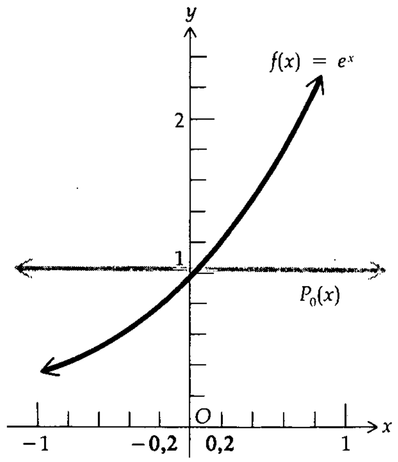


FIGURA 1

Assim, os quatro primeiros polinômios de Maclaurin da função exponencial natural são

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2$$

$$P_3(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3$$

Nas Figuras de 1 a 4 o gráfico de $f(x) = e^x$ aparece junto com os gráficos de $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$, respectivamente. Na Figura 5 os gráficos dos quatro polinômios de Maclaurin e o gráfico de $f(x) = e^x$ estão no mesmo sistema de coordenadas. Observe como os polinômios aproximam e^x para valores de x próximos de zero e note que à medida que n cresce, a aproximação melhora. As Tabelas 1 e 2 dão valores de e^x, $P_n(x)$ (quando n é 0, 1, 2 e 3) e $e^x - P_n(x)$ para $x = 0{,}4$ e $x = 0{,}2$, respectivamente. A partir desses dois valores de x podemos imaginar que quanto mais próximos de zero estiverem os valores de x, melhor será a aproximação para um dado $P_n(x)$. ◀

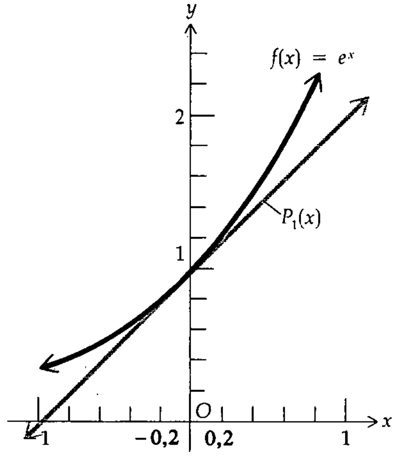


FIGURA 2

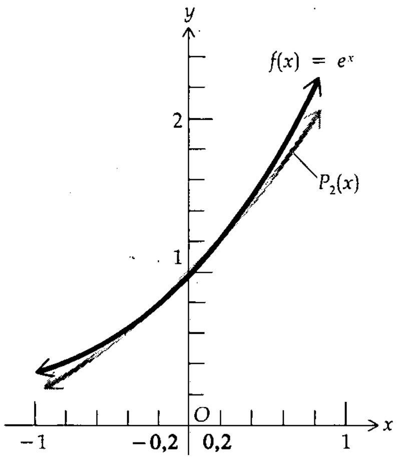


FIGURA 3

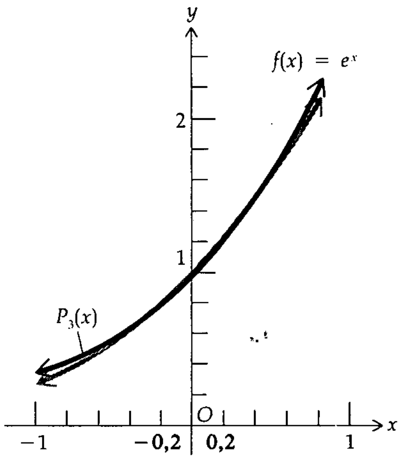


FIGURA 4

Tabela 1

n	$e^{0,4}$	$P_n(0,4)$	$e^{0,4} - P_n(0,4)$
0	1,4918	1	0,4918
1	1,4918	1,4	0,0918
2	1,4918	1,48	0,0118
3	1,4918	1,4907	0,0011

Tabela 2

n	$e^{0,2}$	$P_n(0,2)$	$e^{0,2} - P_n(0,2)$
0	1,2214	1	0,2214
1	1,2214	1,2	0,0214
2	1,2214	1,22	0,0014
3	1,2214	1,2213	0,0001

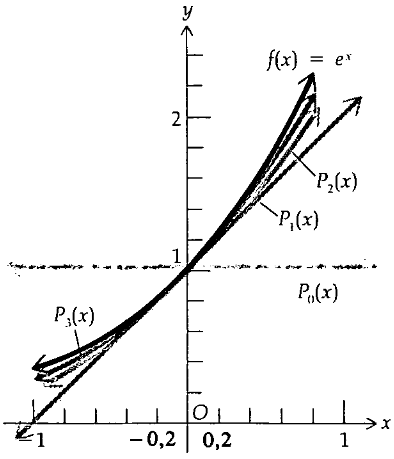


FIGURA 5

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos determinar agora o polinômio de Maclaurin de enésimo grau para a função seno. Se $f(x) = \text{sen } x$, então

$$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\text{sen } x \qquad f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(\text{iv})}(x) = \text{sen } x \qquad f^{(\text{v})}(x) = \cos x \qquad f^{(\text{vi})}(x) = -\text{sen } x$$

e assim por diante. Assim $f(0) = 0$,

$$f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = -1 \qquad f^{(\text{iv})}(0) = 0 \qquad f^{(\text{v})}(0) = 1$$

e assim por diante. De (6),

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Então $P_0(x) = 0$,

$$P_1(x) = x \qquad P_2(x) = x$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6} \qquad P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \qquad P_6(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$P_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5.040} \qquad P_8(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5.040}$$

e assim por diante.

A Figura 6 mostra o gráfico da função seno, bem como os gráficos de seus polinômios de Maclaurin de graus 1, 3, 5 e 7. Note que as aproximações polinomiais são melhores à medida que n cresce. ◀

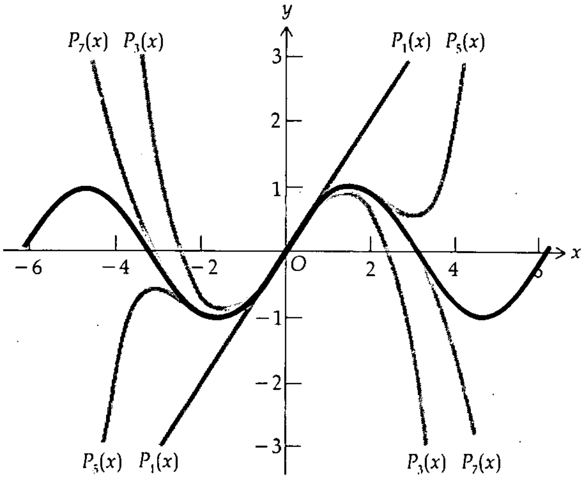


FIGURA 6

EXEMPLO 1 Ache o polinômio de Taylor de terceiro grau da função co-seno em $\frac{\pi}{4}$ e o resto na forma de Lagrange.

Solução Seja $f(x) = \cos x$. Então de (4),

$$P_3(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''(\frac{1}{4}\pi)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f'''(\frac{1}{4}\pi)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$

Como $f(x) = \cos x$, $f(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $f''(x) = -\cos x$, $f''(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, $f'''(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Logo,

$$P_3(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi) - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi)^2 + \tfrac{1}{12}\sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi)^3$$

Como $f^{(iv)}(x) = \cos x$, de (5) obtemos

$$R_3(x) = \tfrac{1}{24}(\cos \xi)(x - \tfrac{1}{4}\pi)^4 \qquad \text{onde } \xi \text{ está entre } \tfrac{1}{4}\pi \text{ e } x$$

Como $|\cos \xi| \leqslant 1$, podemos concluir que para todo x, $|R_3(x)| \leqslant \frac{1}{24}(x - \frac{1}{4}\pi)^4$.

De (3),

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \tag{8}$$

Se $P_n(x)$ for usado para aproximar $f(x)$, diremos que temos uma limitação superior para o erro dessa aproximação, se pudermos achar um número $E > 0$ tal que $|R_n(x)| \leqslant E$ ou, de (8), tal que $|f(x) - P_n(x)| \leqslant E$ ou, analogamente,

$$P_n(x) - E \leqslant f(x) \leqslant P_n(x) + E$$

EXEMPLO 2 Use o resultado do Exemplo 1 para calcular um valor aproximado de cos 47° e determine a precisão do resultado.

Solução $47° \sim \frac{47}{180}\pi$ rad. Assim, na solução do Exemplo 1, seja $x = \frac{47}{180}\pi$ e $x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{90}\pi$ e

$$\cos 47° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}[1 - \tfrac{1}{90}\pi - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{90}\pi)^2 + \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{90}\pi)^3] + R_3(\tfrac{47}{180}\pi)$$

onde

$$R_3(\tfrac{47}{180}\pi) = \tfrac{1}{24}\cos \xi(\tfrac{1}{90}\pi)^4 \quad \text{com} \quad \tfrac{1}{4}\pi < \xi < \tfrac{47}{180}\pi$$

Como $0 < \cos \xi < 1$,

$$0 < R_3(\tfrac{47}{180}\pi) < \tfrac{1}{24}(\tfrac{1}{90}\pi)^4 < 0{,}00000007$$

Sendo $\frac{1}{90}\pi \approx 0{,}0349066$, obtemos

$$\cos 47° \approx 0{,}681998$$

que é exato até a sexta casa decimal.

EXEMPLO 3 Use um polinômio de Maclaurin para encontrar um valor de $\sqrt{e}$, exato até a quarta casa decimal.

Solução Se $f(x) = e^x$, então de (7), o polinômio de Maclaurin do enésimo grau de $f(x)$ será

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

e de (5),

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{onde } \xi \text{ está entre 0 e } x$$

Queremos $|R_n(\frac{1}{2})|$ menor do que 0,00005. Na fórmula acima, seja $x = \frac{1}{2}$, e como $e^{1/2} < 2$, temos

$$|R_n(\tfrac{1}{2})| < \frac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{2^n(n+1)!}$$

$|R_n(\frac{1}{2})|$ será menor do que 0,00005 se $1/2^n(n+1)! < 0{,}00005$. Quando $n = 5$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n(n+1)!} &= \frac{1}{(32)(720)}\\ &= 0{,}00004\end{aligned}$$

Como $0{,}00004 < 0{,}00005$, tomamos $P_5(\frac{1}{2})$ como a aproximação de $\sqrt{e}$ exata até a quarta casa decimal. Como

$$P_5(\tfrac{1}{2}) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{48} + \tfrac{1}{384} + \tfrac{1}{3840}$$

obtemos $\sqrt{e} \approx 1{,}6487$.

Agora provaremos o Teorema 11.5.1. Há várias provas conhecidas desse teorema, embora nenhuma delas seja bem argumentada. A demonstração a seguir faz uso do teorema do valor médio de Cauchy (11.1.3).

Prova do Teorema 11.5.1 Sejam F e G duas funções definidas por

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n \qquad (9)$$

e

$$G(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (10)$$

Segue que $F(b) = 0$ e $G(b) = 0$. Derivando (9), obtemos

$$\begin{aligned}F'(x) = {} & -f'(x) + f'(x) - f''(x)(b-x) + \frac{2f''(x)(b-x)}{2!}\\ & - \frac{f'''(x)(b-x)^2}{2!} + \frac{3f'''(x)(b-x)^2}{3!} - \frac{f^{(iv)}(x)(b-x)^3}{3!} + \ldots\\ & + \frac{(n-1)f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2}}{(n-1)!} - \frac{f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\\ & + \frac{nf^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!}\end{aligned}$$

Combinando os termos, vemos que a soma dos termos de ordem ímpar com os termos seguintes de ordem par é zero; assim sendo, resta somente o último termo. Logo

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \qquad (11)$$

Derivando (10), obtemos

$$G'(x) = -\frac{1}{n!}(b - x)^n \tag{12}$$

Testanto as hipóteses do Teorema 11.1.3, vemos que

(i) F e G são contínuas em $[a, b]$;
(ii) F e G são deriváveis em (a, b);
(iii) para todo x em (a, b), $G'(x) \neq 0$.

Assim, pelo Teorema 11.1.3,

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

onde ξ está em (a, b). Mas $F(b) = 0$ e $G(b) = 0$. Então,

$$F(a) = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} G(a) \tag{13}$$

para algum ξ em (a, b).

Fazendo $x = a$ em (10), $x = \xi$ em (11) e $x = \xi$ em (12) e, substituindo em (13), obtemos

$$F(a) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b - \xi)^n \left[-\frac{n!}{(b - \xi)^n} \right] \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

$$F(a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1} \tag{14}$$

Se $x = a$ em (9), obtemos

$$F(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b - a) - \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n - 1)!}(b - a)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n$$

Substituindo (14) na relação acima, teremos

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}$$

que é o resultado desejado. O teorema é válido se $b < a$, pois a conclusão do Teorema 11.1.3 não depende da posição relativa de a e b. ■

Existem outras formas de apresentar o resto da fórmula de Taylor. Dependendo da função, uma forma pode ser preferível a outra. O teorema a seguir apresenta o resto como uma integral e é conhecido como *forma integral do resto da fórmula de Taylor.*

11.5.2 TEOREMA

Se f for uma função cujas $n + 1$ primeiras derivadas são contínuas em um intervalo fechado contendo a e x, então $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, onde $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em a e $R_n(x)$ é o resto dado por

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

A demonstração desse teorema será deixada como exercício (veja o Exercício 30).

EXERCÍCIOS 11.5

Nos Exercícios de 1 a 14, ache o polinômio de Taylor do enésimo grau com resto de Lagrange no número a para a função definida pela equação dada.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $a = 1$; $n = 3$

2. $f(x) = e^{-x}$; $a = 0$; $n = 4$

3. $f(x) = x^{3/2}$; $a = 4$; $n = 3$

4. $f(x) = \text{tg } x$; $a = 0$; $n = 3$

5. $f(x) = \text{sen } x$; $a = \frac{1}{6}\pi$; $n = 3$

6. $f(x) = \cosh x$; $a = 0$; $n = 4$

7. $f(x) = \text{senh } x$; $a = 0$; $n = 4$

8. $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 4$; $n = 4$

9. $f(x) = \ln x$; $a = 1$; $n = 3$

10. $f(x) = \ln(x + 2)$; $a = -1$; $n = 3$

11. $f(x) = \ln \cos x$; $a = \frac{1}{3}\pi$; $n = 3$

12. $f(x) = e^{-x^2}$; $a = 0$; $n = 3$

13. $f(x) = (1 + x)^{3/2}$; $a = 0$; $n = 3$

14. $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$; $a = 0$; $n = 3$

15. Calcule o valor de e exato até a quinta casa decimal e prove que sua resposta tem a precisão pedida.

16. Use o polinômio de Taylor do Exercício 8 para calcular $\sqrt{5}$ com precisão até a casa decimal que justifique desprezar R_4.

17. Estime o erro que se comete quando $\cos x$ é substituído por $1 - \frac{1}{2}x^2$ se $|x| < 0{,}1$.

18. Estime o erro que se comete quando $\sqrt{1 + x}$ é substituído por $1 + \frac{1}{2}x$ se $0 < x < 0{,}01$.

19. Calcule sen 31° com precisão de três casas decimais, usando o polinômio de Taylor do Exercício 5 em $\frac{\pi}{6}$. (Use a aproximação $\frac{1}{180}\pi \approx 0{,}0175$.)

20. Use o polinômio de Maclaurin para a função definida por $f(x) = \ln(1 + x)$, para calcular o valor de ln 1,2 com quatro casas decimais de precisão.

21. Use o polinômio de Maclaurin para a função definida por

$$f(x) = \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

para calcular o valor de ln 1,2 com precisão até a quarta casa decimal. Compare o resultado com o do Exercício 20.

22. Mostre que se $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$,

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + R(x)$$

onde $|R(x)| < \frac{1}{3.840}$.

23. Use o resultado do Exercício 22 para encontrar um valor aproximado de $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \text{sen } x^2\, dx$ e estime o erro.

24. Mostre que a fórmula $(1 + x)^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2}x$ é precisa até a terceira casa decimal se $-0{,}03 \leqslant x \leqslant 0$.

25. Mostre que a fórmula $(1 + x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ é precisa até a segunda casa decimal se $-0{,}1 \leqslant x \leqslant 0$.

26. Faça esboços dos gráficos de $y = \text{sen } x$ e $y = mx$ no mesmo conjunto de eixos. Note que se m for positivo e próximo de zero, então os gráficos interceptam-se num ponto cuja abscissa é próxima de π. Seja $f(x) = \text{sen } x - mx$. Usando o polinômio de Taylor do segundo grau de f em π mostre que uma solução aproximada da equação sen $x = mx$, quando m é positivo e próximo de zero, é dada por $x \approx \pi/(1 + m)$.

27. Use o método descrito no Exercício 26 para encontrar uma solução aproximada da equação cotg $x = mx$ quando m é positivo e próximo de zero.

28. (a) Use o polinômio de Maclaurin do primeiro grau para aproximar e^k se $0 < k < 0{,}01$. (b) Estime o erro em termos de k.

29. Aplique a fórmula de Taylor para expressar o polinômio $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^3 - 3x + 1$ como um polinômio em potências de $(x - 1)$.

30. Prove o Teorema 11.5.2.

(*Sugestão*: seja $\displaystyle\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$. Resolva em $f(x)$ e integre $\displaystyle\int_a^x f'(t)dt$ por partes fazendo $u = f'(t)$ e $dv = dt$. Repita esse processo e o resultado desejado segue por indução matemática.)

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 11

Nos Exercícios de 1 a 18, calcule o limite, se existir.

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{tgh } 2x}{\text{senh}^2 x}$

2. $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{1}{1 - \text{sen } x} - \frac{2}{\cos^2 x}\right)$

3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} (\text{cosec}^2 x - x^{-2})$

4. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e - (1 + x)^{1/x}}{x}$

5. $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(1 + e^{2t}/t)}{t^{1/2}}$

6. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \ln \frac{x + 1}{x - 1}$

7. $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} (\text{sen}^2 x)^{\text{tg } x}$

8. $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{t^{100}}{e^t}$

9. $\displaystyle\lim_{y \to 0} \frac{\text{sen } 2y}{y - \text{sen } 5y}$

10. $\displaystyle\lim_{z \to \pi/2^-} \frac{z \cos 3z}{\cos^2 z}$

11. $\displaystyle\lim_{t \to 0^-} (1 + 4t)^{3/t}$

12. $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} (1 + e^{2y})^{-2/y}$

13. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln(x - \ln x)}$

14. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{tg}^{-1} x}{4x^3}$

15. $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi/2} \frac{\text{tg } \theta + 3}{\sec \theta - 1}$

16. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)^{1/x}$

17. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (e^x - x)^{1/x}$

18. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\text{tg } x}$

Nos Exercícios de 19 a 32, determine se a integral imprópria é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule-a.

19. $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{dx}{2x+3}$

20. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x-2)^2}$

22. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$

23. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{cotg}^2 \theta \, d\theta$

24. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^4+t^2}$

25. $\displaystyle\int_{-\infty}^{3} 4^x \, dx$

26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x \, dx$

27. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx$

28. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{3^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

29. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

30. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{x} \, dx$

31. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x+x^3}$

32. $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

33. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{2x}}{2x} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Prove que f é contínua em 0, usando a Definição 2.6.1. (b) Prove que f é diferenciável em 0 calculando $f'(0)$.

34. Dada a função f do Exercício 33, ache, se existir: (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

35. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) f é contínua em 0? (b) Ache $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, se existir.

36. Se a reta normal à curva $y = \ln x$ no ponto $(x_1, \ln x_1)$ intercepta o eixo x no ponto cuja abscissa é a, prove que $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} (a - x_1) = 0$.

37. Calcule, se existirem:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{senh} x \, dx$ (b) $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \operatorname{senh} x \, dx$

38. (a) Prove que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^n/e^x) = 0$ para todo n inteiro positivo. (b) Ache $\lim\limits_{x \to 0} (e^{-1/x}/x^n)$, onde $x > 0$ e n é qualquer inteiro positivo, fazendo $x = 1/t$ e usando o resultado da parte (a).

Nos Exercícios de 39 a 41, ache o polinômio de Taylor de grau n com resto de Lagrange em um número a para a função definida pela equação dada.

39. $f(x) = \cos x$; $a = 0$; $n = 6$

40. $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$; $a = 1$; $n = 3$

41. $f(x) = x^{-1/2}$; $a = 9$; $n = 4$

42. Expresse e^{x^2} e $\cos x$ como polinômios de Maclaurin de grau 4 e use-os para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^4}$$

43. Calcule o limite do Exercício 42 usando a regra de L'Hôpital.

44. Aplique a fórmula de Taylor para expressar o polinômio

$$P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$$

como um polinômio em potências de $x + 2$.

45. Determine se é possível representar por um número a medida da área da região à direita do eixo y, limitada pela curva $4y^2 - xy^2 - x^2 = 0$ e sua assíntota. Sendo possível, calcule-o.

46. Determine se é possível representar por um número a medida da área da região limitada pela curva cuja equação é $2xy - y = 1$, pelo eixo x e pela reta $x = 1$. Sendo possível, calcule-o.

47. Determine se é possível representar por um número a medida da área da região no primeiro quadrante abaixo da curva cuja equação é $y = e^{-x}$. Sendo possível, calcule-o.

48. Ache os valores de n para os quais a integral imprópria

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} \, dx$$

converge e calcule-a para esses valores de n.

49. Em certo campus universitário a função densidade de probabilidade de que a duração de uma chamada telefônica seja x min é dada por

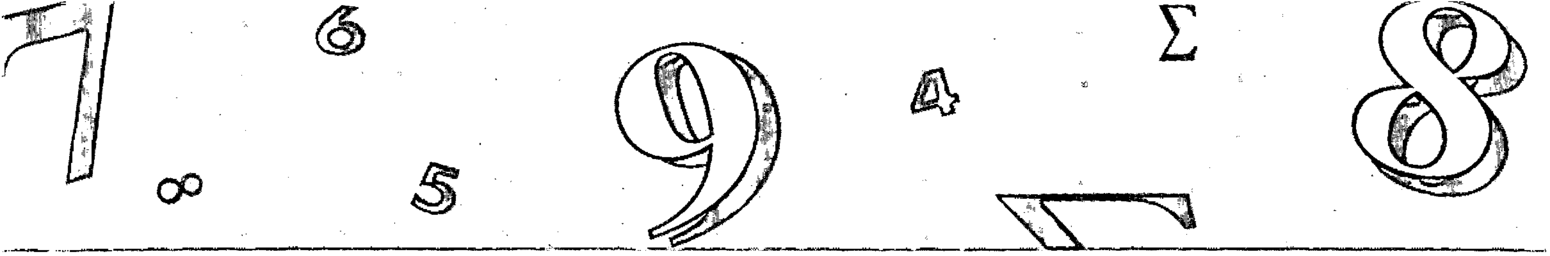
$$f(x) = \begin{cases} 0{,}4e^{-0{,}4x} & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Qual a probabilidade de que um telefonema escolhido ao acaso dure (a) entre 2 e 3 min; (b) no máximo 3 min; (c) no mínimo 10 min?

50. Se os quatro primeiros termos do polinômio de Maclaurin forem usados para aproximar o valor de $\sqrt{e}$, qual será a precisão do resultado?

51. Suponha que determinado negócio produza um fluxo contínuo de renda e que em t anos a partir de agora a renda seja dada por $1.000t - 300$. Qual o valor atual de todo o rendimento futuro se 8% ao ano for a taxa de juros compostos continuamente? (*Sugestão*: veja o parágrafo que precede o Exercício 33 nos Exercícios 11.3.)

52. Mostre que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, sem usar a regra de L' Hôpital. (*Sugestão*: calcule $f'(0)$ para $f(x) = e^x$, usando a definição de uma derivada.)



Apêndice

A.1 USO DE UMA TABELA DE INTEGRAIS

Apresentamos várias técnicas de integração e vimos como elas são úteis para a avaliação de muitas integrais. No entanto, há ocasiões em que esses procedimentos não são suficientes ou levam a uma integração complicada. Em tais casos, você pode desejar usar uma *tabela de integrais*. Tabelas bastante completas aparecem em textos de Matemática, e tabelas menores são encontradas na maioria dos textos de Cálculo. Deve-se ter o cuidado de não se confiar totalmente nas tabelas, ao calcular integrais. É essencial que se tenha o domínio das técnicas de integração, como foi mencionado no Capítulo 9, pois pode ser necessário empregar algumas das técnicas para expressar o integrando numa forma que seja encontrada em uma tabela.

Uma tabela breve de integrais aparece no final deste livro. As fórmulas usadas nos exemplos e exercícios desta secção aparecem nessa tabela. Observe que na tabela há legendas indicando a forma do integrando. A primeira legenda é *Algumas Formas Elementares* e as cinco fórmulas incluídas constam daquelas dadas na introdução ao Capítulo 9. A segunda legenda é *Formas Racionais Contendo $a + bu$*. O primeiro exemplo utiliza uma dessas fórmulas.

EXEMPLO 1 Calcule

$$\int \frac{x\,dx}{(4-x)^3}$$

Solução A fórmula 10 na tabela de integrais é

$$\int \frac{u\,du}{(a+bu)^3} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{2(a+bu)^2} - \frac{1}{a+bu}\right] + C$$

Usando essa fórmula com $u = x$, $a = 4$ e $b = -1$, temos

$$\int \frac{x\,dx}{(4-x)^3} = \frac{1}{(-1)^2}\left[\frac{4}{2(4-x)^2} - \frac{1}{4-x}\right] + C$$

$$= \frac{2}{(4-x)^2} - \frac{1}{4-x} + C$$

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int \frac{dx}{6-2x^2}$$

Solução A fórmula 25 na tabela é

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C \tag{1}$$

Observe que essa fórmula pode ser usada se o coeficiente de x^2 na integral for 1, em vez de 2. Assim, escrevemos

$$\int \frac{dx}{6 - 2x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{3 - x^2}$$

Para a integral à direita aplicamos (1) com $u = x$ e $a = \sqrt{3}$ e nós temos

$$\int \frac{dx}{6 - 2x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} \right| + C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} \right| + C$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\int \frac{dx}{8x^2 + 4x}$$

Solução

$$\int \frac{dx}{8x^2 + 4x} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x(2x + 1)}$$

A integral no segundo membro é da forma

$$\int \frac{du}{u(a + bu)}$$

onde $u = x$, $a = 1$ e $b = 2$. A fórmula 11 na tabela é

$$\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$$

Usando essa fórmula,temos

$$\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x(2x + 1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \ln \left| \frac{x}{1 + 2x} \right| + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{2x + 1} \right| + C$$

EXEMPLO 4 Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

Solução A fórmula 27 na tabela é

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C \tag{2}$$

Podemos aplicar essa fórmula à integral dada se obtivermos uma expressão da forma $u^2 \pm a^2$, completando o quadrado sob o sinal radical. Para completar o quadrado de $x^2 + 2x$ acrescentamos 1 e, portanto, também subtraímos 1. Assim, escrevemos

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= (x^2 + 2x + 1) - 1 - 3 \\ &= (x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 - 4}}$$

A integral é da forma

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$

onde $u = x + 1$ e $a = 2$. Logo, de (2),

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 - 4}} &= \ln\left|(x+1) + \sqrt{(x+1)^2 - 4}\right| + C \\ &= \ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}\right| + C \end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Calcule

$$\int x^2\sqrt{4x^2 + 1}\, dx$$

Solução A fórmula 29 na tabela, com o sinal mais, é

$$\int u^2\sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u}{8}(2u^2 + a^2)\sqrt{u^2 + a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C \qquad (3)$$

Podemos aplicar essa fórmula escrevendo a integral do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \int x^2\sqrt{4x^2 + 1}\, dx &= \int x^2 \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)}\, dx \\ &= 2\int x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\, dx \end{aligned}$$

De (3) com $u = x$ e $a = \dfrac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned} 2\int x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\, dx &= 2\left[\frac{x}{8}\left(2x^2 + \frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{16}}{8}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\right|\right] + C \\ &= \frac{x}{16}(8x^2 + 1)\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{64}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\right| + C \end{aligned}$$

Das fórmulas 16, 19, 21, 73, 77, 86 e 98, entre outras, expressamos uma integral em termos de uma integral mais simples da mesma forma. Tais fórmulas são chamadas **fórmulas de redução.** O exemplo a seguir mostra como elas são aplicadas.

EXEMPLO 6 Calcule

$$\int \sec^5 x\, dx$$

Solução A fórmula 77 é

$$\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u\, du \qquad (4)$$

Aplicamos essa fórmula com $u = x$ e $n = 5$ e temos

$$\int \sec^5 x\, dx = \tfrac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \tfrac{3}{4} \int \sec^3 x\, dx$$

Agora aplicamos (4) à integral no segundo termo com $n = 3$ e obtemos

$$\begin{aligned}\int \sec^5 x\, dx &= \tfrac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{2} \int \sec x\, dx\right) \\ &= \tfrac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \tfrac{3}{8} \sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{3}{8} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C\end{aligned}$$

Como a integral no Exemplo 6 é uma potência ímpar da secante, ela pode ser calculada com o uso de integração por partes, conforme foi explicado na Secção 9.3. De fato, essa integral aparece como Exercício 12 nos Exercícios 9.3.

EXERCÍCIOS A.1

Nos Exercícios de 1 a 36, use a tabela de integrais para calcular a integral. Nos Exercícios de 1 a 4, o integrando é uma forma racional $a + bu$. Use uma das fórmulas de 6 a 13.

1. $\int \frac{x\, dx}{2 + 3x}$
2. $\int \frac{x\, dx}{(5 - 2x)^3}$
3. $\int \frac{x^2\, dx}{(6 - x)^2}$
4. $\int \frac{dx}{x(7 + 3x)}$

Nos Exercícios de 5 a 8, o integrando é uma forma contendo $\sqrt{a \pm bu}$. Use uma das fórmulas de 14 a 23.

5. $\int x\sqrt{1 + 2x}\, dx$
6. $\int x^2\sqrt{1 + 2x}\, dx$
7. $\int \frac{\sqrt{1 + 2x}}{x}\, dx$
8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + 2x}}$

Nos Exercícios 9 e 10, o integrando é uma forma contendo $a^2 + u^2$. Use uma das fórmulas de 24 a 26.

9. $\int \frac{dx}{4 - x^2}$
10. $\int \frac{dx}{x^2 - 25}$

Nos Exercícios de 11 a 14, o integrando é uma forma contendo $\sqrt{u^2 \pm a^2}$. Use uma das fórmulas de 27 a 38.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x}}$
12. $\int \sqrt{4x^2 + 1}\, dx$
13. $\int \frac{\sqrt{9x^2 + 4}}{x}\, dx$
14. $\int \frac{dx}{(x - 1)^2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

Nos Exercícios 15 e 16, o integrando é uma forma contendo $\sqrt{a^2 - u^2}$. Use uma das fórmulas de 39 a 48.

15. $\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x}\, dx$
16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25 - 9x^2}}$

Nos Exercícios 17 e 18, o integrando é uma forma contendo $2au - u^2$. Use uma das fórmulas de 49 a 58.

17. $\int x\sqrt{4x - x^2}\, dx$
18. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

Nos Exercícios de 19 a 24, o integrando é uma forma contendo funções trigonométricas. Use uma das fórmulas de 59 a 88.

19. $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$
20. $\int \cos^8 x\, dx$
21. $\int \operatorname{cosec}^7 x\, dx$
22. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx$
23. $\int t^4 \cos t\, dt$
24. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^5 x\, dx$

Nos Exercícios 25 e 26, o integrando é uma forma contendo uma função trigonométrica inversa. Use uma das fórmulas de 89 a 94.

25. $\int \sec^{-1} 3x\, dx$
26. $\int \operatorname{tg}^{-1} 4t\, dt$

Nos Exercícios de 27 a 34, o integrando é uma forma contendo uma função exponencial ou logarítmica. Use uma das fórmulas de 95 a 106.

27. $\int x^4 e^x \, dx$ **28.** $\int x^3 2^x \, dx$ **29.** $\int x^2 e^{4x} \, dx$

30. $\int x^2 \ln x \, dx$ **31.** $\int x^3 \ln (3x) \, dx$ **32.** $\int 5x^2 e^{-2x} \, dx$

33. $\int e^{2x} \operatorname{sen} 5x \, dx$ **34.** $\int e^{3t} \cos 4t \, dt$

Nos Exercícios 35 e 36, o integrando é uma forma contendo uma função hiperbólica. Use uma das fórmulas de 107 a 124.

35. $\int 3y \operatorname{senh} 5y \, dy$ **36.** $\int e^x \operatorname{sech} e^x \, dx$

Nos Exercícios de 37 a 52, use a tabela de integrais para calcular a integral definida.

37. $\int_1^2 \frac{dx}{x(5-x)^2}$ **38.** $\int_0^3 \frac{x \, dx}{(1+x)^2}$

39. $\int_0^3 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2+16}}$ **40.** $\int_0^2 \frac{dx}{(9+4x^2)^{3/2}}$

41. $\int_1^2 x^4 \ln x \, dx$ **42.** $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$

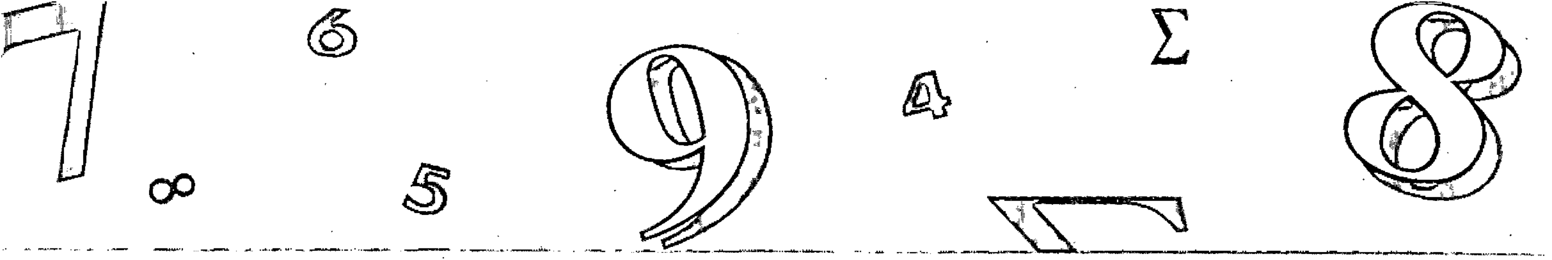
43. $\int_3^4 \sqrt{x^2+2x-15} \, dx$ **44.** $\int_3^5 x^2 \sqrt{x^2-9} \, dx$

45. $\int_1^2 \sqrt{4w-w^2} \, dw$ **46.** $\int_0^{\pi/3} \sec^5 x \, dx$

47. $\int_{\pi/8}^{\pi/4} \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} 5t \, dt$ **48.** $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6 \theta \, d\theta.$

49. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 2x \cos^3 2x \, dx$ **50.** $\int_4^5 w^2 \sqrt{w^2-16} \, dw$

51. $\int_0^1 x^3 e^{2x} \, dx$ **52.** $\int_0^{\pi/6} e^{2t} \operatorname{sen} 3t \, dt$



Fórmulas

O ALFABETO GREGO

α	alfa	ι	iota	ρ	rô
β	beta	k	kapa	σ	sigma
γ	gama	λ	lambda	τ	tau
δ	delta	μ	mi	υ	ipsilon
ε	epsilon	ν	ni	ϕ	fi
ζ	zeta	ξ	csi	χ	qui
η	eta	o	ômicron	ψ	psi
θ	teta	π	pi	ω	ômega

FÓRMULAS DE GEOMETRIA

Os seguintes símbolos são usados para a medida:

r: raio h: altura b: base a: base C: circunferência A: área s: área da superfície
B: área da base V: volume

Círculo: $A = \pi r^2$; C: $2\pi r$

Triângulo: $A = \frac{1}{2}bh$

Retângulo e paralelogramo: $A = bh$

Trapézio: $A = \frac{1}{2}(a + b)h$

Cilindro circular reto: $V = \pi r^2 h$; $S = 2\pi rh$

Cone circular reto: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $S = 4\pi r^2$

Prisma (com bases paralelas): $V = Bh$

Pirâmide: $V = \frac{1}{3}Bh$

FÓRMULAS DE TRIGONOMETRIA

As Oito Identidades Trigonométricas Fundamentais

$\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x = 1$ $\quad \cos x \sec x = 1$ $\quad \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$ $\quad \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\quad \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $\quad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

Identidades Sobre Soma e Diferença

$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$ $\quad \operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$

$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ $\quad \cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

$\operatorname{tg}(u + v) = \dfrac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}$ $\quad \operatorname{tg}(u - v) = \dfrac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}$

Identidades Sobre Medidas Múltiplas

$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$

$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$ $\quad \cos 2u = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 u$ $\quad \cos 2u = 2 \cos^2 u - 1$

$\operatorname{tg} 2u = \dfrac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u}$

$\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}$ $\quad \cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$ $\quad \operatorname{tg}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$

$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}t = \dfrac{1 - \cos t}{2}$ $\quad \cos^2 \tfrac{1}{2}t = \dfrac{1 + \cos t}{2}$

$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t = \dfrac{1 - \cos t}{\operatorname{sen} t}$ $\quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}$

Identidades para o Produto, Soma e Diferença de Senos e Co-senos

$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$ $\quad \cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$

$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$ $\quad \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$

$\operatorname{sen} s + \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{s + t}{2}\right) \cos\left(\dfrac{s - t}{2}\right)$ $\quad \operatorname{sen} s - \operatorname{sen} t = 2 \cos\left(\dfrac{s + t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{s - t}{2}\right)$

$\cos s + \cos t = 2 \cos\left(\dfrac{s + t}{2}\right) \cos\left(\dfrac{s - t}{2}\right)$ $\quad \cos s - \cos t = -2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{s + t}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{s - t}{2}\right)$

Algumas Fórmulas de Redução

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad \cos(-x) = \cos x$ $\quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

$\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos x$ $\quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{sen} x$ $\quad \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \operatorname{cotg} x$

$\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi + x) = \cos x$ $\quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\pi + x) = -\operatorname{cotg} x$

$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$ $\quad \cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$

Lei dos Senos e dos Co-senos

a, b e c representam as medidas dos lados de um triângulo: α, β e γ representam as medidas dos ângulos opostos aos lados de medidas a, b, e c, respectivamente.

$\dfrac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$ $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

TABELA DE DERIVADAS

1. $D_x(u^n) = nu^{n-1} D_x u$
2. $D_x(u + v) = D_x u + D_x v$
3. $D_x(uv) = u\, D_x v + v\, D_x u$
4. $D_x\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\, D_x u - u\, D_x v}{v^2}$
5. $D_x(e^u) = e^u D_x u$
6. $D_x(a^u) = a^u \ln a\, D_x u$
7. $D_x(\ln u) = \dfrac{1}{u} D_x u$
8. $D_x(\text{sen } u) = \cos u\, D_x u$
9. $D_x(\cos u) = -\text{sen } u\, D_x u$
10. $D_x(\text{tg } u) = \sec^2 u\, D_x u$
11. $D_x(\text{cotg } u) = -\text{ cosec}^2 u\, D_x u$
12. $D_x(\sec u) = \sec u \text{ tg } u\, D_x u$
13. $D_x(\text{cosec } u) = -\text{ cosec } u \text{ cotg } u\, D_x u$
14. $D_x(\text{sen}^{-1} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$
15. $D_x(\cos^{-1} u) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} D_x u$
16. $D_x(\text{tg}^{-1} u) = \dfrac{1}{1 + u^2} D_x u$
17. $D_x(\text{cotg}^{-1} u) = \dfrac{-1}{1 + u^2} D_x u$
18. $D_x(\sec^{-1} u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$
19. $D_x(\text{cosec}^{-1} u) = \dfrac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$
20. $D_x(\text{senh } u) = \cosh u\, D_x u$
21. $D_x(\cosh u) = \text{senh } u\, D_x u$
22. $D_x(\text{tgh } u) = \text{sech}^2 u\, D_x u$
23. $D_x(\text{cotgh } u) = -\text{cosech}^2 u\, D_x u$
24. $D_x(\text{sech } u) = -\text{sech } u \text{ tgh } u\, D_x u$
25. $D_x(\text{cosech } u) = -\text{cosech } u \text{ cotg } u\, D_x u$

TABELA DE INTEGRAIS

Algumas Formas Elementares

1. $\int du = u + C$
2. $\int a\, du = au + C$
3. $\int [f(u) + g(u)]du = \int f(u)du + \int g(u)du$
4. $\int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n + 1} + C \qquad (n \neq -1)$
5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

Formas Racionais Contendo $a + bu$

6. $\int \dfrac{u\, du}{a + bu} = \dfrac{1}{b^2}[a + bu - a \ln|a + bu|] + C$
7. $\int \dfrac{u^2\, du}{a + bu} = \dfrac{1}{b^3}\left[\dfrac{1}{2}(a + bu)^2 - 2a(a + bu) + a^2 \ln|a + bu|\right] + C$
8. $\int \dfrac{u\, du}{(a + bu)^2} = \dfrac{1}{b^2}\left[\dfrac{a}{a + bu} + \ln|a + bu|\right] + C$
9. $\int \dfrac{u^2\, du}{(a + bu)^2} = \dfrac{1}{b^3}\left[a + bu - \dfrac{a^2}{a + bu} - 2a \ln|a + bu|\right] + C$
10. $\int \dfrac{u\, du}{(a + bu)^3} = \dfrac{1}{b^2}\left[\dfrac{a}{2(a + bu)^2} - \dfrac{1}{a + bu}\right] + C$
11. $\int \dfrac{du}{u(a + bu)} = \dfrac{1}{a} \ln\left|\dfrac{u}{a + bu}\right| + C$
12. $\int \dfrac{du}{u^2(a + bu)} = -\dfrac{1}{au} + \dfrac{b}{a^2} \ln\left|\dfrac{a + bu}{u}\right| + C$
13. $\int \dfrac{du}{u(a + bu)^2} = \dfrac{1}{a(a + bu)} + \dfrac{1}{a^2} \ln\left|\dfrac{u}{a + bu}\right| + C$

Formas Contendo $\sqrt{a + bu}$

14. $\int u\sqrt{a + bu}\, du = \dfrac{2}{15b^3}(3bu - 2a)(a + bu)^{3/2} + C$
15. $\int u^2\sqrt{a + bu}\, du = \dfrac{2}{105b^3}(15b^2u^2 - 12abu + 8a^2)(a + bu)^{3/2} + C$
16. $\int u^n\sqrt{a + bu}\, du = \dfrac{2u^n(a + bu)^{3/2}}{b(2n + 3)} - \dfrac{2an}{b(2n + 3)}\int u^{n-1}\sqrt{a + bu}\, du$
17. $\int \dfrac{u\, du}{\sqrt{a + bu}} = \dfrac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu} + C$
18. $\int \dfrac{u^2\, du}{\sqrt{a + bu}} = \dfrac{2}{15b^3}(3b^2u^2 - 4abu + 8a^2)\sqrt{a + bu} + C$
19. $\int \dfrac{u^n\, du}{\sqrt{a + bu}} = \dfrac{2u^n\sqrt{a + bu}}{b(2n + 1)} - \dfrac{2an}{b(2n + 1)}\int \dfrac{u^{n-1}\, du}{\sqrt{a + bu}}$

20. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \dfrac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}} \right| + C & \text{se } a > 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\dfrac{a+bu}{-a}} + C \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

21. $$\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{a(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$$

22. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

23. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^n} = -\frac{(a+bu)^{3/2}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-5)}{2a(n-1)} \int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^{n-1}}$$

Formas Contendo $a^2 \pm u^2$

24. $$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

25. $$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \operatorname{tgh}^{-1} \dfrac{u}{a} + C \text{ se } |u| < a \\ \dfrac{1}{a} \operatorname{cotg}^{-1} \dfrac{u}{a} + C \text{ se } |u| > a \end{cases}$$

26. $$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C = \begin{cases} -\dfrac{1}{a} \operatorname{tgh}^{-1} \dfrac{u}{a} + C \text{ se } |u| < a \\ -\dfrac{1}{a} \operatorname{cotg}^{-1} \dfrac{u}{a} + C \text{ se } |u| > a \end{cases}$$

Formas Contendo $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

Nas fórmulas de 27 a 38, podemos substituir

$\ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$ por $\operatorname{senh}^{-1} \dfrac{u}{a}$

$\ln|u + \sqrt{u^2-a^2}|$ por $\cosh^{-1} \dfrac{u}{a}$

$\ln\left|\dfrac{a + \sqrt{u^2+a^2}}{u}\right|$ por $\operatorname{senh}^{-1} \dfrac{a}{u}$

27. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

28. $$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

29. $$\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

30. $$\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2+a^2} - a \ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + C$$

31. $$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2-a^2} - a \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$$

32. $$\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

33. $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{\pm a^2}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

34. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = -\frac{1}{a} \ln\left|\frac{a + \sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + C$$

35. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$$

36. $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{\pm a^2 u} + C$$

37. $$\int (u^2 \pm a^2)^{3/2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm 5a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

38. $$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{u}{\pm a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

Formas Contendo $\sqrt{a^2 - u^2}$

39. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

40. $$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

41. $$\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

42. $$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}\,du}{u} = \sqrt{a^2-u^2} - a \ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$$
$$= \sqrt{a^2-u^2} - a \cosh^{-1} \frac{a}{u} + C$$

43. $$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

44. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\,\text{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

$\displaystyle\qquad = -\frac{1}{a}\cosh^{-1}\frac{a}{u} + C$

46. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2u} + C$

47. $\displaystyle\int (a^2 - u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\,\text{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

48. $\displaystyle\frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

Formas Contendo 2 $au - u^2$

49. $\displaystyle\int \sqrt{2au - u^2}\,du = \frac{u - a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

50. $\displaystyle\int u\sqrt{2au - u^2}\,du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6}\sqrt{2au - u^2}$

$\displaystyle\qquad + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

51. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au - u^2}\,du}{u} = \sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

52. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au - u^2}\,du}{u^2} = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

53. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

54. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

55. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u + 3a)}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C$

56. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$

57. $\displaystyle\int \frac{du}{(2au - u^2)^{3/2}} = \frac{u - a}{a^2\sqrt{2au - u^2}} + C$

58. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(2au - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a\sqrt{2au - u^2}} + C$

Formas Contendo Funções Trigonométricas

59. $\displaystyle\int \text{sen}\,u\,du = -\cos u + C$

60. $\displaystyle\int \cos u\,du = \text{sen}\,u + C$

61. $\displaystyle\int \text{tg}\,u\,du = \ln|\sec u| + C$

62. $\displaystyle\int \text{cotg}\,u\,du = \ln|\text{sen}\,u| + C$

63. $\displaystyle\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \text{tg}\,u| + C = \ln|\text{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}u)| + C$

64. $\displaystyle\int \text{cosec}\,u\,du = \ln|\text{cosec}\,u - \text{cotg}\,u| + C = \ln|\text{tg}\,\tfrac{1}{2}u| + C$

65. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \text{tg}\,u + C$

66. $\displaystyle\int \text{cosec}^2 u\,du = -\text{cotg}\,u + C$

67. $\displaystyle\int \sec u\,\text{tg}\,u\,du = \sec u + C$

68. $\displaystyle\int \text{cosec}\,u\,\text{cotg}\,u\,du = -\text{cosec}\,u + C$

69. $\displaystyle\int \text{sen}^2 u\,du = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,2u + C$

70. $\displaystyle\int \cos^2 u\,du = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\text{sen}\,2u + C$

71. $\displaystyle\int \text{tg}^2 u\,du = \text{tg}\,u - u + C$

72. $\displaystyle\int \text{cotg}^2 u\,du = -\text{cotg}\,u - u + C$

73. $\displaystyle\int \text{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} u\cos u + \frac{n - 1}{n}\int \text{sen}^{n-2} u\,du$

74. $\displaystyle\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u\,\text{sen}\,u + \frac{n - 1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

75. $\displaystyle\int \text{tg}^n u\,du = \frac{1}{n - 1}\text{tg}^{n-1} u - \int \text{tg}^{n-2} u\,du$

76. $\displaystyle\int \text{cotg}^n u\,du = -\frac{1}{n - 1}\text{cotg}^{n-1} u - \int \text{cotg}^{n-2} u\,du$

77. $\displaystyle\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n - 1}\sec^{n-2} u\,\text{tg}\,u + \frac{n - 2}{n - 1}\int \sec^{n-2} u\,du$

78. $\displaystyle\int \text{cosec}^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\text{cosec}^{n-2} u\,\text{cotg}\,u + \frac{n - 2}{n-1}\int \text{cosec}^{n-2} u\,du$

79. $\displaystyle\int \text{sen}\,mu\,\text{sen}\,nu\,du = -\frac{\text{sen}(m + n)u}{2(m + n)} + \frac{\text{sen}(m - n)u}{2(m - n)} + C$

80. $\displaystyle\int \cos mu\cos nu\,du = \frac{\text{sen}(m + n)u}{2(m + n)} + \frac{\text{sen}(m - n)u}{2(m - n)} + C$

81. $\displaystyle\int \text{sen}\,mu\cos nu\,du = -\frac{\cos(m + n)u}{2(m + n)} - \frac{\cos(m - n)u}{2(m - n)} + C$

82. $\displaystyle\int u\,\text{sen}\,u\,du = \text{sen}\,u - u\cos u + C$

83. $\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84. $\int u^2 \operatorname{sen} u\, du = 2u \operatorname{sen} u + (2 - u^2) \cos u + C$

85. $\int u^2 \cos u\, du = 2u \cos u + (u^2 - 2) \operatorname{sen} u + C$

86. $\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u\, du$

87. $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u\, du$

88. $$\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m-2} u \cos^n u\, du$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m u \cos^{n-2} u\, du$$

Formas Contendo Funções Trigonométricas Inversas

89. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1 - u^2} + C$

90. $\int \cos^{-1} u\, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1 - u^2} + C$

91. $\int \operatorname{tg}^{-1} u\, du = u \operatorname{tg}^{-1} u - \ln \sqrt{1 + u^2} + C$

92. $\int \operatorname{cotg}^{-1} u\, du = u \operatorname{cotg}^{-1} u + \ln \sqrt{1 + u^2} + C$

93. $$\int \sec^{-1} u\, du = u \sec^{-1} u - \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C$$
$$= u \sec^{-1} u - \cosh^{-1} u + C$$

94. $$\int \operatorname{cosec}^{-1} u\, du = u \operatorname{cosec}^{-1} u + \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C$$
$$= u \operatorname{cosec}^{-1} u + \cosh^{-1} u + C$$

Formas Contendo Funções Exponenciais e Logarítmicas

95. $\int e^u\, du = e^u + C$

96. $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

97. $\int u e^u\, du = e^u(u - 1) + C$

98. $\int u^n e^u\, du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u\, du$

99. $\int u^n a^u\, du = \dfrac{u^n a^u}{\ln a} - \dfrac{n}{\ln a} \int u^{n-1} a^u\, du + C$

100. $\int \dfrac{e^u\, du}{u^n} = -\dfrac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \dfrac{1}{n-1} \int \dfrac{e^u\, du}{u^{n-1}}$

101. $\int \dfrac{a^u\, du}{u^n} = -\dfrac{a^u}{(n-1)u^{n-1}} + \dfrac{\ln a}{n-1} \int \dfrac{a^u\, du}{u^{n-1}}$

102. $\int \ln u\, du = u \ln u - u + C$

103. $\int u^n \ln u\, du = \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C$

104. $\int \dfrac{du}{u \ln u} = \ln|\ln u| + C$

105. $\int e^{au} \operatorname{sen} nu\, du = \dfrac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \operatorname{sen} nu - n \cos nu) + C$

106. $\int e^{au} \cos nu\, du = \dfrac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \cos nu + n \operatorname{sen} nu) + C$

Formas Contendo Funções Hiperbólicas

107. $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

108. $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

109. $\int \operatorname{tgh} u\, du = \ln|\cosh u| + C$

110. $\int \operatorname{cotgh} u\, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

111. $\int \operatorname{sech} u\, du = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} u) + C$

112. $\int \operatorname{cosech} u\, du = \ln|\operatorname{tgh} \tfrac{1}{2}u| + C$

113. $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \operatorname{tgh} u + C$

114. $\int \operatorname{cosech}^2 u\, du = -\operatorname{cotgh} u + C$

115. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

116. $\int \operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u\, du = -\operatorname{cosech} u + C$

117. $\int \operatorname{senh}^2 u\, du = \tfrac{1}{4} \operatorname{senh} 2u - \tfrac{1}{2} u + C$

118. $\int \cosh^2 u\, du = \tfrac{1}{4} \operatorname{senh} 2u + \tfrac{1}{2} u + C$

119. $\int \operatorname{tgh}^2 u\, du = u - \operatorname{tgh} u + C$

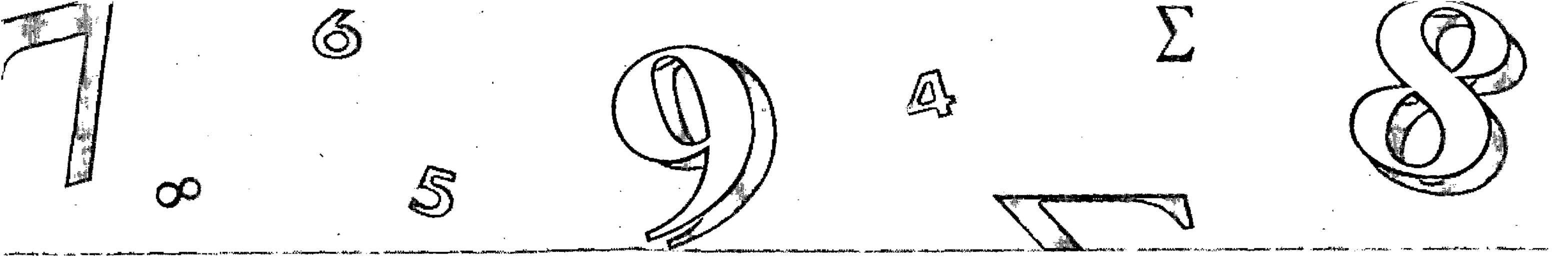
120. $\int \operatorname{cotgh}^2 u\, du = u - \operatorname{cotgh} u + C$

121. $\int u \operatorname{senh} u\, du = u \cosh u - \operatorname{senh} u + C$

122. $\int u \cosh u\, du = u \operatorname{senh} u - \cosh u + C$

123. $\int e^{au} \operatorname{senh} nu\, du = \dfrac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \operatorname{senh} nu - n \cosh nu) + C$

124. $\int e^{au} \cosh nu\, du = \dfrac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \cosh nu - n \operatorname{senh} nu) + C$



Respostas dos Exercícios de Número Ímpar

EXERCÍCIOS 1.1 (Página 12)

1. $(-2, +\infty)$ **3.** $(-\infty, \frac{3}{4}]$ **5.** $[4, 8]$ **7.** $(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}]$ **9.** $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$ **11.** $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, 3)$ **13.** $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ **15.** $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$ **17.** $[-1, \frac{1}{2}]$ **19.** $(-3, \frac{3}{4})$ **21.** $(\frac{3}{2}, \frac{31}{14}] \cup (\frac{7}{3}, +\infty)$ **23.** $\{-\frac{5}{2}, 1\}$ **25.** $\{-\frac{1}{4}, 4\}$ **27.** $\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\}$ **29.** $\{\frac{4}{3}, 3\}$ **31.** $[\frac{5}{8}, +\infty)$ **33.** $(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$ **35.** $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ **37.** $(-11, 3)$ **39.** $[\frac{2}{3}, 2]$ **41.** $(-\infty, -2) \cup (12, +\infty)$ **43.** $[-\frac{1}{2}, 4]$ **45.** $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$ **47.** $(1, +\infty)$ **49.** $[-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}]$ **51.** $(-\infty, \frac{10}{9}) \cup (2, +\infty)$ **53.** $|x| > |a|$ **55.** $|x - 2| > 2$

EXERCÍCIOS 1.2 (Página 23)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 5 aparecem nas Figs. 1.2-1 a 1.2-5.)
1. (a) $(1, 2)$; (b) $(-1, -2)$; (c) $(-1, 2)$; (d) $(-2, 1)$ **3.** (a) $(2, -2)$; (b) $(-2, 2)$; (c) $(-2, -2)$; (d) não se aplica **5.** (a) $(-1, 3)$; (b) $(1, -3)$; (c) $(1, 3)$; (d) $(-3, -1)$

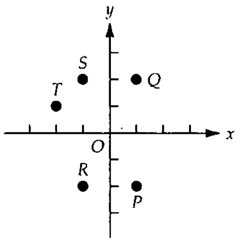


FIGURA 1.2-1

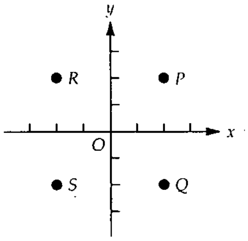


FIGURA 1.2-3

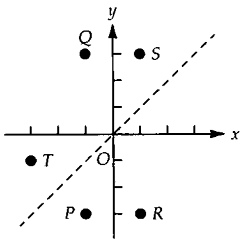


FIGURA 1.2-5

9. $\sqrt{26}$; $\frac{1}{2}\sqrt{89}$; $\frac{1}{2}\sqrt{53}$ **11.** $|\overline{AB}| = \sqrt{41}$, $|\overline{AC}| = \sqrt{41}$, $|\overline{BC}| = \sqrt{82}$ e $|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}|^2$; $\frac{41}{2}$ **13.** $\sqrt{578}$ **15.** $(-8, 12)$ **19.** $(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} + 2\sqrt{3})$ e $(-2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} - 2\sqrt{3})$ **21.** -1 **23.** $-\frac{1}{7}$ **25.** $4x - y = 11$ **27.** $2x + y + 1 = 0$ **29.** $13x - 4y - 28 = 0$ **31.** $4x - 3y + 12 = 0$ **33.** $x + 2y - 4 = 0$ **35.** $y = -7$ **37.** $\sqrt{3}x - y + (2\sqrt{3} - 5) = 0$ **39.** (a) $-\frac{1}{3}$; (b) 0 **41.** (a) colinear; (b) não-colinear **43.** (a) $y = 0$; (b) $x = 0$; (c) $xy = 0$ **47.** (a) $2x + 3y + 7 = 0$; (b) $\sqrt{13}$ **51.** $(-\frac{9}{4}, \frac{17}{4})$, $(\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$, $(\frac{13}{4}, \frac{27}{4})$ **53.** (a) $-\dfrac{A}{B}$; (b) $-\dfrac{C}{B}$; (c) $-\dfrac{C}{A}$; (d) $Bx - Ay = 0$ **55.** $9x - 4y - 11 = 0$; $y = 1$; $9x + 4y - 19 = 0$. Eles se interceptam em $(\frac{5}{3}, 1)$. **59.** (a) $x = 1$; (b) $y = 1$; (c) $2x + y - 3 = 0$

EXERCÍCIOS 1.3 (Página 30)

1. $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ **3.** $x^2 + y^2 + 10x + 24y + 160 = 0$ **5.** $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$ **7.** $(3, 4)$; 4 **9.** $(0, -\frac{2}{3})$; $\frac{5}{3}$
(Esboços dos gráficos dos Exercícios 7 e 9 aparecem nas Figs. 1.3.-7 e 1.3.-9.)
11. circunferência **13.** o conjunto vazio **15.** circunferência
(Esboços dos gráficos dos Exercícios 17 a 43 aparecem nas Figs. 1.3-17 a 1.3-43.)
45. $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 = 0$ **47.** $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$ **49.** $3x + 4y - 19 = 0$

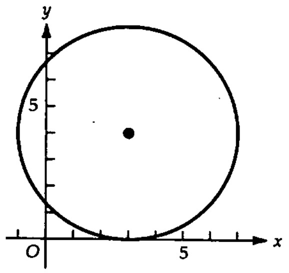


FIGURA 1.3-7

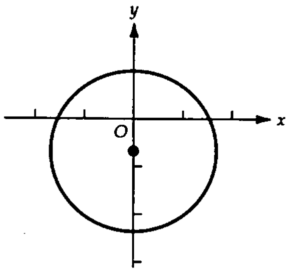


FIGURA 1.3-9

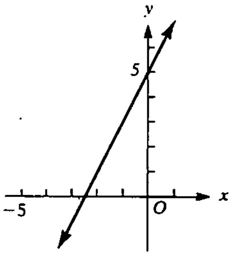


FIGURA 1.3-17

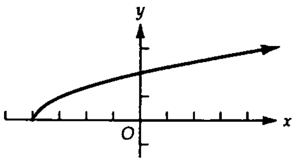


FIGURA 1.3-19

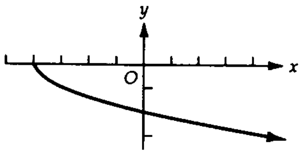


FIGURA 1.3-21

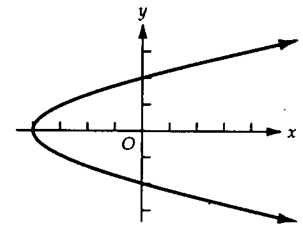


FIGURA 1.3-23

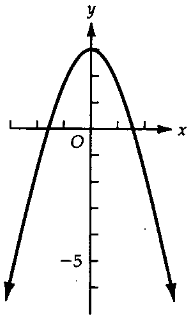


FIGURA 1.3-25

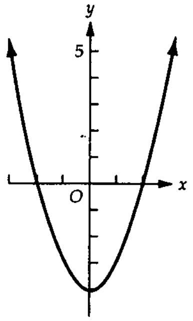


FIGURA 1.3-27

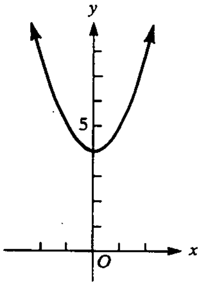


FIGURA 1.3-29

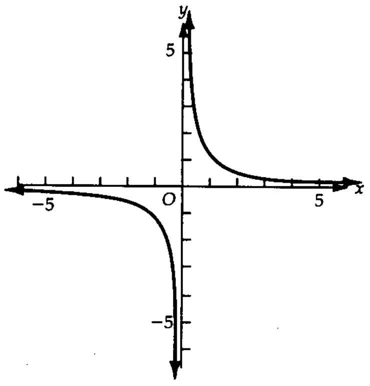


FIGURA 1.3-31

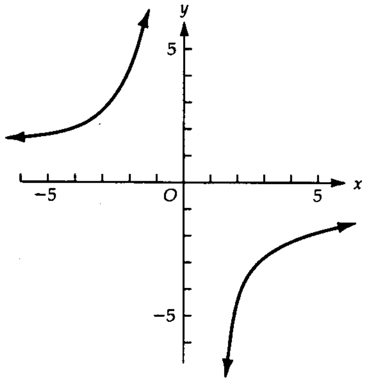


FIGURA 1.3-33

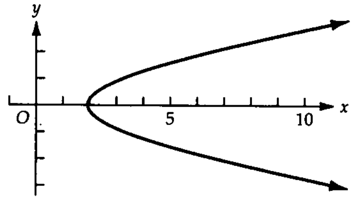


FIGURA 1.3-35

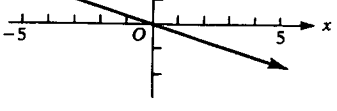


FIGURA 1.3-37(a)

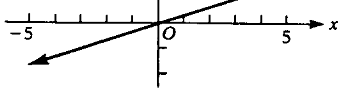


FIGURA 1.3-37(b)

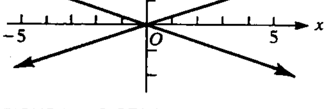


FIGURA 1.3-37(c)

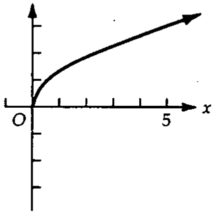


FIGURA 1.3-39(a)

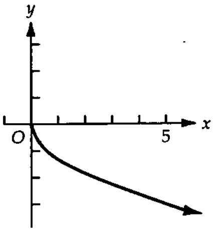


FIGURA 1.3-39(b)

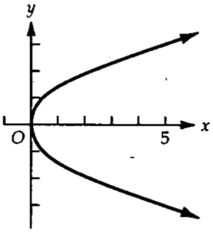


FIGURA 1.3-39(c)

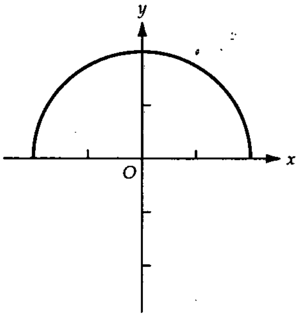


FIGURA 1.3-41(a)

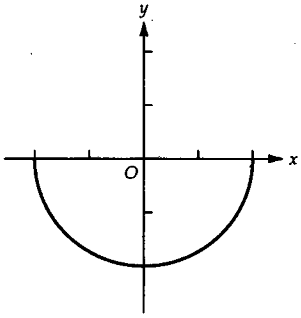


FIGURA 1.3-41(b)

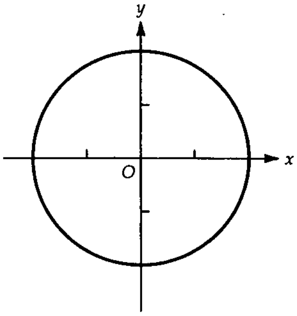


FIGURA 1.3-41(c)

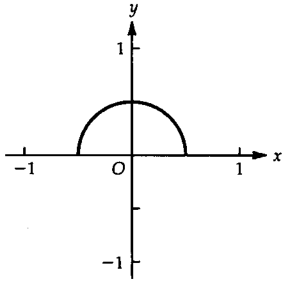


FIGURA 1.3-43(a)

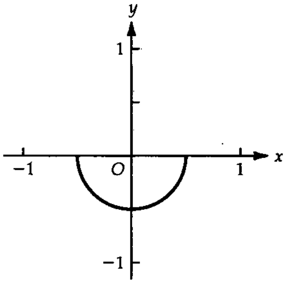


FIGURA 1.3-43(b)

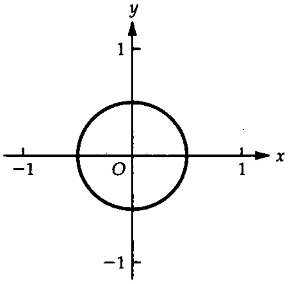


FIGURA 1.3-43(c)

EXERCÍCIOS 1.4 (Página 39)

1. (a) sim, $x \geqslant 4$; (b) sim, $|x| \geqslant 2$; (c) sim, $|x| \leqslant 2$; (d) não **3.** (a) sim, $(-\infty, +\infty)$; (b) não; (c) sim, $(-\infty, +\infty)$; (d) sim, $(-\infty, +\infty)$
5. (a) 5; (b) -5; (c) -1; (d) $2a + 1$; (e) $2x + 1$; (f) $4x - 1$; (g) $4x - 2$; (h) $2x + 2h - 1$; (i) $2x + 2h - 2$; (j) 2
7. (a) -5; (b) -6; (c) -3; (d) 30; (e) $2h^2 + 9h + 4$; (f) $8x^4 + 10x^2 - 3$; (g) $2x^4 - 7x^2$; (h) $2x^2 + (4h + 5)x + (2h^2 + 5h - 3)$;
(i) $2x^2 + 5x + (2h^2 + 5h - 6)$; (j) $4x + 2h + 5$ **9.** (a) 1; (b) $\sqrt{11}$; (c) 2; (d) 5; (e) $\sqrt{4x + 9}$; (f) $\dfrac{2}{\sqrt{2x + 2h + 3} + \sqrt{2x + 3}}$
11. (a) $x^2 + x - 6$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $-x^2 + x - 4$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $x^3 - 5x^2 - x + 5$, domínio: $(-\infty, +\infty)$;
(d) $\dfrac{x - 5}{x^2 - 1}$, domínio: $\{x|x \neq -1, x \neq 1\}$; (e) $\dfrac{x^2 - 1}{x - 5}$, domínio: $\{x|x \neq 5\}$ **13.** (a) $\dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - x}$, domínio: $\{x|x \neq 0, x \neq 1\}$;
(b) $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x}$, domínio: $\{x|x \neq 0, x \neq 1\}$; (c) $\dfrac{x + 1}{x^2 - x}$, domínio; $\{x|x \neq 0, x \neq 1\}$: (d) $\dfrac{x^2 + x}{x - 1}$, domínio: $\{x|x \neq 0, x \neq 1\}$;
(e) $\dfrac{x - 1}{x^2 + x}$, domínio: $\{x|x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1\}$ **15.** (a) $\sqrt{x} + x^2 - 1$, domínio: $[0, +\infty)$;
(b) $\sqrt{x} - x^2 + 1$, domínio: $[0, +\infty)$; (c) $\sqrt{x}(x^2 - 1)$, domínio: $[0, +\infty)$;
(d) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$, domínio: $[0, 1) \cup (1, +\infty)$; (e) $\dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x}}$, domínio: $(0, +\infty)$ **17.** (a) $x^2 + 3x - 1$, domínio: $(-\infty, +\infty)$;
(b) $x^2 - 3x + 3$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $\dfrac{x^2 + 1}{3x - 2}$, domínio: $\{x|x \neq \frac{2}{3}\}$;
(e) $\dfrac{3x - 2}{x^2 + 1}$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ **19.** (a) $\dfrac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - x - 2}$, domínio: $\{x|x \neq -1, x \neq 2\}$;
(b) $\dfrac{-x^2 - 2}{x^2 - x - 2}$, domínio: $\{x|x \neq -1, x \neq 2\}$; (c) $\dfrac{x}{x^2 - x - 2}$, domínio: $\{x|x \neq -1, x \neq 2\}$;
(d) $\dfrac{x - 2}{x^2 + x}$, domínio: $\{x|x \neq -1, x \neq 0, x \neq 2\}$; (e) $\dfrac{x^2 + x}{x - 2}$, domínio: $\{x|x \neq -1, x \neq 2\}$
21. (a) $x + 5$, domínio: $(-\infty, +\infty)$: (b) $x + 5$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $x - 4$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $x + 14$, domínio: $(-\infty, +\infty)$
23. (a) $x^2 - 6$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $x^2 - 10x + 24$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $x - 10$, domínio: $(-\infty, +\infty)$;

(d) $x^4 - 2x^2$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ **25.** (a) $\sqrt{x^2 - 4}$, domínio: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; (b) $x - 4$, domínio: $[2, +\infty)$; (c) $\sqrt{\sqrt{x-2} - 2}$, domínio: $[6, +\infty)$ (d) $x^4 - 4x^2 + 2$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ **27.** (a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, domínio: $(0, +\infty)$; (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, domínio: $(0, +\infty)$; (c) x, domínio: $\{x|x \neq 0\}$; (d) $\sqrt[4]{x}$, domínio: $[0, +\infty)$ **29.** (a) $|x + 2|$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $|x| + 2$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $|x|$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $|x + 2| + 2$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ **31.** (a) $2x^2 - 3$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $4x^2 - 12x + 9$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $4x - 9$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ **33.** (a) 0; (b) 4; (c) $4 - 2x$ **35.** (a) 1; (b) -1; (c) 1; (d) -1; (e) 1 se $x \leqslant 0$, -1 se $x > 0$; (f) 1 se $x \geqslant -1$, -1 se $x < -1$; (g) 1; (h) -1 se $x \neq 0$, 1 se $x = 0$ **37.** (a) par; (b) nem um nem outro; (c) ímpar; (d) par; (e) ímpar; (f) ímpar; (g) nem um nem outro; (h) par; (i) par; (j) ímpar **39.** (a) par; (b) ímpar; (c) par; (d) par

---

EXERCÍCIOS 1.5 (Página 44)

(Esboços dos gráficos aparecem nas Figs. 1.5-1 a 1.5-43.)

1. domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, +\infty)$ **3.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[-1, +\infty)$ **5.** domínio: $[-1, +\infty)$; imagem: $[0, +\infty)$
7. domínio: $(-\infty, 2]$; imagem: $[0, +\infty)$ **9.** domínio: $(-\infty, 0]$; imagem: $[0, +\infty)$ **11.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[0, +\infty)$
13. domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, 4]$ **15.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[4, +\infty)$ **17.** domínio: $\{x|x \neq 1\}$; imagem: $\{y|y \neq -2\}$
19. domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $\{-2, 2\}$ **21.** domínio: $[-\infty, +\infty)$; imagem: $\{y|y \neq 3\}$ **23.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[-4, +\infty)$
25. domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, 4]$ **27.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, -2) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$
29. domínio: $\{x|x \neq -5 \text{ e } x \neq -1\}$; imagem: $\{y|y \neq -7 \text{ e } y \neq -3\}$ **31.** domínio: $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$; imagem: $[0, +\infty)$
33. domínio: $\{x|x \neq 2\}$; imagem: $[0, +\infty)$ **35.** domínio: $\{x|x \neq -5\}$; imagem: $[-6, +\infty)$ **37.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[1, +\infty)$
39. domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: {inteiros} **41.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[0, 1)$
43. domínio: $\{x|x \neq 0\}$; imagem: $(-\infty, -1] \cup \{0\} \cup (\frac{1}{2}, 1]$

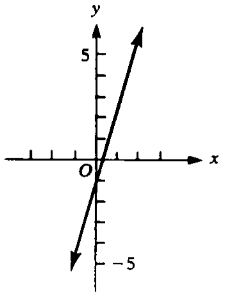


FIGURA 1.5-1

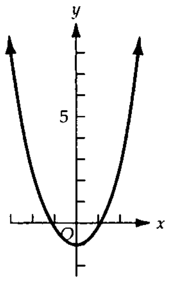


FIGURA 1.5-3

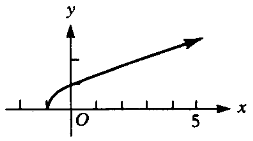


FIGURA 1.5-5

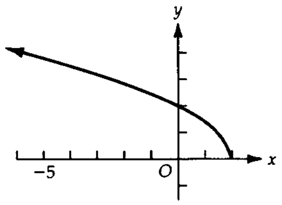


FIGURA 1.5-7

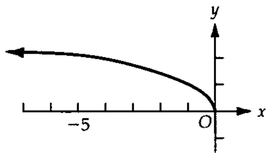


FIGURA 1.5-9

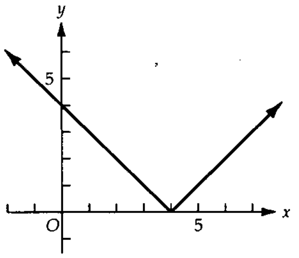


FIGURA 1.5-11

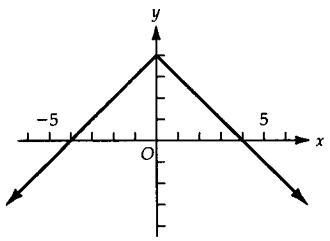


FIGURA 1.5-13

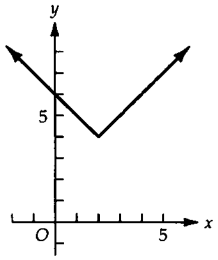


FIGURA 1.5-15

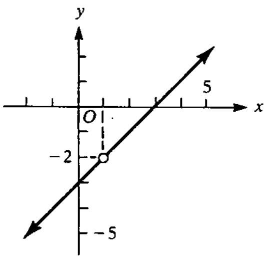


FIGURA 1.5-17

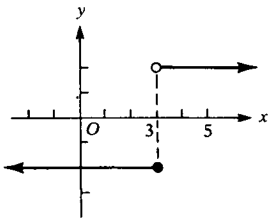


FIGURA 1.5-19

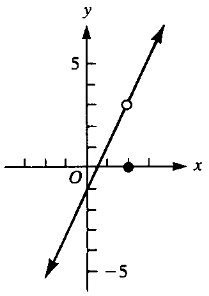


FIGURA 1.5-21

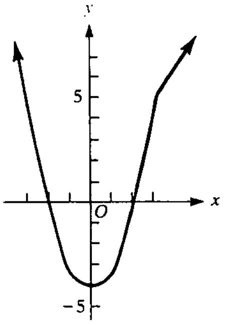


FIGURA 1.5-23

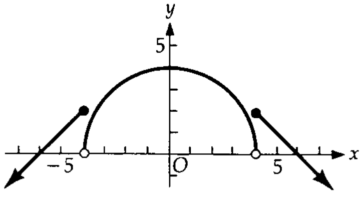


FIGURA 1.5-25

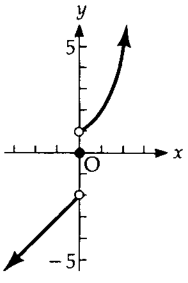


FIGURA 1.5-27

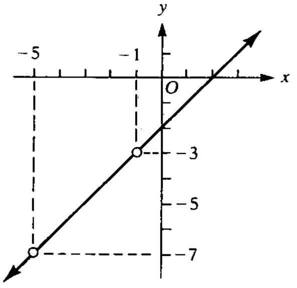


FIGURA 1.5-29

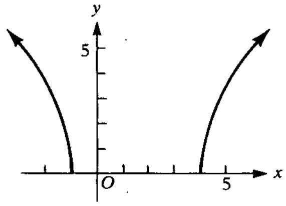


FIGURA 1.5-31

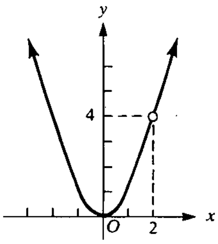


FIGURA 1.5-33

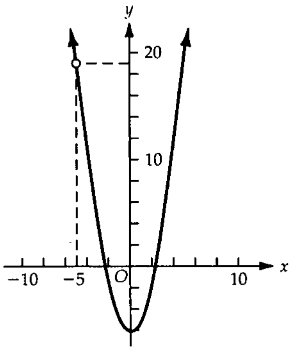


FIGURA 1.5-35

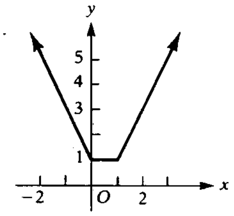


FIGURA 1.5-37

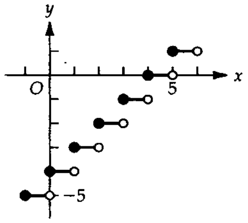


FIGURA 1.5-39

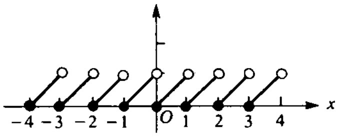


FIGURA 1.5-41

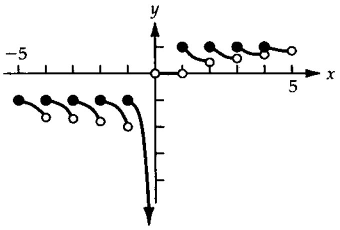


FIGURA 1.5-43

EXERCÍCIOS 1.6 (Página 51)

1. (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{3}{4}\pi$; (c) $\frac{7}{6}\pi$; (d) $-\frac{5}{6}\pi$; (e) $\frac{1}{9}\pi$; (f) $\frac{5}{2}\pi$; (g) $-\frac{5}{12}\pi$; (h) $\frac{5}{9}\pi$ **3.** (a) 45°; (b) 120°; (c) 330°; (d) −90°; (e) 28°39′; (f) 540°; (g) −114°36′; (h) 15° **5.** (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) 1; (d) $\frac{1}{2}$ **7.** (a) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) −1; (d) 0 **9.** (a) $\sqrt{3}$; (b) 1; (c) −1; (d) 1 **11.** (a) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; (b) $\sqrt{2}$; (c) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (d) 1 **13.** (a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) $\sqrt{2}$; (d) $\sqrt{2}$ **15.** (a) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) $-\frac{1}{2}$; (c) −2; (d) $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ **17.** (a) 0; (b) 1; (c) −1; (d) indefinido **19.** (a) 1; (b) 0; (c) indefinido; (d) 1 **21.** (a) −1; (b) −1 (c) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (d) $\sqrt{3}$ **23.** (a) $-\sqrt{3}$; (b) $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (c) 0; (d) 0 **25.** (a) $\frac{1}{2}\pi$; (b) π; (c) $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$; (d) 0 **27.** (a) 0, π; (b) $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$; (c) 0, π; (d) $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$ **29.** (a) $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$; (c) $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$; (d) $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$
31. (a) $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$; (b) 0, π. **33.** (a) π; (b) $\frac{3}{2}\pi$ **35.** (a) $\frac{3}{5}$; (b) 1 **37.** (a) $-\frac{7}{4}$; (b) $\frac{3}{55}$ **39.** (a) 63°; (b) 19° **41.** 27°, 45°, 108°
43. $3x - y + 7 = 0$; $x + 3y - 11 = 0$ **45.** (a) sen $3x$, $(-\infty, +\infty)$; (b) tg $\frac{x}{2}$, $\{x \mid x \neq (2k + 1)\pi\}$, onde k é qualquer inteiro

47. (a) cotg $\frac{1}{x}$, $\left\{x \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{1}{k\pi}\right\}$, onde k é qualquer inteiro; (b) $\sec(x - \pi)$, $\{x \mid x \neq \pi \text{ e } x \neq (k + \frac{1}{2})\pi\}$, onde k é qualquer inteiro

---

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 1 (Página 52)

1. $[5, +\infty)$ **3.** $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$ **5.** $(-\frac{3}{2}, 1)$ **7.** $[-3, \frac{3}{2}]$ **9.** $(-\frac{4}{3}, 4)$ **11.** $(-\infty, -6) \cup (-1, +\infty)$ **13.** $\{-3, \frac{9}{2}\}$ **15.** $\{-2, 2\}$
17. $-4, 14$ **19.** $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 75 = 0$ **21.** Veja Fig. 1-21 **23.** Veja Fig. 1-23 **25.** Veja Fig. 1-25 **29.** 15 **31.** $(-2, -5); (3, -6)$
35. $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0$

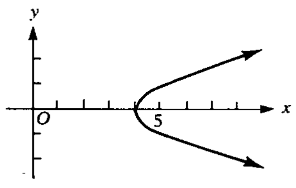


FIGURA 1-21

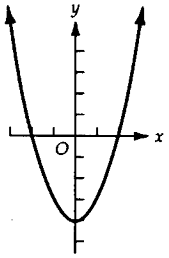


FIGURA 1-23

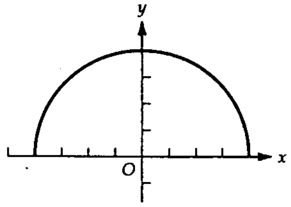


FIGURA 1-25

37. $(\frac{3}{2}, -1)$; 1 **39.** $3x - y + 9 = 0$ **41.** $5x + 2y - 19 = 0$ **43.** $7x^2 + 7y^2 + 11x - 19y - 6 = 0$ **45.** $12x + 3y - 2 = 0$
47. $0 \leqslant k \leqslant 2$ **49.** (a) 35; (b) $3x^4 + x^2 + 5$; (c) $6x + 3h - 1$ **51.** (a) ímpar; (b) par; (c) nem um nem outro; (d) ímpar
53. (a) $x^2 + 4x - 7$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (b) $x^2 - 4x - 1$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (c) $4x^3 - 3x^2 - 16x + 12$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (d) $\dfrac{x^2 - 4}{4x - 3}$, domínio: $\{x|x \neq \frac{3}{4}\}$; (e) $\dfrac{4x - 3}{x^2 - 4}$, domínio: $\{x|x \neq \pm 2\}$; (f) $16x^2 - 24x + 5$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; (g) $4x^2 - 19$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ **55.** (a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x - 3}$, domínio: $\{x|x \neq -1, x \neq 3\}$; (b) $\dfrac{-x^2 + 4x + 1}{x^2 - 2x - 3}$, domínio: $\{x|x \neq -1, x \neq 3\}$; (c) $\dfrac{x}{x^2 - 2x - 3}$, domínio: $\{x|x \neq -1, x \neq 3\}$; (d) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 3x}$, domínio: $\{x|x \neq -1, x \neq 0, x \neq 3\}$; (e) $\dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$, $\{x|x \neq -1, x \neq 3\}$; (f) $-\dfrac{x + 1}{2x + 3}$, domínio: $\{x|x \neq -\frac{3}{2}, x \neq -1\}$; (g) $\dfrac{1}{x - 2}$, domínio: $\{x|x \neq 2, x \neq 3\}$ **57.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[0, +\infty)$;

Veja Fig. 1-57 **59.** domínio: $\{x|x \neq 2\}$; imagem: $\{y|y \neq 6\}$; Veja Fig. 1-59 **61.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $[-1, +\infty)$;
Veja Fig. 1-61 **63.** domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, 4]$; Veja Fig. 1-63

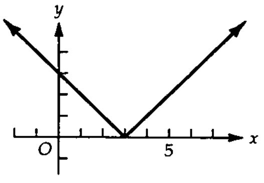


FIGURA 1-57

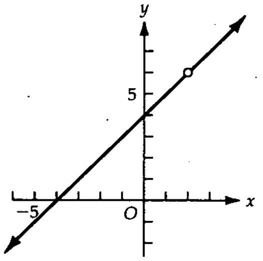


FIGURA 1-59

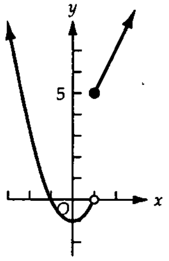


FIGURA 1-61

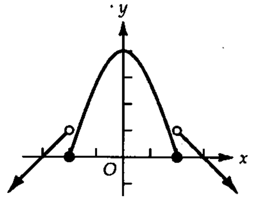


FIGURA 1-63

65. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; (c) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (d) $2 + \sqrt{3}$; (e) -1; (f) $-\dfrac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ **67.** (a) $\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$: (b) 0; (c) $\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$; (d) $\frac{1}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$; (e) $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$; (f) $\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi$
69. 52°, 90°, 106°, 112° **71.** $x = 0$; $3x + 4y = 0$ **75.** medianas interceptam em $(\frac{13}{3}, \frac{13}{3})$; altitudes interceptam em (9, 7); centro da circunferência circunscrita está em (2, 3)

EXERCÍCIOS 2.1 (Página 63)

1. (b) 0,2 **3.** (b) 0,005 **5.** (b) 0,01 **7.** (b) 0,005 **9.** (b) $\frac{1}{1.400}$ **11.** (b) 0,0006 **13.** (b) $\frac{1}{3.000}$ **15.** (b) 0,0075 **17.** (b) 0,0008 **19.** (b) 0,01
21. (b) $\frac{1}{3.000}$ **23.** $\delta = \epsilon$ **25.** $\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon$ **27.** $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$ **29.** $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$ **31.** $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$ **33.** $\delta = \epsilon$ **35.** $\delta = \min(1, \frac{1}{3}\epsilon)$ **37.** $\delta = \min(1, \frac{1}{8}\epsilon)$
39. $\delta = \min(1, \frac{1}{6}\epsilon)$ **41.** $\delta = \min(1, \frac{1}{17}\epsilon)$

EXERCÍCIOS 2.2 (Página 72)

1. 8 **3.** 7 **5.** 0 **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $-\frac{1}{22}$ **11.** $\frac{3}{2}$ **13.** $\frac{2}{3}$ **15.** (a) 0,3333, 0,2857, 0,2564, 0,2506, 0,2501; 0,2000, 0,2222, 0,2439, 0,2494, 0,2499; (b) $\frac{1}{4}$ **17.** (a) 0,2500, 0,2000, 0,1549, 0,1441, 0,1430, 0,1429; 0, 0,0769, 0,1304, 0,1416, 0,1427, 0,1428; (b) $\frac{1}{7}$ **19.** (a) 0,1716, 0,1690, 0,1671, 0,1667, 0,1667, 0,1623, 0,1644, 0,1662, 0,1666, 0,1667; (b) $\frac{1}{6}$ **21.** 14 **23.** -6 **25.** $\frac{16}{7}$ **27.** 12 **29.** $\sqrt{\frac{6}{5}}$ **31.** $\frac{1}{2}$ **33.** $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ **35.** $\frac{1}{3}$ **37.** -1 **39.** $\frac{11}{17}$ **45.** (a) 0; (b) Veja Fig. 2.2-45

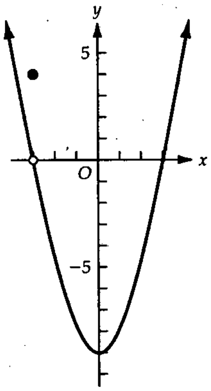


FIGURA 2.2-45

EXERCÍCIOS 2.3 (Página 76)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 21 aparecem nas Figs. 2.3-1 a 2.3-21.)

1. (a) -3; (b) 2; (c) não existe porque $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ **3.** (a) 8; (b) 0; (c) não existe porque $\lim\limits_{t\to -4^+} f(t) \neq \lim\limits_{t\to -4^-} f(t)$ **5.** (a) 4; (b) 4; (c) 4 **7.** (a) 5; (b) 5; (c) 5 **9.** (a) 0; (b) 0; (c) 0 **11.** (a) 0; (b) 0; (c) 0 **13.** (a) -4; (b) -4; (c) -4 **15.** (a) 1; (b) -1; (c) não existe porque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ **17.** (a) 2; (b) 0; (c) não existe porque $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$; (d) 0; (e) -2; (f) não existe porque $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **19.** (a) 0; (b) 0; (c) 0 **21.** (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d) 0; (e) 0; (f) 0 **23.** (a) -2; (b) 2; (c) não existe **25.** (a) 2; (b) 1; (c) não existe **27.** Veja Fig. 2.3-27 (a) -1; (b) 1; (c) não existe **29.** -6 **31.** $a = -\frac{3}{2}$, $b = 1$ **35.** (a) Veja Fig. 2.3-35 (b) 40; (c) 35; (d) 140; (e) 130

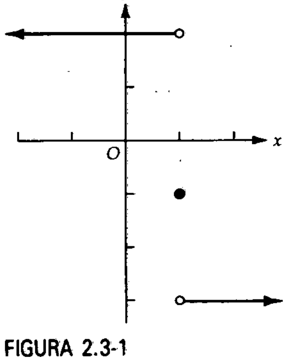


FIGURA 2.3-1

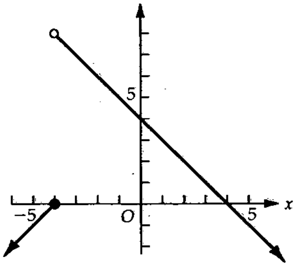


FIGURA 2.3-3

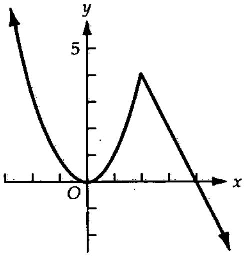


FIGURA 2.3-5

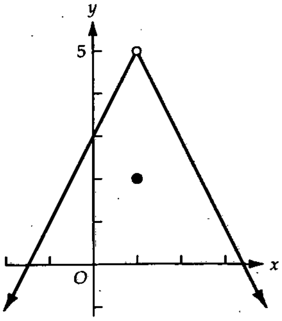


FIGURA 2.3-7

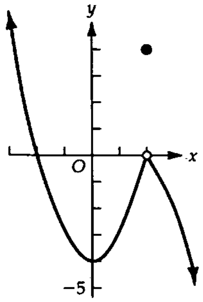


FIGURA 2.3-9

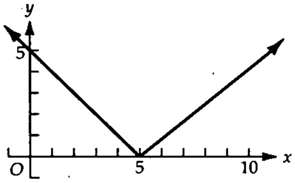


FIGURA 2.3-11

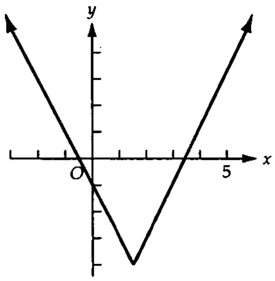


FIGURA 2.3-13

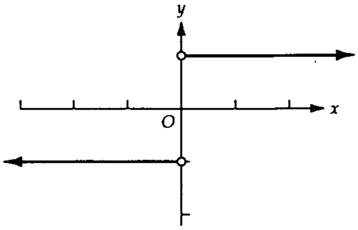


FIGURA 2.3-15

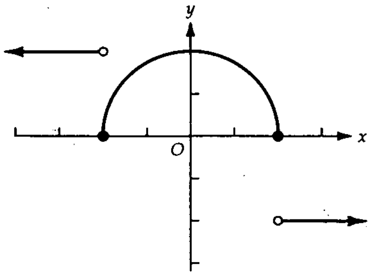


FIGURA 2.3-17

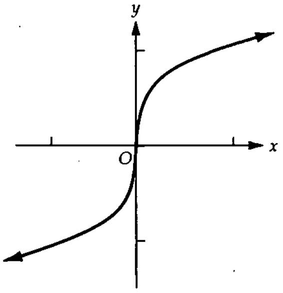


FIGURA 2.3-19

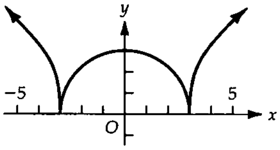


FIGURA 2.3-21

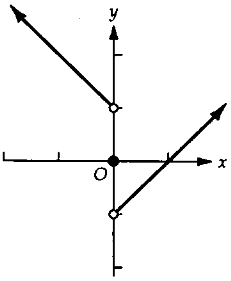


FIGURA 2.3-27

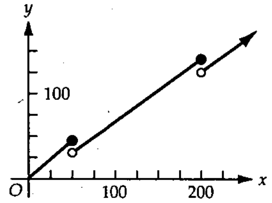


FIGURA 2.3-35

EXERCÍCIOS 2.4 (Página 87)

1. (a) 1, 2, 10, 100, 1.000, 10.000; (b) $+\infty$ **3.** (a) 1, 4, 100, 10.000, 1.000.000, 100.000.000; 1, 4, 100, 10.000, 1.000.000, 100.000.000; (b) $+\infty$
5. (a) -4, -7, -31, -301, -3.001, -30.001; (b) $-\infty$ **7.** (a) -2, -5, -29, -299, -2.999, -29.999; (b) $-\infty$
9. (a) 5, 9, 41, 401, 4.001, 40.001; (b) $+\infty$ **11.** (a) 2,3, 4,3, 20,3, 200,3, 2000,5, 20.037; (b) $+\infty$ **13.** $+\infty$ **15.** $-\infty$ **17.** $-\infty$
19. $+\infty$ **21.** $-\infty$ **23.** $+\infty$ **25.** $+\infty$ **27.** $-\infty$ **29.** $-\infty$ **31.** $-\infty$
(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 33 a 41 aparecem nas Figs. 2.4-33(a) a 2.4-41.)
33. (a) $x = 0$; (b) $x = 0$; (c) $x = 0$; (d) $x = 0$ **35.** $x = 4$ **37.** $x = -3$ **39.** $x = -3$ **41.** $x = -5, x = -3$

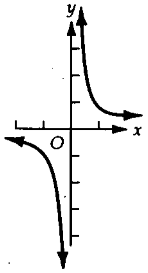


FIGURA 2.4-33(a)

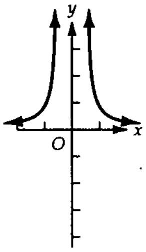


FIGURA 2.4-33(b)

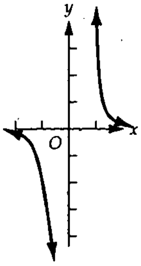


FIGURA 2.4-33(c)

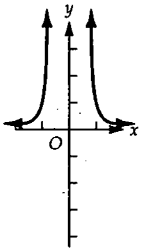


FIGURA 2.4-33(d)

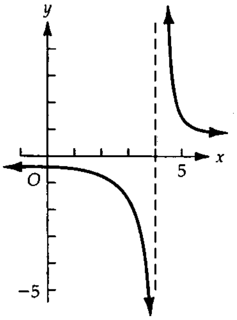


FIGURA 2.4-35

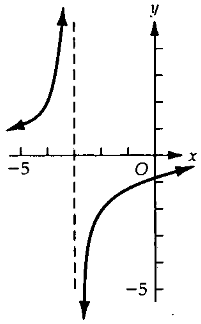


FIGURA 2.4-37

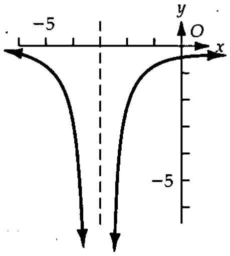


FIGURA 2.4-39

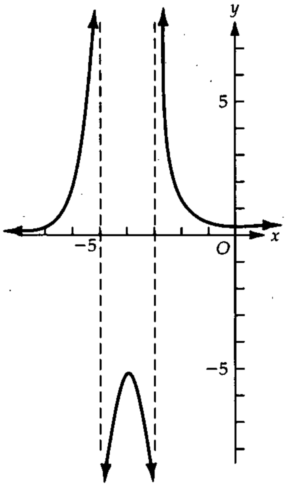


FIGURA 2.4-41

EXERCÍCIOS 2.5 (Página 97)

1. 4, 1, 0,25, 0,1111, 0,0625, 0,0400, 0,0004, 0,000004; 4, 1, 0,25, 0,1111, 0,0625, 0,0400, 0,0004, 0,000004; (c) 0; (d) 0
3. 1, 0,1250, 0,0156, 0,0046, 0,0020, 0,0010, 10^{-6}, 10^{-9}; −1, −0,1250, −0,0156, −0,0046, −0,0020, −0,0010, -10^{-6}, -10^{-9}; (c) 0; (d) 0 **5.** 0, −1,5, −2,4, −2,823, −2,919, −2,953, −2,970, −2,9997, −2,999997; 0, −1,5, −2,4, −2,823, −2,919, −2,953, −2,970, −2,9997, −2,999997; (c) −3; (d) −3 **7.** 3, 2,273, 2,158, 2,015, 2,0015, 2,00015, 2,000015; 1,4, 1,769, 1,857, 1,985, 1,9985, 1,99985, 1,999985; (c) 2; (d) 2 **9.** 0,75, 0,1944, 0,1100, 0,0101, 0,001001, 0,0001, 0,00001; −0,25, −0,1389, −0,0900, −0,0099, −0,0010, −0,0001, −0,00001; (c) 0; (d) 0 **11.** $\frac{2}{5}$ **13.** $-\frac{2}{5}$ **15.** $\frac{7}{3}$ **17.** 0 **19.** $+\infty$ **21.** $\frac{1}{2}$ **23.** $+\infty$ **25.** $-\infty$ **27.** 1 **29.** −1 **31.** 0 **33.** $-\infty$ **35.** 0
(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 37 a 55 aparecem nas Figs. 2.5-37 a 2.5-55.)
37. $y = 2, x = 3$ **39.** $y = 1, x = 0$ **41.** $y = 0, x = -2, x = 2$ **43.** $y = 4, x = -3, x = 3$ **45.** $y = 0, x = \frac{2}{3}, x = -\frac{5}{2}$
47. $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$ **49.** $y = \frac{2}{3}, x = \frac{4}{3}$ **51.** $y = 1, y = -1$ **53.** $y = -1, y = 1, x = 3$ **55.** $y = 2, x = -1, x = 1$
57. tome $N = 1 + \dfrac{1}{\epsilon}$ **59.** tome $N = \sqrt{\dfrac{2}{\epsilon} - 1}$ **61.** tome $N = \dfrac{\epsilon - 7}{2\epsilon}$

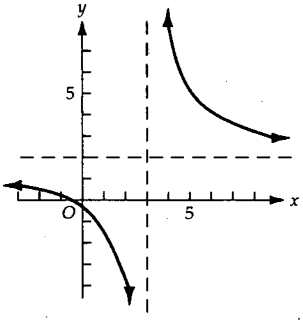


FIGURA 2.5-37

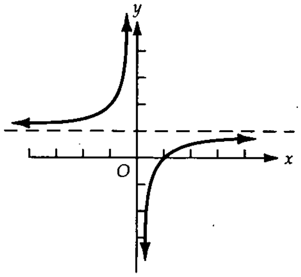


FIGURA 2.5-39

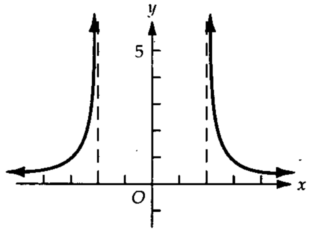


FIGURA 2.5-41

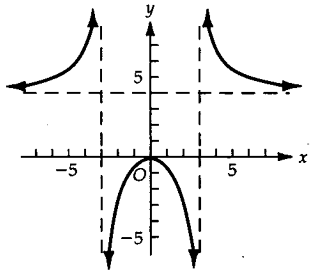


FIGURA 2.5-43

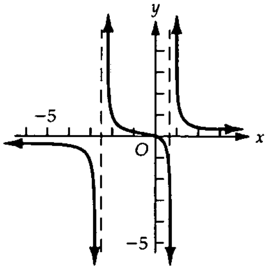


FIGURA 2.5-45

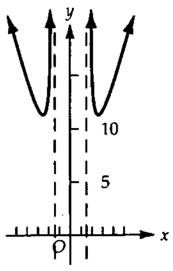


FIGURA 2.5-47

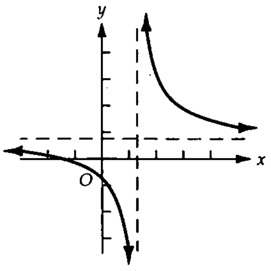


FIGURA 2.5-49

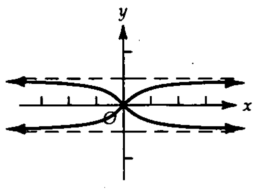


FIGURA 2.5-51

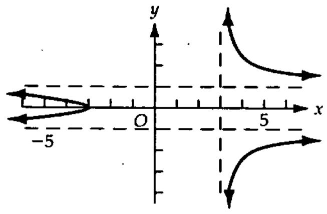


FIGURA 2.5-53

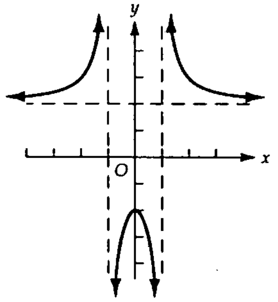


FIGURA 2.5-55

EXERCÍCIOS 2.6 (Página 105)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 13 aparecem nas Figs. 2.6-1 a 2.6-13.)

1. -3; $f(-3)$ não existe **3.** -3; $\lim\limits_{x \to -3} g(x) \neq g(-3)$ **5.** 4; $h(4)$ não existe **7.** 4; $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ não existe **9.** $-2, 2$; $F(-2)$ e $F(2)$ não existem **11.** $-2, 2$; $G(-2)$ e $G(2)$ não existem **13.** 0; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe **15.** (Veja Fig. 2.3-9) 2, $\lim\limits_{t \to 2} g(t) \neq g(2)$ **17.** Veja Fig. 2.6-17, 0; $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ não existe **19.** Veja Fig. 2.3-15, 0; $f(0)$ não existe **21.** todos os inteiros; $\lim\limits_{x \to k} [\![x]\!]$ não existe se k for um inteiro qualquer inteiro **23.** removível; 4 **25.** essencial **27.** removível; 0 **29.** essencial **31.** removível; $-\frac{1}{6}$ **33.** todos os números reais **35.** todos os números reais exceto 3 **37.** todos os números reais exceto -2 e 2 **39.** todos os números reais exceto 2 **41.** todos os números reais exceto 1 **43.** (b) 50 e 200 **45.** Veja a Fig. 2.6-45, f é contínua em toda parte

47. Seja $g(0) = \dfrac{1}{3a^2}$ **51.** $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < a \\ 1 \text{ se } a \leqslant x \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x < a \\ 0 \text{ se } a \leqslant x \end{cases}$

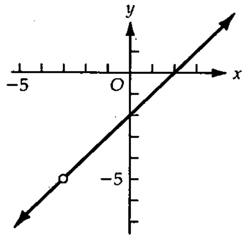


FIGURA 2.6-1

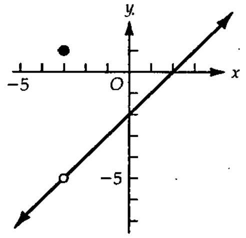


FIGURA 2.6-3

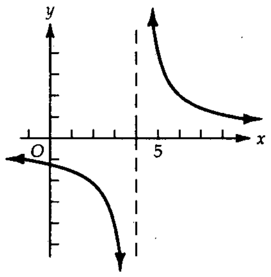


FIGURA 2.6-5

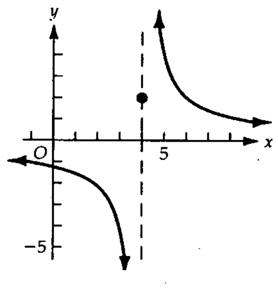


FIGURA 2.6-7

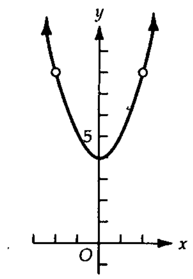


FIGURA 2.6-9

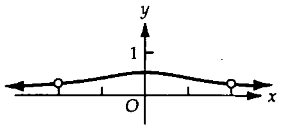


FIGURA 2.6-11

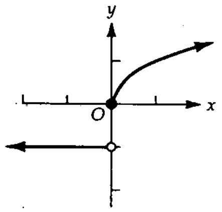


FIGURA 2.6-13

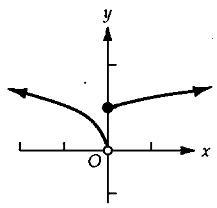


FIGURA 2.6-17

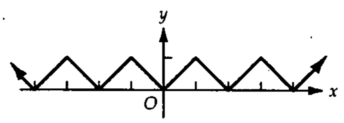


FIGURA 2.6-45

EXERCÍCIOS 2.7 (Página 112)

1. $(f \circ g)(x) = \sqrt{9 - x^2}$; contínua em todos os números em $(-3, 3)$ **3.** $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 16}$; contínua em todos os números em $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ **5.** $(f \circ g)(x) = x^{3/2}$; contínua em todos os números positivos **7.** $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x - 2}$; contínua em todos os números exceto 2 **9.** $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$; contínua em todos números em $(2, +\infty)$ **11.** $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 2}$; contínua em todos os números positivos exceto 4 **13.** $(f \circ g)(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{|x| - 1}}$; contínua em todos os números em $(-2, -1) \cup (1, 2)$
15. contínua; descontínua; descontínua; contínua; descontínua; contínua **17.** contínua; contínua; descontínua; contínua, descontínua; contínua
19. contínua; contínua; contínua; contínua; descontínua **21.** contínua; descontínua; descontínua; descontínua; contínua
23. contínua; contínua; contínua; contínua; descontínua; descontínua **25.** $[-3, 3]$ **27.** $(-\infty, -4] \cup (4, +\infty)$ **29.** $(2, +\infty)$
31. $[0, 4) \cup (4, +\infty)$ **33.** $[-2, -1) \cup (1, 2]$ **35.** Veja Fig. 2.7-35 **37.** Veja Fig. 2.7-37 **39.** $(-\infty, -2) \cup [-2, 2] \cup (2, +\infty)$
41. (a) $V(x) = x(8 - 2x)(15 - 2x)$; (b) $[0, 4]$ **43.** (a) $A(x) = x(120 - x)$; (b) $[0, 120]$
(Esboços dos gráficos dos exercícios de 45 a 55 aparecem nas Figs. 2.7-45 a 2.7-55.)
45. $k = 5$ **47.** $c = -3$, $k = 4$ **49.** $c = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ **51.** $c = -4$ **53.** f é descontínua em -2 **55.** f é descontínua em 1
57. não; f será contínua em $[a, c]$ se $\lim\limits_{x \to b} g(x)$ existir e for igual a $h(b)$ **59.** $\sqrt{10} - 3$

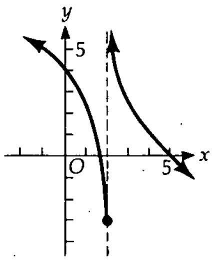


FIGURA 2.7-35

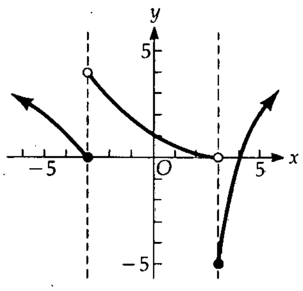


FIGURA 2.7-37

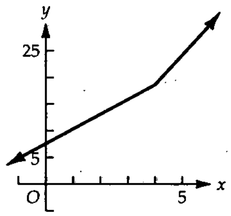


FIGURA 2.7-45

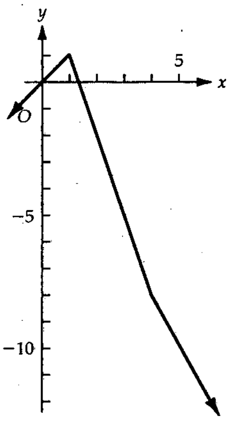


FIGURA 2.7-47

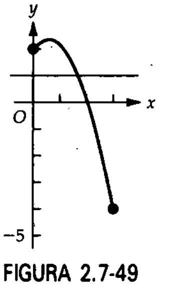


FIGURA 2.7-49

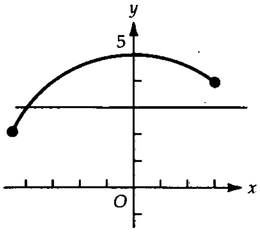


FIGURA 2.7-51

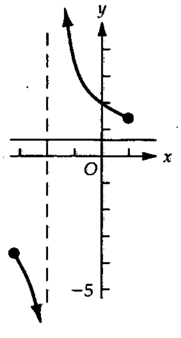


FIGURA 2.7-53

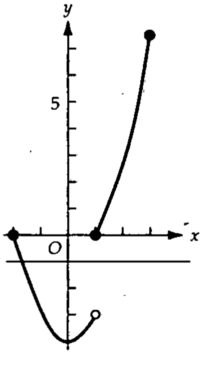


FIGURA 2.7-55

EXERCÍCIOS 2.8 (Página 122)

1. 4 **3.** $\frac{9}{7}$ **5.** $\frac{3}{5}$ **7.** $\frac{1}{9}$ **9.** 0 **11.** 0 **13.** 12 **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** $+\infty$ **19.** 0 **21.** 0 **23.** -1 **25.** 3 **27.** 0 **29.** -4
31. 1 **33.** 0

EXERCÍCIOS 2.9 (Página 130)

1. 1 **3.** -1 **5.** 1 **7.** 2 **9.** -2 **11.** $\sqrt{3}$ **13.** não

EXERCÍCIOS 2.10 (Página 134)

1. qualquer intervalo (a, b) onde $-2 < a < 3$ e $b > 3$ **3.** qualquer intervalo (a, b) onde $0 \leqslant a < 1$ e $b > 1$
5. qualquer intervalo (a, b) onde $a < -3$ e $-3 < b < 3$ **7.** qualquer intervalo (a, b) onde $-4 \leqslant a < 0$ e $b > 0$
9. (a) $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$; (b) (a, b) onde $a < k < b \leqslant -1$ ou $0 \leqslant a < k < b$ **11.** (a) todos os números no intervalo $(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$; (b) (a, b) onde $-\frac{7}{2} \leqslant a < b \leqslant -2$ ou $-2 \leqslant a < b \leqslant \frac{3}{2}$ **13.** Veja Fig. 2.10-13 **15.** Veja Fig. 2.10-15

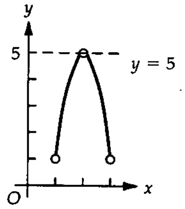


FIGURA 2.10-13

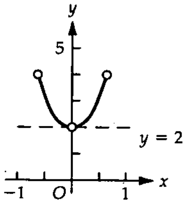


FIGURA 2.10-15

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 2 (Página 135)

1. 9 **3.** -6 **5.** $\sqrt[3]{2}$ **7.** $-\frac{1}{6}$ **9.** $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$ **11.** $\delta = \frac{1}{3}\epsilon$ **13.** $\delta = \min(1, \frac{1}{9}\epsilon)$ **15.** $\delta = \min(1, \frac{1}{2}\epsilon)$ **17.** $\delta = \frac{1}{4}\epsilon$ **19.** $-\frac{5}{2}$ **21.** 8
23. $\frac{1}{3}$ **25.** $-\infty$ **27.** $+\infty$ **29.** $-\infty$ **31.** 3 **33.** $-\infty$ **35.** 0 **37.** $\frac{1}{3}$ **39.** $\frac{5}{2}$ **41.** 0 **43.** $\frac{1}{3}$ **45.** $\dfrac{2}{3a^{1/3}}$ **47.** $-\frac{1}{2}$

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 49 a 61 aparecem nas Figs. 2-49 a 2-61.)
49. $y = 1, x = 4$ **51.** $y = 1, x = 0$ **53.** $y = 5, x = 2, x = -2$ **55.** $y = 3, x = -4$ **57.** -2, 1; $f(-2)$ e $f(1)$ não existem
59. -2; $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$ não existe **61.** 0, 1; $h(0)$ não existe, $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ não existe **63.** $(f \circ g)(x) = \sqrt{25 - x^2}$; contínua em todos números em $(-5, 5)$

65. $(f \circ g)(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{3 - |x|}}$; contínua em todos os números em $(-3, -2) \cup (2, 3)$

67. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } & x < -1 \\ 0 \text{ se } & x = -1 \\ -1 \text{ se } & -1 < x < 1 \\ 0 \text{ se } & x = 1 \\ 1 \text{ se } & x > 1 \end{cases}$; contínua em todos os números reais exceto -1 e 1

69. $[-5, 5]$ **71.** $(-3, -2] \cup [2, 3)$ **73.** $(-\infty, -4) \cup [-4, 4) \cup [4, +\infty)$ **75.** removível, $\frac{6}{5}$ **77.** essencial **79.** 0
81. Veja Fig. 2-81, $a = 10$, $b = -23$ **83.** (a) Veja Fig. 2-83; (b) todos os valores de a; (c) todos os não-inteiros

85. Veja Fig. 2-85. (a) sim; (b) não **87.** Veja a função sinal **89.** Veja Fig. 2-89, $c = \sqrt{7}$ **91.** $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$
95. 2 **97.** 3 **99.** (b) qualquer intervalo (a, b) onde $-2 \leqslant a < -\frac{3}{2} < b \leqslant \frac{3}{2}$

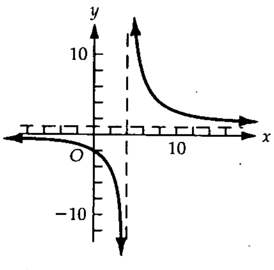


FIGURA 2-49

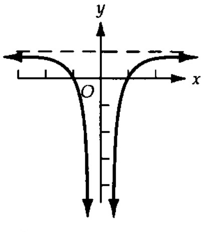


FIGURA 2-51

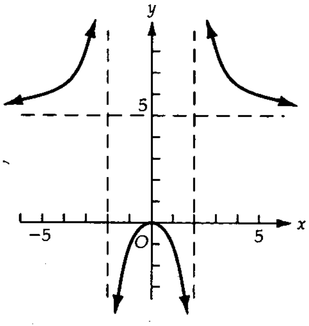


FIGURA 2-53

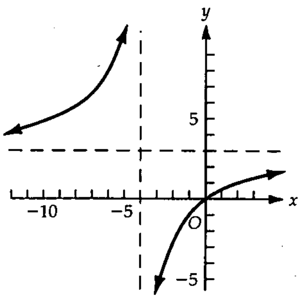


FIGURA 2-55

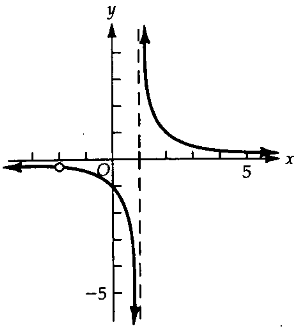


FIGURA 2-57

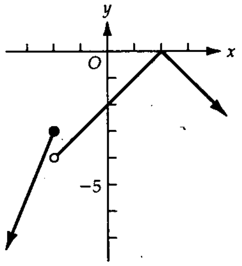


FIGURA 2-59

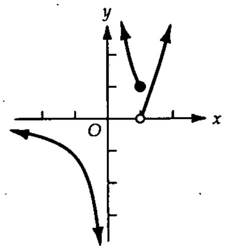


FIGURA 2-61

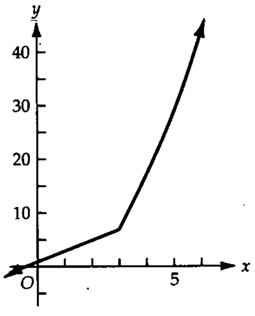


FIGURA 2-81

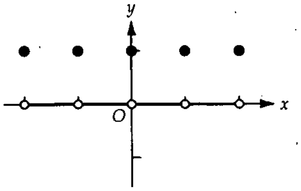


FIGURA 2-83

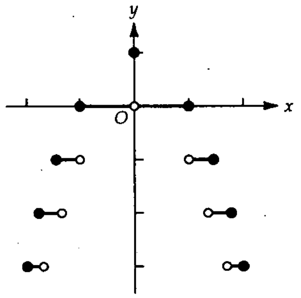


FIGURA 2-85

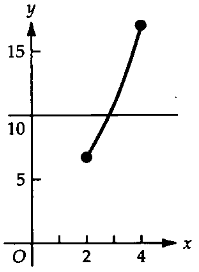


FIGURA 2-89

EXERCÍCIOS 3.1 (Página 147)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 11 aparecem nas Figs. 3.1-1 a 3.1-11.)

1. $-2x_1$ **3.** $-4x_1 + 4$ **5.** $3x_1^2$ **7.** $6x_1 - 12$ **9.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{4 - x_1}}$ **11.** $3x_1^2 - 12x_1 + 9$ **13.** $8x + y + 9 = 0$; $x - 8y + 58 = 0$
15. $6x - y - 16 = 0$; $x + 6y - 52 = 0$ **17.** $2x + 3y - 12 = 0$; $3x - 2y - 5 = 0$ **19.** $4x + y = 0$; $x - 4y = 0$ **21.** $8x - y - 5 = 0$
23. $4x + 4y - 11 = 0$ **25.** 7 **27.** 0 **29.** $-4x$ **31.** $-3x^2$ **33.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **35.** $\dfrac{-13}{(3x - 2)^2}$ **37.** $-\dfrac{2}{x^3} - 1$
39. (a) e (c) 7, 6,5, 6,1, 6,01, 6,001, 5, 5,5, 5,9, 5,99, 5,999; (b) e (d) 6 **41.** (a) e (c) 0,2361, 0,2426, 0,2485, 0,2498, 0,2499; 0,2679, 0,2583, 0,2515, 0,2502, 0,2500; (b) e (d) $\frac{1}{4}$ **43.** -10 **45.** $-\frac{3}{128}$ **47.** -12 **49.** $-\frac{1}{27}$ **51.** $-\frac{8}{x^3} + 3$ **53.** $-\dfrac{7}{2\sqrt{2 - 7x}}$
55. $\dfrac{1}{3x^{2/3}}$ **57.** $g(a)$ **61.** $2a$

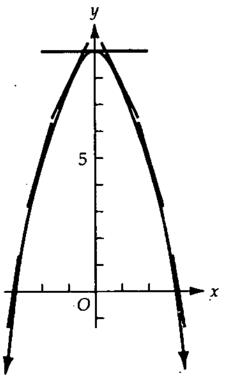


FIGURA 3.1-1

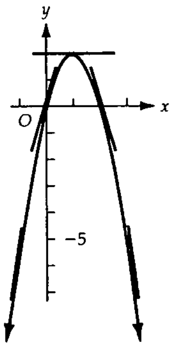


FIGURA 3.1-3

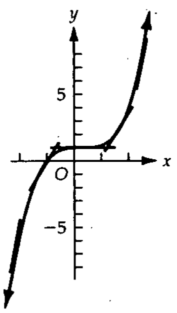


FIGURA 3.1-5

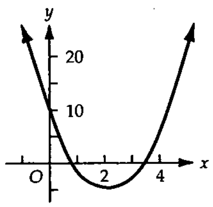


FIGURA 3.1-7

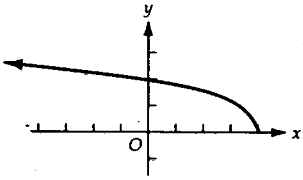


FIGURA 3.1-9

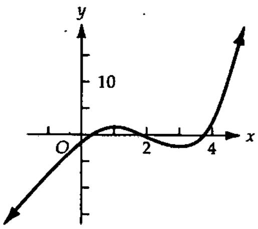


FIGURA 3.1-11

EXERCÍCIOS 3.2 (Página 155)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 27 aparecem nas Figs. 3.2-1 a 3.2-27.)
1. (b) sim; (c) 1, −1; (d) não **3.** (b) sim; (c) −1, 1; (d) não **5.** (b) sim; (c) 0, 1; (d) não **7.** (b) sim; (c) 0, 0; (d) sim **9.** (b)sim; (c) não existe, 0; (d) não **11.** (b) sim; (c) 8, 8; (d) sim **13.** (b) sim; (c) nem um nem outro existem; (d) não **15.** (b) sim; (c) −6, −6; (d) sim **17.** (b) não; (c) 1,0; (d) não **19.** (b) não; (c) 12, 12; (d) não **27.** (b) 0 **29.** (a) 3; (b) não **31.** $a = 8$, $b = -9$

33. Veja Fig. 3.2-33. (a) 0; (b) 1; (c) não existe **39.** (a) $I(x) = \begin{cases} 15x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 150 \\ 22{,}5x - 0{,}05x^2 & \text{se } 150 < x \leqslant 250 \end{cases}$ **41.** (a) $n > 1$; (b) $n > 1$

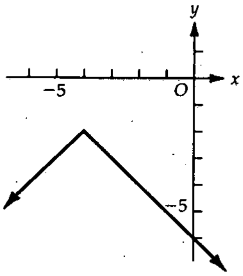


FIGURA 3.2-1

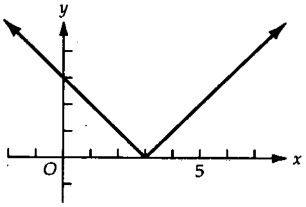


FIGURA 3.2-3

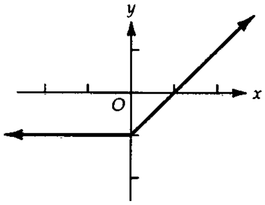


FIGURA 3.2-5

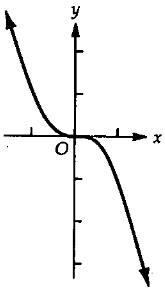


FIGURA 3.2-7

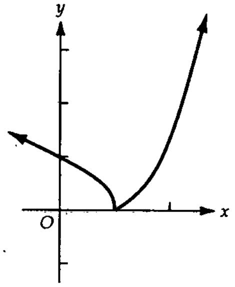


FIGURA 3.2-9

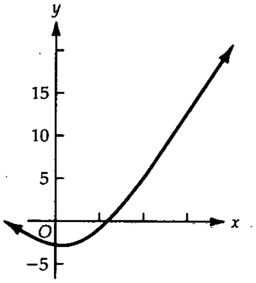


FIGURA 3.2-11

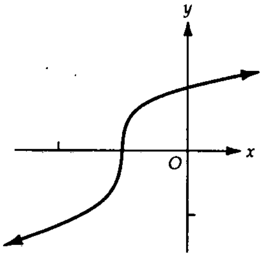


FIGURA 3.2-13.

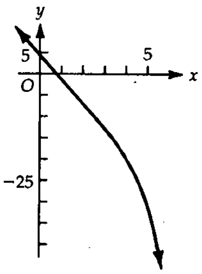


FIGURA 3.2-15

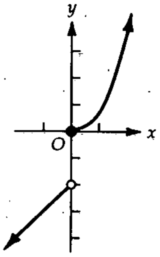


FIGURA 3.2-17

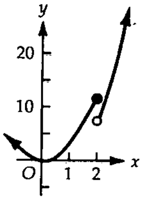


FIGURA 3.2-19

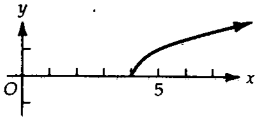


FIGURA 3.2-21

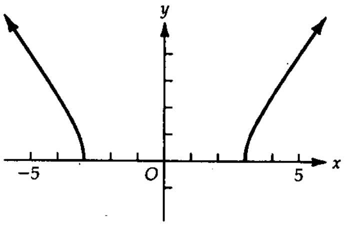


FIGURA 3.2-23

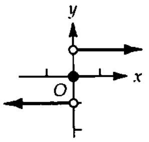


FIGURA 3.2-25

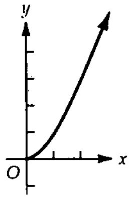


FIGURA 3.2-27

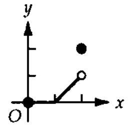


FIGURA 3.2-33

EXERCÍCIOS 3.3 (Página 162)

1. 7 **3.** $-2 - 2x$ **5.** $3x^2 - 6x + 5$ **7.** $x^7 - 4x^3$ **9.** $t^3 - t$ **11.** $4\pi r^2$ **13.** $2x + 3 - \frac{2}{x^3}$ **15.** $16x^3 + \frac{1}{x^5}$ **17.** $-\frac{6}{x^3} - \frac{20}{x^5}$
19. $3\sqrt{3}s^2 - 2\sqrt{3}s$ **21.** $70x^6 + 60x^4 - 15x^2 - 6$ **23.** $-18y^2(7 - 3y^3)$
25. $10x^4 - 24x^3 + 12x^2 + 2x - 3$ **27.** $-\frac{1}{(x-1)^2}$ **29.** $-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$ **31.** $\frac{5(1-2t^2)}{(1+2t^2)^2}$ **33.** $\frac{48y^2}{(y^3+8)^2}$ **35.** $\frac{6(x^2+10x+1)}{(x+5)^2}$
37. $12x - y = 20$ **39.** $x + 20y + 96 = 0$ **41.** $2x - y = 3$ **43.** $x + 8y + 2 = 0$; $x + 8y - 2 = 0$ **45.**$28x - y = 99$; $4x - y = 3$
49. $2(3x + 2)(6x^2 + 2x - 3)$ **51.** $3(2x^2 + x + 1)^2(4x + 1)$

EXERCÍCIOS 3.4 (Página 171)

1. $v(t) = 6t$; 18 **3.** $v(t) = -\frac{1}{4t^2}$; -1 **5.** $v(t) = 6t^2 - 2t$; 8 **7.** $v(t) = \frac{8}{(4+t)^2}$; $\frac{1}{2}$ **9.** $t < -3$, move-se para a direita; $-3 < t < 1$, move-se para a esquerda; $t > 1$ move-se para a direita; muda de direção quando $t = -3$ e $t = 1$ **11.** $t < -2$, move-se para a direita; $-2 < t < \frac{1}{2}$, move-se para a esquerda; $t > \frac{1}{2}$, move-se para a direita; muda de direção quando $t = -2$ e $t = \frac{1}{2}$
13. $t < -3$, move-se para a esquerda; $-3 < t < 3$, move-se para a direita; $t > 3$, move-se para a esquerda; muda de direção quando $t = -3$ e $t = 3$
15. (a) -32 cm/s; (b) -64 cm/s; (c) 4 s; (d) -128 cm/s **17.** 160 cm/s **19.** (a) $(20t_1 + 24)$ cm/s; (b) $\frac{6}{5}$ s **21.** (a) 8,600; (b) 8,300; (c) 8,100; (d) 8,050; (e) 8 **25.** (a) $-2{,}9$ graus por hora, (b) -3 graus por hora **27.** (a) 18.750 litros por minuto; (b) 17.500 litros por minuto
29. (a) $C'(x) = 3 + 2x$; (b) \$83; (c) \$84 **31.** (a) $R'(x) - 600 - \frac{3}{20}x^2$; (b) \$540; (c) \$536,95 **33.** (a) \$3,6 milhões por ano; (b) 23,1 %; (c) \$6,8 milhões por ano; (d) 18,7 % **35.** (a) 920 pessoas por ano; (b) 6,1 %; (c) 1.400 pessoas por ano; (d) 6,4 %
37. (a) lucrativo; (b) não-lucrativo; (c) 90

EXERCÍCIOS 3.5 (Página 180)

3. $3 \cos x$ **5.** $\sec^2 x - \text{cosec}^2 x$ **7.** $2(\cos t - t \,\text{sen}\, t)$ **9.** $x \cos x$ **11.** $4 \cos 2x$ **13.** $-x^2 \,\text{sen}\, x$ **15.** $3 \sec x(2 \,\text{tg}^2 x + 1)$
17. $-\text{cosec}\, y(2 \,\text{cotg}^2 y + 1)$ **19.** $-\frac{2(z+1)\,\text{sen}\, z + 2\cos z}{(z+1)^2}$ **21.** $\frac{1}{\cos x - 1}$ **23.** $\frac{1 - 4\sec t + \text{sen}^2 t}{\cos t(\cos t - 4)^2}$ **25.** $\frac{2\cos y}{(1 - \text{sen}\, y)^2}$
27. $(1 - \cos x)(x + \cos x) + (1 - \text{sen}\, x)(x - \text{sen}\, x)$ **29.** $-\frac{5\,\text{cosec}\, t\,\text{cotg}\, t}{(\text{cosec}\, t + 2)^2}$ **31.** 1 **33.** $-\frac{2}{\pi}$ **35.** π^2 **37.** 2 **39.** $\sqrt{2}$ **41.** $-\frac{10}{3}$
43. (a) 0,0226, 0,2674, 0,4559, 0,4956, 0,4995; 0,8188, 0,6915, 0,5424, 0,5043, 0,5006; (b) $\frac{1}{2}$ **45.** (a) 2,2305, 2,0203, 2,0020, 2,0002, 2,0000; 1,8237, 1,9803, 1,9980, 1,9998, 2,0000; (b) 2 **47.** (a) $-0{,}4771$, $-0{,}4886$, $-0{,}4977$, $-0{,}4989$, $-0{,}4998$; $-0{,}5224$, $-0{,}5113$, $-0{,}5023$, $-0{,}5011$, $-0{,}5002$; (b) $-\frac{1}{2}$ **49.** (a) 0,4929, 0,5736, 0,6468, 0,6567, 0,6647; 0,9116, 0,7770, 0,6872, 0,6768, 0,6687; (b) $\frac{2}{3}$ **51.** (a) $x - y = 0$; (b) $x - 2y + \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi = 0$; (c) $x + y - \pi = 0$ **53.** (a) $x - y = 0$; (b) $4x - 2y + 2 - \pi = 0$; (c) $4x - 2y - 2 + \pi = 0$
55. (a) $4 \cos t$; (b) $v(0) = 4$, $v(\frac{1}{3}\pi) = 2$, $v(\frac{1}{2}\pi) = 0$, $v(\frac{2}{3}\pi) = -2$, $v(\pi) = -4$ **57.** (a) $3 \,\text{sen}\, t$; (b) $v(0) = 0$, $v(\frac{1}{6}\pi) = \frac{3}{2}$, $v(\frac{1}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $v(\frac{1}{2}\pi) = 3$, $v(\frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $v(\frac{5}{6}\pi) = \frac{3}{2}$, $v(\pi) = 0$ **59.** $\frac{\sqrt{2}}{9}$ W; (b) $2W$

EXERCÍCIOS 3.6 (Página 189)

1. $6(2x + 1)^2$ **3.** $8(x + 2)(x^2 + 4x - 5)^3$ **5.** $2(2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)(8t^3 - 21t^2 + 2)$ **7.** $\frac{-4x}{(x^2+4)^3}$ **9.** $-12(\text{sen}\, 3x + \cos 4x)$
11. $2 \sec 2x \,\text{tg}^3\, 2x$ **13.** $2 \sec^2 x \,\text{tg}\, x(2 \,\text{tg}^2 x + 1)$ **15.** $4 \,\text{cotg}\, t \,\text{cosec}^2 t$ **17.** $6(3u^2 + 5)^2(3u - 1)(12u^2 - 3u + 5)$

19. $-2(2x-5)^{-2}(4x+3)^{-3}(12x-17)$ **21.** $10(r^2+1)^2(2r-1)(r+3)(2r^3+4r^2-r+1)$ **23.** $\dfrac{18(y-7)}{(y+2)^3}$

25. $-\dfrac{9(2x-1)^2(2x^2-2x+1)}{(3x^2+x-2)^4}$ **27.** $\dfrac{2z(z^2-5)^2(z^2+22)}{(z^2+4)^3}$ **29.** $6t\,\text{sen}(6t^2-2)$ **31.** $6(\text{tg}^2\,x-x^2)^2(\text{tg}\,x\sec^2 x-x)$

33. $\dfrac{6\cos 2y(\text{sen}^2\,2y+2)}{(\cos^2 2y+1)^2}$ **35.** $-12\cos 3x\,\text{sen}(\text{sen}\,3x)$ **37.** $24x+y+39=0$; $y=0$; $y=1$; $y=0$; $24x-y-39=0$. Veja Fig. 3.6-37

39. (a) $\dfrac{8t(t^2-1)}{(t^2+1)^3}$ cm/s; (b) 0 cm/s; $\frac{48}{125}$ cm/s

41. (a) $(5\pi\cos\pi t-3\pi\,\text{sen}\,\pi t)$ cm/s; (b) $\sqrt{2}\pi$ cm/s, 3π cm/s **43.** (a) 6.000 sen $\frac{12}{5}\pi\approx 1.854$; (b) 6.000 **45.** (a) $5\sqrt{3}$; (b) 10

47. 329 predadores/semana **49.** (a) $3x^4$; (b) $6x^5$ **55.** Veja Figura 9 na Secção 1.5. **57.** Veja Fig. 1.5-37

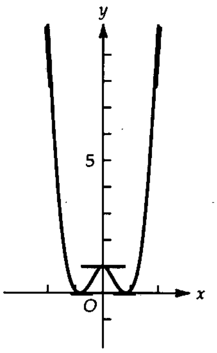


FIGURA 3.6-37

EXERCÍCIOS 3.7 (Página 194)

1. $x^{-1/2}(2-\frac{5}{2}x^{-1})$ **3.** $\dfrac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}$ **5.** $\dfrac{-2}{(5-3x)^{1/3}}$ **7.** $\dfrac{y}{(25-y^2)^{3/2}}$ **9.** $-\dfrac{\text{sen}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ **11.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{r}}\,\text{cosec}^2\sqrt{3r}$ **13.** $-\dfrac{3\cos 3x}{2(\text{sen}\,3x)^{3/2}}$

15. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\sec^2\sqrt{x^2+1}$ **17.** $\dfrac{17}{2[(2x-5)(3x+1)^3]^{1/2}}$ **19.** $\dfrac{6x^2-10x+1}{3(2x^3-5x^2+x)^{2/3}}$ **21.** $\dfrac{1}{\sqrt{2r}}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)$

23. $\frac{1}{4}x(5-x^2)^{-1/2}(x^3+1)^{-3/4}(-7x^3+15x-4)$ **25.** $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ **27.** $\dfrac{\cos t}{(1-\text{sen}\,t)^{3/2}(1+\text{sen}\,t)^{1/2}}$ **29.** $\dfrac{\sec\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}(\text{tg}^2\sqrt{y}+\sec^2\sqrt{y})$

31. $\dfrac{x+5}{6\sqrt{x-1}\,\sqrt[3]{(x+1)^4}}$ **33.** $\dfrac{-1}{4\sqrt{9+\sqrt{9-x}}\,\sqrt{9-x}}$ **35.** $\dfrac{\text{sen}\,4z}{(1+\cos^2 2z)^{3/2}}$ **37.** $2x+3y=6$; $2\sqrt[3]{4}x+3y=3\sqrt[3]{4}$; $x=1$; $2\sqrt[3]{4}x-3y=\sqrt[3]{4}$; $2x-3y+2=0$ **39.** $4x-5y+9=0$ **41.** $x+4y=0$ **43.** (a) 0; (b) $\frac{1}{2}$; (c) nenhum valor de t

45. (a) 50 centavos por litro; (b) 25 **47.** 100 **49.** 2,7 km/min **51.** $\dfrac{2x(x^2-4)}{|x^2-4|}$ **53.** $3x|x|$

EXERCÍCIOS 3.8 (Página 198)

1. $-\dfrac{x}{y}$ **3.** $\dfrac{8y-3x^2}{3y^2-8x}$ **5.** $-\dfrac{y^2}{x^2}$ **7.** $-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ **9.** $\dfrac{x-xy^2}{x^2y-y}$ **11.** $\dfrac{3x^2-4xy-1}{2x^2+2}$ **13.** $\dfrac{y^{2/3}+y}{24x^{2/3}y^{5/3}-x}$ **15.** $\dfrac{y+4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-x}$

17. $\dfrac{2+5x^2-4x^{3/2}y}{2x^{1/2}(x^2+3)}$ **19.** $\dfrac{\text{sen}(x-y)}{\text{sen}(x-y)-1}$ **21.** $\dfrac{\text{tg}\,x\sec^2 x}{\text{cotg}\,y\,\text{cosec}^2\,y}$ **23.** $\dfrac{y\,\text{sen}\,x-\text{sen}\,y}{x\cos y+\cos x}$ **25.** $\dfrac{2\,\text{tg}\,x\sec^2 x+\text{cosec}^2(x-y)}{2\,\text{tg}\,y\sec^2 y+\text{cosec}^2(x-y)}$

27. $\dfrac{3x^2-4y}{4x-3y^2}$ **29.** $\dfrac{3x^2-y^3}{x^3-6xy}$ **31.** $\dfrac{x^3+8y^3}{4x^3-3x^2y}$ **33.** $2x+y=4$ **35.** $5x-7y+11=0$ **37.** -1 **39.** $(1, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$

41. (a) $f_1(x) = 2\sqrt{x-2}$, domínio: $x \geqslant 2$; $f_2(x) = -2\sqrt{x-2}$, domínio: $x \geqslant 2$; (b)-(c) Veja Figs. 3.8-41(a)-(c); (d) $f_1{}'(x) = (x-2)^{-1/2}$, domínio: $x > 2$; $f_2{}'(x) = -(x-2)^{-1/2}$, domínio: $x > 2$; (e) $\dfrac{2}{y}$; (f) $x - y - 1 = 0$; $x + y - 1 = 0$ **43.** (a) $f_1(x) = \sqrt{x^2-9}$, domínio: $|x| \geqslant 3$; $f_2(x) = -\sqrt{x^2-9}$, domínio: $|x| \geqslant 3$; (b)-(c) Veja Figs. 3.8-43(a)-(c); (d) $f_1{}'(x) = x(x^2-9)^{-1/2}$, domínio: $|x| > 3$; $f_2{}'(x) = -x(x^2-9)^{-1/2}$, domínio: $|x| > 3$; (e) $\dfrac{x}{y}$; (f) $5x + 4y + 9 = 0$; $5x - 4y + 9 = 0$ **45.** (a) $f_1(x) = \sqrt{8 - x^2 + 2x} + 2$, domínio: $-2 \leqslant x \leqslant 4$; $f_2(x) = -\sqrt{8 - x^2 + 2x} + 2$, domínio: $-2 \leqslant x \leqslant 4$; (b)-(c) Veja Figs. 3.8-45(a)-(c); (d) $f_1{}'(x) = (1-x)(8 - x^2 + 2x)^{-1/2}$, domínio: $-2 < x < 4$; $f_2{}'(x) = (x-1)(8 - x^2 + 2x)^{-1/2}$, domínio: $-2 < x < 4$; (e) $\dfrac{1-x}{y-2}$; (f) $y - 5 = 0$, $y + 1 = 0$

47. (a) decrescente a 11,2 nós; (b) crescente a 34,9 nós **49.** $\sqrt{3}x - y + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$; $\sqrt{3}x + y + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$

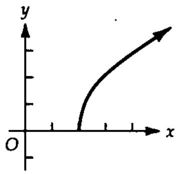


FIGURA 3.8-41(a)

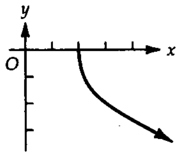


FIGURA 3.8-41(b)

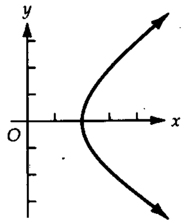


FIGURA 3.8-41(c)

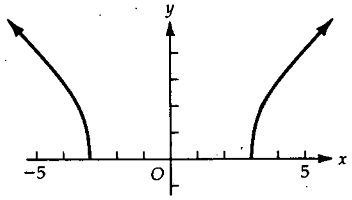


FIGURA 3.8-43(a)

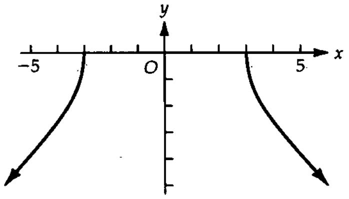


FIGURA 3.8-43(b)

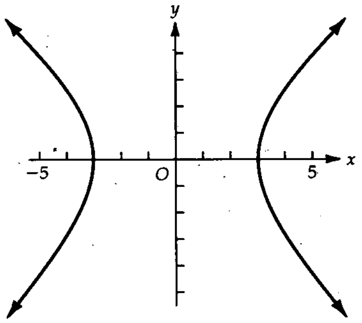


FIGURA 3.8-43(c)

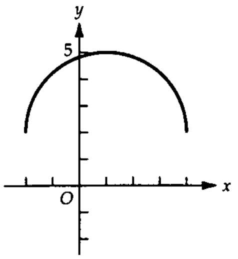


FIGURA 3.8-45(a)

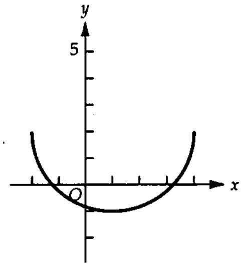


FIGURA 3.8-45(b)

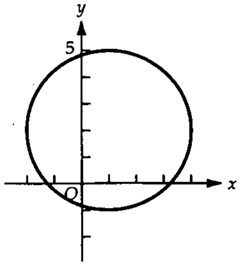


FIGURA 3.8-45(c)

EXERCÍCIOS 3.9 (Página 204)

1. -3 **3.** -2 **5.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **7.** $-\frac{3}{4}$ **9.** $\frac{9}{5}$ m/s **11.** $\dfrac{1}{2\pi}$ cm/min **13.** $\dfrac{5}{8\pi}$ m/min **15.** $\frac{25}{3}$ m/s **17.** $0{,}001\pi$ cm^3/dia **19.** $0{,}004\pi$ cm^2/dia

21. $\dfrac{6}{25\pi}$ m/min **23.** 100 kg/m^2 por minuto. **25.** 128π cm^2/s **27.** 14 m/s **29.** \$1.020 por semana **31.** 875 unidades por mês

33. decrescente à taxa de 55 camisas por semana **37.** 22 m^3/min **39.** $\frac{1}{194}(3\sqrt{97} + 97)$ m/s $\approx$ 0,65 m/s **41.** $\frac{200}{3}$ m/s

43. decrescente à taxa de $\frac{1}{48}$ rad/s

EXERCÍCIOS 3.10 (Página 211)

1. $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1; f''(x) = 20x^3 - 12x$ **3.** $g'(s) = 8s^3 - 12s^2 + 7; g''(s) = 24s^2 - 24s$ **5.** $f'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2} - 5; f''(x) = \frac{15}{4}x^{1/2}$
7. $f'(x) = x(x^2 + 1)^{-1/2}; f''(x) = (x^2 + 1)^{-3/2}$ **9.** $f'(t) = -8t \operatorname{sen} t^2; f''(t) = -16t^2 \cos t^2 - 8 \operatorname{sen} t^2$
11. $G'(x) = -2 \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec}^2 x; G''(x) = 2 \operatorname{cosec}^2 x(3 \operatorname{cotg}^2 x + 1)$ **13.** $g'(x) = \dfrac{8x}{(x^2 + 4)^2}; g''(x) = \dfrac{32 - 24x^2}{(x^2 + 4)^3}$
15. $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x + 1}}; f''(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{\operatorname{sen} x + 1}$ **17.** $24x$ **19.** $1.152(2x - 1)^{-5}$ **21.** $108 \sec^2 3x(3 \operatorname{tg}^2 3x + 1)$ **23.** $-32(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$
29. $-\dfrac{3a^4x^2}{y^7}$ **31.** $-\frac{7}{4}; 5$ **33.** $v = 3t^2 - 18t + 15; a = 6t - 18$; quando $0 < t < 1$, a partícula está à direita da origem, está se movendo para a direita, a velocidade é decrescente e a aceleração é decrescente; quando $1 < t < \frac{1}{2}(9 - \sqrt{21})$, a partícula está à direita da origem, está se movendo para a esquerda, a velocidade é decrescente e a aceleração é crescente; quando $\frac{1}{2}(9 - \sqrt{21}) < t < 3$, a partícula está à esquerda da origem, está se movendo para a esquerda, a velocidade é decrescente e a aceleração é crescente; quando $3 < t < 5$, a partícula está à esquerda da origem, está se movendo para a esquerda, a velocidade é crescente e a aceleração é decrescente; quando $5 < t < \frac{1}{2}(9 + \sqrt{21})$, a patícula está à esquerda da origem, está se movendo para a direita, a velocidade é crescente e a aceleração é crescente; quando $\frac{1}{2}(9 + \sqrt{21}) < t$, a partícula está à direita da origem, está se movendo para a direita, a velocidade é crescente e a aceleração é crescente. **35.** $\frac{3}{2}$ s; $\frac{7}{4}$ m; $-\frac{1}{4}$ m/s
37. $\frac{1}{2}$ s; $\frac{249}{80}$ m; $-\frac{11}{8}$ m/s **39.** $\frac{3}{2}$ s; $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ m; $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ m/s **47.** $f'(x) = 2|x|$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; $f''(x) = 2\dfrac{|x|}{x}$, domínio: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ **49.** $f'(x) = 4|x^3|$, domínio: $(-\infty, +\infty)$; $f''(x) = 12x|x|$, domínio: $(-\infty, +\infty)$ **51.** $f'''(x) = 24|x|$
53. $h''(x) = (f'' \circ g)(x)(g'(x))^2 + (f' \circ g)(x)g''(x)$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 3 (Página 212)

1. $15x^2 - 14x + 2$ **3.** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{8}{x^3}$ **5.** $x^{-1/2} + \frac{1}{4}x^{-3/2}$ **7.** $60t^4 - 39t^2 - 6t - 4$ **9.** $\dfrac{-6x^2}{(x^3 - 1)^2}$ **11.** $4(2s^3 - 3s + 7)^3(6s^2 - 3)$
13. $\dfrac{1 - 2x^3}{3x^{2/3}(x^3 + 1)^{4/3}}$ **15.** $x(4x^2 - 13)(x^2 - 1)^{1/2}(x^2 - 4)^{-1/2}$ **17.** $(x + 1) \operatorname{sen} x + x \cos x$ **19.** $\operatorname{tg} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} \sec^2 \dfrac{1}{x}$
21. $\dfrac{2(1 + t^2) \sec^2 t \operatorname{tg} t - 2t \sec^2 t}{(1 + t^2)^2}$ **23.** $-3 \operatorname{sen} 3w \cos(\cos 3w) + 6 \operatorname{sen} 4w$ **25.** $\dfrac{8x}{3y^2 - 8y}$ **27.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}(x - \sqrt{x^2 - 1})}$ **29.** $\dfrac{\cos x \cos y}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$
31. $2x + 3[x^3 + (x^4 + x)^2]^2[3x^2 + 2(x^4 + x)(4x^3 + 1)]$ **33.** $\dfrac{y - \sec^2 x}{\sec^2 y - x}$ **35.** $x - 2y + 9 = 0; 27x - 54y - 7 = 0$ **37.** $5x - 4y - 6 = 0; 4x + 5y - 13 = 0$ **39.** $(-1,0)$ **41.** $-3(3 - 2x)^{-5/2}$ **43.** $x < -3$ ou $x > -1$ **45.** (a) $t = 3, t = 8$; (b) quando $t = 0, v = 24$, e a partícula está se movendo para a direita; quando $t = 3, v = -15$, e a partícula está se movendo para a esquerda; quando $t = 8, v = 40$, e a partícula está se movendo para a direita **47.** $v^2 = 4(5 - s)(s - 3); a = 16 - 4s$ **49.** (a) 32 m/s; (b) 256 m; (c) 7 s; (d) -128 m/s
51. (a) 8,005; (b) 8 **53.** (a) 3.312,2; (b) 3.212,5 **55.** $-\frac{1}{3}$ **57.** $\dfrac{2}{\sqrt{4x - 3}}$ **59.** $\frac{1}{2}$ **61.** $2(|x + 1| - |x|)\left(\dfrac{x + 1}{|x + 1|} - \dfrac{x}{|x|}\right)$
63. (a) Veja Fig. 3-63; (b) contínua em 3; (c) não-derivável em 3 **65.** (a) Veja Fig. 3-65; (b) 0; (c) 0 **67.** $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$
69. (a) $C'(x) = 2x + 40$; (b) \$80; (c) \$81 **71.** 648 peixes/semana **77.** 10,6 nós **79.** $\dfrac{512}{625\pi}$ cm/s $\approx$ 0,26 cm/s **81.** 9,6 m/s
85. $f(x) = |x|, g(x) = x^2$ **89.** não; se $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ e $g(x) = x + 1$, então f e g são deriváveis em 0; de qualquer modo, $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x}$ e $f \circ g$ não é derivável em 0

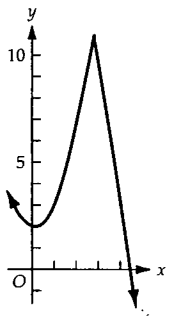


FIGURA 3-63

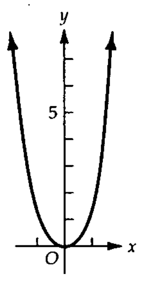


FIGURA 3-65

EXERCÍCIOS 4.1 (Página 223)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 21 a 57 que aparecem nas Figs. 4.1-21 a 4.1-57.)
1. $-5, \frac{1}{3}$ **3.** $-3, -1, 1$ **5.** $0, 2$ **7.** $-2, 0, 2$ **9.** não tem números críticos **11.** não tem números críticos **13.** $\frac{1}{6}k\pi$, quando k é um inteiro qualquer **15.** $\frac{1}{8}(2k + 1)\pi$, onde k é um inteiro qualquer **17.** $\frac{1}{4}k\pi$, onde k é um inteiro qualquer **19.** $-1, \frac{1}{5}, 2$ **21.** mín. abs.: $f(2) = -2$ **23.** não tem extremos abs. **25.** mín. abs.: $f(-\frac{2}{3}\pi) = -1$; máx. abs.: $f(0) = 2$ **27.** mín. abs.: $f(-3) = 0$ **29.** mín. abs.: $h(5) = 1$ **31.** mín. abs.: $F(4) = 1$ **33.** mín. abs.: $g(0) = 2$ **35.** máx. abs.: $f(5) = 2$ **37.** mín. abs.: $f(2) = 0$ **39.** mín. abs.: $g(0) = 1$ **41.** mín. abs.: $g(-3) = -46$; máx. abs.: $g(-1) = -10$ **43.** mín. abs.: $f(-2) = 0$; máx. abs.: $f(-4) = 144$ **45.** mín. abs.: $f(2) = 0$; máx. abs.: $f(3) = 25$ **47.** mín. abs.: $f(-\frac{1}{2}\pi) = -2$; máx. abs.: $f(\frac{1}{2}\pi) = 2$ **49.** não tem extremos abs. **51.** mín. abs.: $f(-1) = -1$; máx. abs.: $f(2) = \frac{1}{2}$ **53.** mín. abs.: $f(1) = -2$; máx. abs.: $f(0) = -\frac{1}{3}$ **55.** mín. abs.: $F(-3) = -13$; máx. abs.: $F(3) = 7$ **57.** mín. abs.: $f(-1) = 0$; máx. abs.: $f(1) = \sqrt[3]{4}$

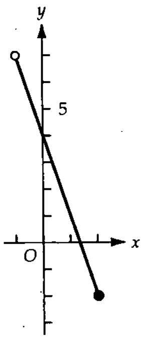


FIGURA 4.1-21

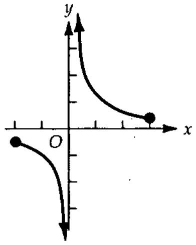


FIGURA 4.1-23

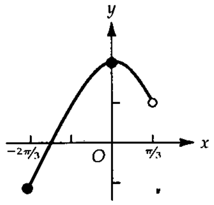


FIGURA 4.1-25

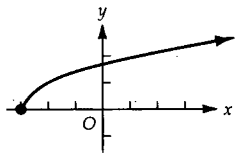


FIGURA 4.1-27

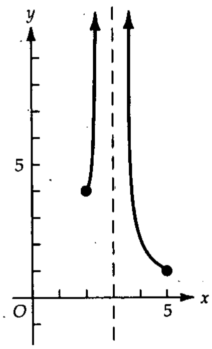


FIGURA 4.1-29

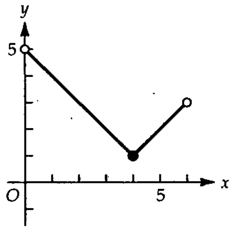


FIGURA 4.1-31

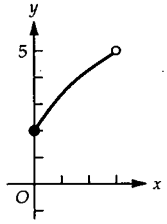


FIGURA 4.1-33

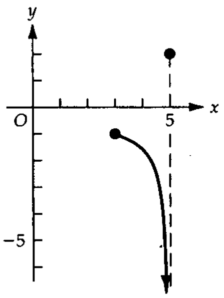


FIGURA 4.1-35

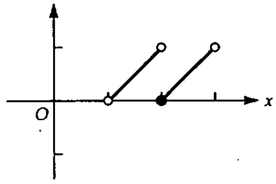


FIGURA 4.1-37

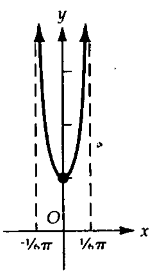


FIGURA 4.1-39

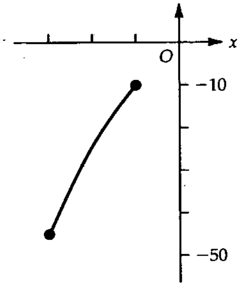


FIGURA 4.1-41

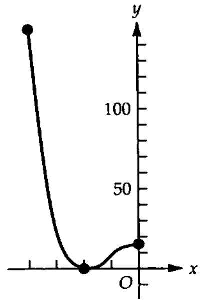


FIGURA 4.1-43

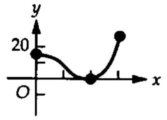


FIGURA 4.1-45

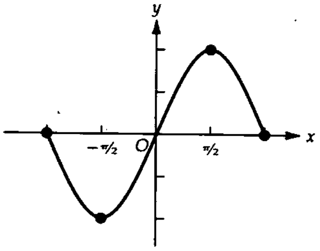


FIGURA 4.1-47

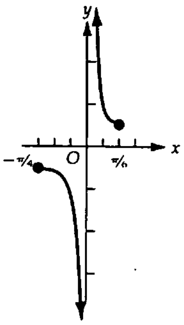


FIGURA 4.1-49

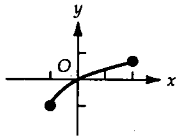


FIGURA 4.1-51

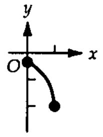


FIGURA 4.1-53

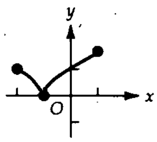


FIGURA 4.1-57

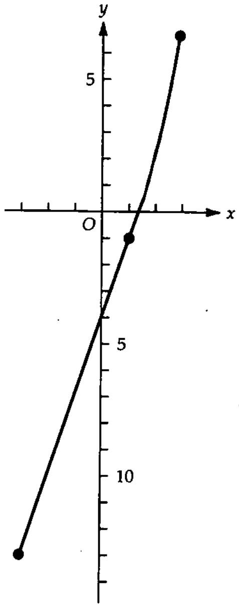


FIGURA 4.1-55

EXERCÍCIOS 4.2 (Página 229)

1. $\frac{5}{3}$ cm **3.** 60 m por 60 m **5.** 60 m por 120 m **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $12\sqrt{3}$ unidades quad. **11.** de A a P a C, onde P fica a 8 km abaixo de B **13.** de A a P a C, onde P fica a 4 km rio abaixo de B **15.** $\frac{1}{4}\pi$ **17.** 225 **19.** 400 **21.** 30 **23.** o raio é $3\sqrt{2}$ cm, a altura é $6\sqrt{2}$ cm. **25.** $\frac{50}{3}$ cm por $\frac{50}{3}$ cm por $\frac{100}{3}$ cm **27.** (a) $\sqrt{50 - 6\sqrt{41}}$ unidades $= (\sqrt{41} - 3)$ unidades $\approx 3{,}4$ unidades; (b) $\sqrt{50 + 6\sqrt{41}}$ unidades $= (\sqrt{41} + 3)$ unidades $\approx 9{,}4$ unidades **29.** $\frac{2}{3}k$ **33.** a largura é $48\sqrt{3}$ cm; a espessura é $48\sqrt{6}$ cm

35. (a) o raio da circunferência é $\dfrac{5}{\pi + 4}$ m e a extensão do lado do quadrado é $\dfrac{10}{\pi + 4}$ m; (b) o raio da circunferência é $\dfrac{5}{\pi}$ m e não há quadrado

EXERCÍCIOS 4.3 (Página 235)

1. 2 **3.** $\frac{1}{4}\pi$ **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** $\frac{8}{27}$ **9.** 0 **11.** (b) (i), (ii), (iii) satisfeitas; (c) $(\frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\sqrt[3]{6})$ **13.** (b) (i) não satisfeita **15.** (b) (ii) não satisfeita **17.** 4 **19.** $\cos c = \frac{2}{\pi}$; $c \approx 0{,}8807$ **21.** (i) não satisfeita **23.** (ii) não satisfeita **29.** $\frac{3}{2}$

EXERCÍCIOS 4.4 (Página 240)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 39 aparecem nas Figs. 4.4-1 a 4.4-39.)

1. (a) e (b) $f(2) = -5$, mín. rel.; (c) $[2, +\infty)$; (d) $(-\infty, 2]$ **3.** (a) e (b) $f(-\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$, máx. rel.; $f(1) = -1$, mín. rel.; (c) $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, $[1, +\infty)$; (d) $[-\frac{1}{3}, 1]$ **5.** (a) e (b) $f(0) = 2$, máx. rel.; $f(3) = -25$, mín. rel.; (c) $(-\infty, 0]$, $[3, +\infty)$; (d) $[0, 3]$ **7.** (a) e (b) f tem um valor máx. rel. de 4 se $x = (4k + 1)\pi$, onde k é um inteiro qualquer; f tem um valor mín. rel. de -4 se $x = (4k + 3)\pi$ onde k é um inteiro qualquer; (c) $[(4k - 1)\pi, (4k + 1)\pi]$, onde k é um inteiro qualquer; (d) $[(4k + 1)\pi, (4k + 3)\pi]$, onde k é um inteiro qualquer **9.** (a) e (b) $f(0) = 0$, mín. rel.; $f(1) = \frac{1}{4}$, máx. rel.; $f(2) = 0$, mín. rel.; (c) $[0, 1]$, $[2, +\infty)$; (d) $(-\infty, 0]$, $[1, 2]$ **11.** (a) e (b) $f(-2) = -\frac{1}{15}$, máx. rel.; $f(-1) = -\frac{23}{15}$, mín. rel.; $f(1) = \frac{53}{15}$, máx. rel.; $f(2) = \frac{31}{15}$ mín. rel.; (c) $(-\infty, -2]$, $[-1, 1]$, $[2, +\infty)$; $[-2, -1]$, $[1, 2]$ **13.** (a) e (b) não tem extremos rel.; (c) $(0, +\infty)$; (d) em nenhum intervalo **15.** (a) e (b) $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, mín. rel.; (c) $(-\infty, 0)$, $[\sqrt[3]{2}, +\infty)$; (d) $(0, \sqrt[3]{2}]$ **17.** (a) e (b) $f(\frac{1}{5}) = \frac{3.456}{3.125}$, máx. rel.; $f(1) = 0$, mín. rel.; (c) $(-\infty, \frac{1}{5}]$, $[1, +\infty)$; (d) $[\frac{1}{5}, 1]$ **19.** (a) e (b) $f(2) = 4$, máx. rel.; (c) $(-\infty, 2]$; (d) $[2, 3]$

21. (a) e (b) $f(-1) = 2$, máx. rel.; $f(1) = -2$, mín. rel.; (c) $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$; (d) $[-1, 1]$ **23.** (a) e (b) $f(4) = 2$, máx. rel.; (c) $(-\infty, 4]$; (d) $[4, +\infty)$ **25.** (a) e (b) $f(\frac{1}{8}) = -\frac{1}{4}$, mín. rel.; (c) $[\frac{1}{8}, +\infty)$; (d) $(-\infty, \frac{1}{8}]$ **27.** (a) e (b) f tem um valor máx. rel. de $-\frac{1}{2}$ se $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, onde k é um inteiro qualquer; f tem um valor mín. rel. de $\frac{1}{2}$ se $x = \frac{1}{2}k\pi$, onde k é um inteiro qualquer; (c) $[\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{8}k\pi + \frac{1}{2}k\pi)$, $(\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi]$, onde k é um inteiro qualquer; (d) $[\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi, \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi)$, $(\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}k\pi]$, onde k é um inteiro qualquer **29.** (a) e (b) $f(-1) = 0$, máx. rel.; $f(1) = -\sqrt[3]{4}$, mín. rel.; (c) $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$; (d) $[-1, 1]$ **31.** (a) e (b) $f(-2) = 5$, máx. rel.; $f(0) = 1$, mín. rel.; (c) $(-\infty, -2]$, $[0, +\infty)$; (d) $[-2, 0]$ **33.** (a) e (b) $f(-1) = 2$, máx. rel.; $f(0) = 1$, mín. rel.; $f(2) = 5$, máx. rel.: (c) $(-\infty, -1]$, $[0, 2]$; (d) $[-1, 0]$, $[2, +\infty)$ **35.** (a) e (b) $f(-9) = -8$, mín. rel.; $f(-7) = -4$, máx. rel.; $f(-4) = -5$, mín. rel.; $f(0) = -3$, máx. rel.; $f(2) = -7$, mín. rel.; (c) $[-9, -7]$, $[-4, 0]$, $[2, +\infty)$; (d) $(-\infty, -9]$, $[-7, -4]$, $[0, 2]$ **37.** (a) e (b) não tem extremos rel.; (c) $[0, +\infty)$; (d) em nenhum intervalo **39.** (a) e (b) $f(4) = \frac{1}{4}\sqrt[3]{4}$, máx. rel.; (c) $(-4, 4]$; (d) $(-\infty, -4)$, $[4, +\infty)$ **43.** $a = -3$, $b = 7$ **45.** $a = -2$, $b = 9$, $c = -12$, $d = 7$

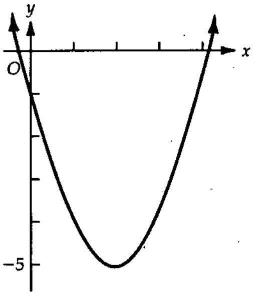


FIGURA 4.4-1

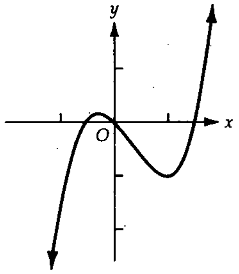


FIGURA 4.4-3

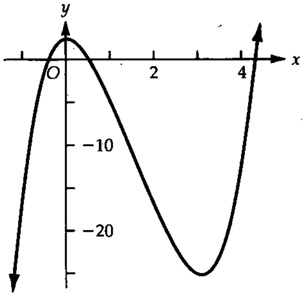


FIGURA 4.4-5

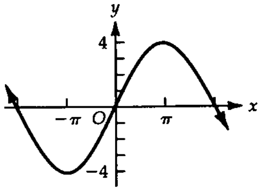


FIGURA 4.4-7

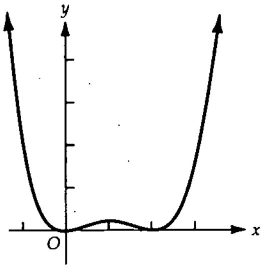


FIGURA 4.4-9

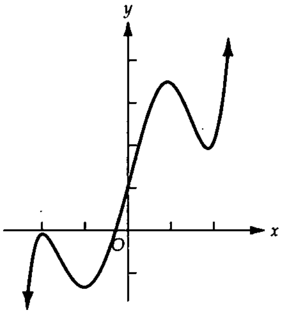


FIGURA 4.4-11

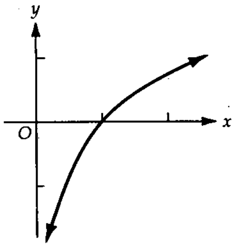


FIGURA 4.4-13

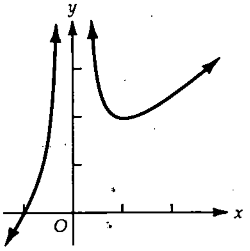


FIGURA 4.4-15

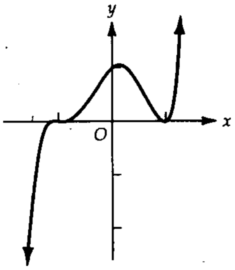


FIGURA 4.4-17

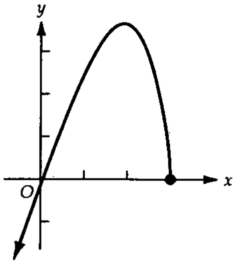


FIGURA 4.4-19

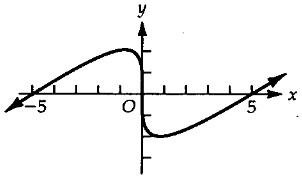


FIGURA 4.4-21

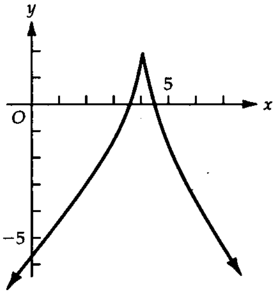


FIGURA 4.4-23

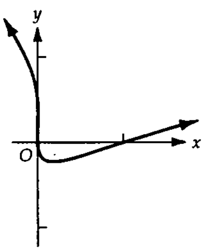


FIGURA 4.4-25

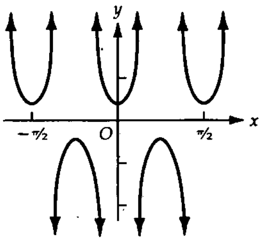


FIGURA 4.4-27

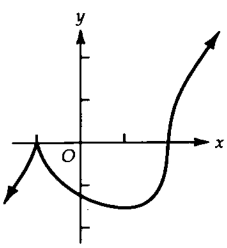


FIGURA 4.4-29

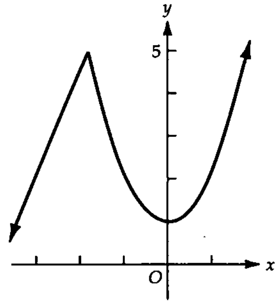


FIGURA 4.4-31

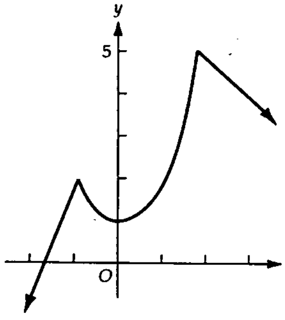


FIGURA 4.4-33

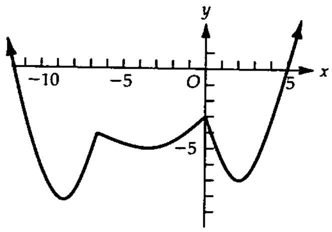


FIGURA 4.4-35

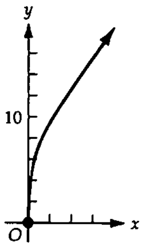


FIGURA 4.4-37

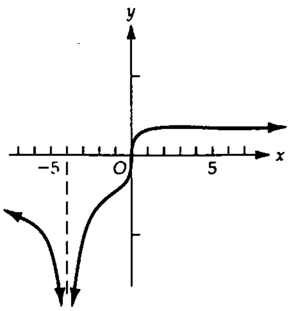


FIGURA 4.4-39

EXERCÍCIOS 4.5 (Página 248)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 23 aparecem nas Figs. 4.5-1 a 4.5-23.)
1. (0, 0); côncavo para baixo para $x < 0$; côncavo para cima para $x > 0$ **3.** $(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2})$; côncavo para baixo para $x < -\frac{1}{2}$; côncavo para cima para $x > -\frac{1}{2}$ **5.** (0, 0), (4, −256); côncavo para cima para $x < 0$ e $x > 4$; côncavo para baixo para $0 < x < 4$ **7.** (1, 0); côncavo para baixo para $x < 1$; côncavo para cima para $x > 1$ **9.** (−2, 0); côncavo para cima para $x < -2$; côncavo para baixo para $x > -2$
11. $(-1, \frac{1}{2})$, $(1, \frac{1}{2})$; côncavo para cima para $x < -1$ e $x > 1$; côncavo para baixo para $-1 < x < 1$ **13.** $(-\frac{2}{3}\pi, 0)$, $(-\frac{1}{3}\pi, 0)$, (0, 0), $(\frac{1}{3}\pi, 0)$, $(\frac{2}{3}\pi, 0)$; côncavo para cima para $-\pi < x < -\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{1}{3}\pi < x < 0$ e $\frac{1}{3}\pi < x < \frac{2}{3}\pi$; côncavo para baixo para $-\frac{2}{3}\pi < x < -\frac{1}{3}\pi$, $0 < x < \frac{1}{3}\pi$ e $\frac{2}{3}\pi < x < \pi$ **15.** (0, 0); côncavo para baixo para $-\pi < x < 0$; côncavo para cima para $0 < x < \pi$
17. não tem pt. de infl.; côncavo para cima para $x < 2$; côncavo para baixo para $x > 2$ **19.** (0, 0); côncavo para cima para $x < 0$; côncavo para baixo para $x > 0$ **21.** (0, 0); côncavo para baixo para $x < 0$; côncavo para cima para $x > 0$ **23.** (2, 3); côncavo para cima para $x < 2$; côncavo para baixo para $x > 2$ **25.** $a = -1$, $b = 3$ **27.** $a = 2$, $b = -6$, $c = 0$, $d = 3$
29. (a) $(\frac{1}{2}\pi + k\pi, 0)$ onde k é um inteiro qualquer; (b) −1 em $(\frac{1}{2}\pi + k\pi, 0)$ se k for um inteiro par, 1 em $(\frac{1}{2}\pi + k\pi, 0)$ se k for um inteiro ímpar
31. $(\frac{1}{2}\pi + k\pi, 0)$, onde k é um inteiro qualquer; −1 em todos os pts. de infl.
(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 33 a 47 aparecem nas Figs. 4.5-33 a 4.5-47.)
49. sim **51.** 10h40 da manhã.

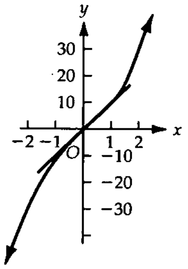


FIGURA 4.5-1

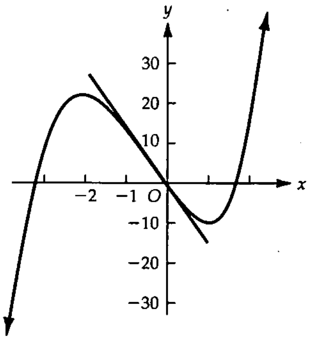


FIGURA 4.5-3

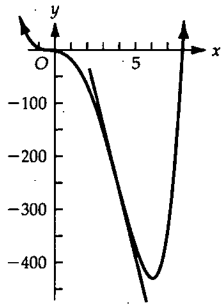


FIGURA 4.5-5

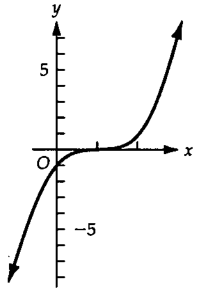


FIGURA 4.5-7

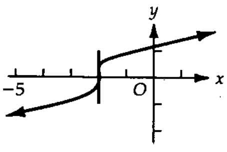


FIGURA 4.5-9

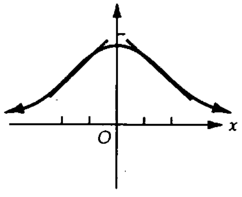


FIGURA 4.5-11

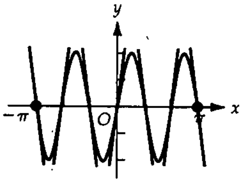


FIGURA 4.5-13

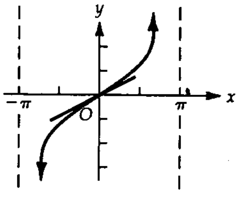


FIGURA 4.5-15

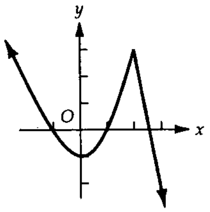


FIGURA 4.5-17

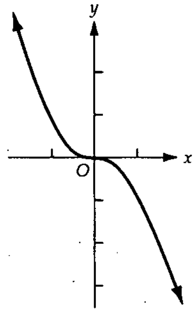


FIGURA 4.5-19

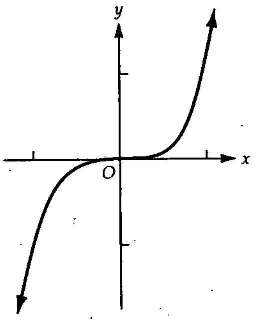


FIGURA 4.5-21

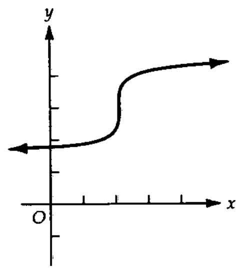


FIGURA 4.5-23

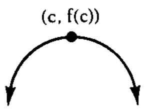


FIGURA 4.5-33

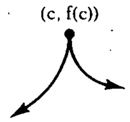


FIGURA 4.5-35

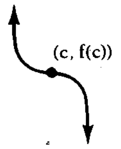


FIGURA 4.5-37

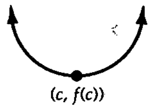


FIGURA 4.5-39

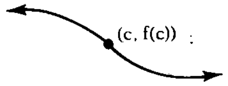


FIGURA 4.5-41

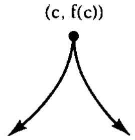


FIGURA 4.5-43

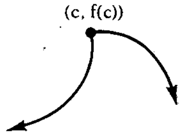


FIGURA 4.5-45

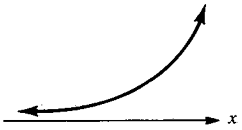


FIGURA 4.5-47

EXERCÍCIOS 4.6 (Página 253)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 25 aparecem nas Figs. 4.6-1 a 4.6-25.)
1. $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$, mín. rel.; côncavo para cima em toda parte **3.** $f(\frac{3}{2}) = \frac{81}{4}$, máx. rel.; $f(-1) = -11$, mín. rel.; $(\frac{1}{4}, \frac{37}{8})$, ponto de infl.;
côncavo para cima para $x < \frac{1}{4}$; côncavo para baixo para $x > \frac{1}{4}$ **5.** $g(0) = 3$, máx. rel.; $g(2) = \frac{5}{3}$, mín. rel.; $(1, \frac{7}{3})$, ponto de infl.;
côncavo para baixo para $x < 1$; côncavo para cima para $x > 1$ **7.** $f(4) = 0$, mín. rel.; côncavo para cima em toda parte **9.** $h(-\frac{3}{4}) = -\frac{99}{256}$,
mín. rel.; $h(0) = 0$, máx. rel.; $h(1) = -\frac{5}{6}$, mín. rel.; pontos de infl. em $x = \frac{1}{12}(1 \pm \sqrt{37})$; côncavo para cima para $x < \frac{1}{12}(1 - \sqrt{37})$ e $x > \frac{1}{12}(1 + \sqrt{37})$;
côncavo para baixo para $\frac{1}{12}(1 - \sqrt{37}) < x < \frac{1}{12}(1 + \sqrt{37})$ **11.** $F(\frac{1}{3}\pi) = -1$, mín. rel.; $F(0) = 1$, máx. rel.; $(\frac{1}{6}\pi, 0)$, ponto de infl.;
côncavo para baixo para $-\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{6}\pi$; côncavo para cima para $\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ **13.** $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{27}{16}$, mín. rel.; $(-2, 0), (-1, -1)$, pontos de infl.;
côncavo para cima para $x < -2$ e $x > -1$; côncavo para baixo para $-2 < x < -1$ **15.** $f(1) = 8$, mín. rel.; $(3, \frac{16}{3}\sqrt{3})$, ponto de infl.;
côncavo para cima para $0 < x < 3$; côncavo para baixo para $x > 3$ **17.** $h(-2) = -2$, mín. rel.; côncavo para cima para $x > -3$
19. $F(27) = 9$, máx. rel.; $(0, 0), (216, 0)$, pontos de infl.; côncavo para cima para $x < 0$ e $x > 216$; côncavo para baixo para $0 < x < 216$
21. $f(-1) = -2$, mín. rel.; $f(1) = 2$, máx. rel.;$(0, 0)$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{7}{8}\sqrt{2})$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{7}{8}\sqrt{2})$, pontos de infl.; côncavo para cima para $x < -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e
$0 < x < \frac{1}{2}\sqrt{2}$; côncavo para baixo para $-\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < 0$ e $x > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **23.** $f(0) = 0$, mín. rel.; côncavo para cima em toda parte
25. não tem extremos rel.; $(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi)$, $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, pontos de infl.; côncavo para baixo para $-2\pi < x < -\frac{3}{2}\pi$,
$-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ e $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$; côncavo para cima para $-\frac{3}{2}\pi < x < -\frac{1}{2}\pi$ e $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ **27.** $\cos k\pi = 1$, onde k é qualquer inteiro par,
máx. rel.; $\cos k\pi = -1$, onde k é qualquer inteiro ímpar, mín. rel. **29.** $\operatorname{cosec}(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi) = 1$, onde k é qualquer inteiro, mín. rel.;
$\operatorname{cosec}(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi) = -1$, onde k é qualquer inteiro, máx. rel.

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 31 a 35 aparecem nas Figs. 4.6-31 a 4.6-41.)
43. f tem um mín. rel. em $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e um máx. rel. em $x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

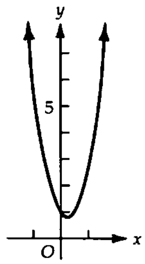


FIGURA 4.6-1

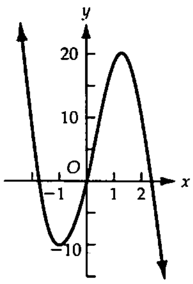


FIGURA 4.6-3

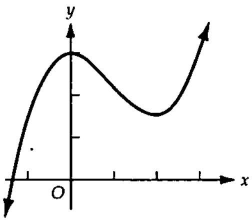


FIGURA 4.6-5

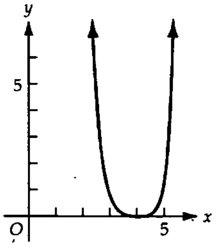


FIGURA 4.6-7

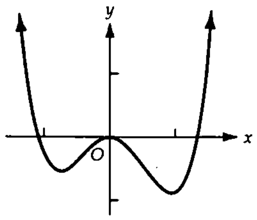


FIGURA 4.6-9

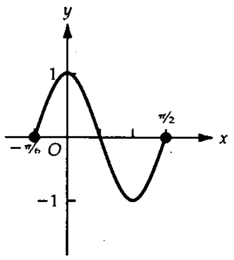


FIGURA 4.6-11

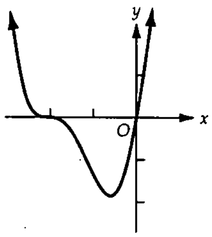


FIGURA 4.6-13

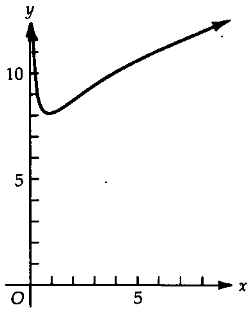


FIGURA 4.6-15

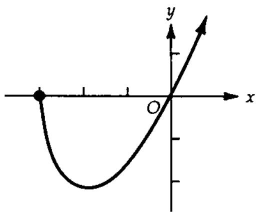


FIGURA 4.6-17

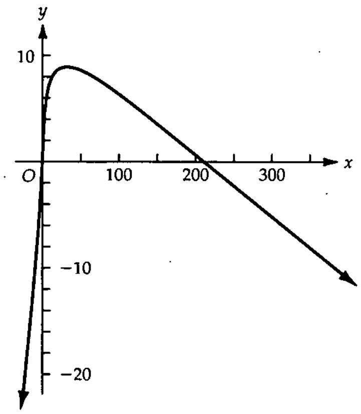


FIGURA 4.6-19

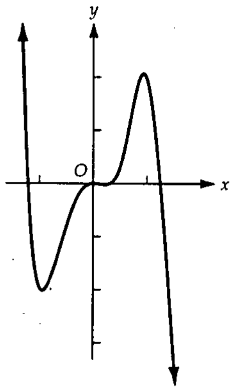


FIGURA 4.6-21

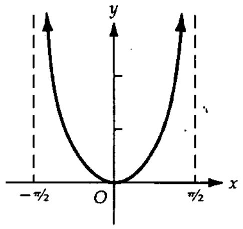


FIGURA 4.6-23

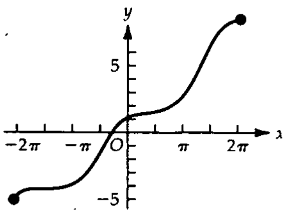


FIGURA 4.6-25

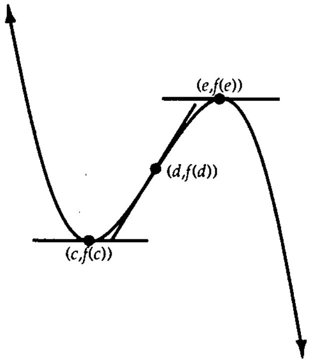


FIGURA 4.6-31

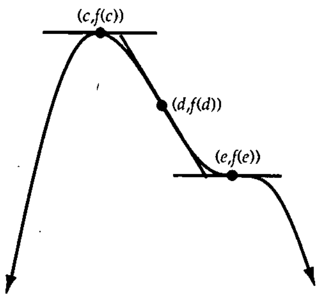


FIGURA 4.6-33

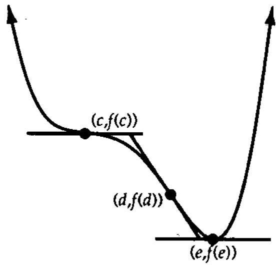


FIGURA 4.6-35

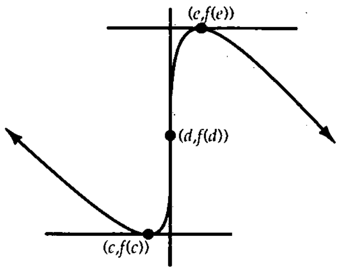


FIGURA 4.6-37

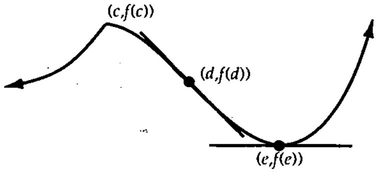


FIGURA 4.6-39

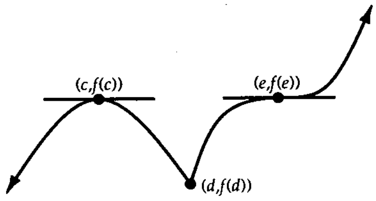


FIGURA 4.6-41

EXERCÍCIOS 4.7 (Página 259)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 57 aparecem nas Figs. 4.7-1 a 4.7-57.)

1. $x = 1, y = x + 1$ **3.** $x = 3, y = x + 3$ **5.** $x = -2, y = x - 6$ **7.** $x = 0, y = x + 2$ **9.** $f(-1) = 5$, máx. rel.; $f(1) = -3$, mín. rel.; $(0, 1)$, ponto de infl.; crescente em $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$; decrescente em $[-1, 1]$; côncavo para baixo para $x < 0$; côncavo para cima para $x > 0$ **11.** $f(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{16}$, mín. rel.; $(0, 0)$, $(1, -1)$, pontos de infl.; crescente em $[\frac{3}{2}, +\infty)$; decrescente em $(-\infty, \frac{3}{2}]$ côncavo para cima para $x < 0$ e $x > 1$; côncavo para baixo para $0 < x < 1$ **13.** $f(-3) = 5$, máx rel.; $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{121}{27}$, mín. rel.; $(-\frac{5}{3}, \frac{7}{27})$, ponto de infl.; crescente em $(-\infty, -3]$ e $[-\frac{1}{3}, +\infty)$; decrescente em $[-3, -\frac{1}{3}]$; côncavo para baixo para $x < -\frac{5}{3}$; côncavo para cima para $x > -\frac{5}{3}$ **15.** $f(0) = 1$, mín. rel.; $(\frac{1}{2}, \frac{23}{16})$, $(1, 2)$, pontos de infl.; decrescente em $(-\infty, 0]$; crescente em $[0, +\infty)$; côncavo para cima para $x < \frac{1}{2}$ e $x > 1$; côncavo para baixo para $\frac{1}{2} < x < 1$
17. $f(-1) = \frac{7}{12}$, mín. rel.; $f(0) = 1$, máx. rel.; $f(2) = -\frac{5}{3}$, mín. rel.; pontos de infl. em $x = \frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{7})$; decrescente em $(-\infty, -1]$ e $[0, 2]$; crescente em $[-1, 0]$ e $[2, +\infty)$; côncavo para cima para $x < \frac{1}{3}(1 - \sqrt{7})$ e $x > \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$; côncavo para baixo para $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{7}) < x < \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$
19. $f(0) = 2$, mín. rel.; não tem pontos de infl.; decrescente em $(-\infty, 0]$; crescente em $[0, +\infty)$; côncavo para cima em toda parte
21. $f(0) = 0$, mín. rel., não tem pontos de infl.; decrescente em $(-\infty, 0]$; crescente em $[0, +\infty)$; côncavo para cima em toda parte
23. não tem extremos relativos; $(0, 0)$ ponto de infl. com tangente horizontal; crescente em $(-\infty, +\infty)$; côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$; côncavo para cima em $(0, +\infty)$ **25.** não tem extremos relativos; $(2, 0)$ ponto de infl.; decrescente em $(-\infty, +\infty)$; côncavo para cima para $x < 2$; côncavo para baixo para $x > 2$ **27.** $f(\frac{4}{5}) = \frac{26.244}{3.125}$, máx. rel.; $f(2) = 0$, mín. rel.; pontos de infl. em $(-1, 0)$ e $x = \frac{1}{10}(8 \pm 3\sqrt{6})$; crescente em $(-\infty, \frac{4}{5}]$ e $[2, +\infty)$; decrescente em $[\frac{4}{5}, 2]$; côncavo para baixo para $x < -1$ e $\frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6}) < x < \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6})$; côncavo para cima para $-1 < x < \frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6})$ e $x > \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6})$ **29.** $f(-\frac{4}{3}) = \frac{256}{81}$, máx. rel.; $f(0) = 0$, mín. rel.; $(-1, 2)$, ponto de infl.; crescente em $(-\infty, -\frac{4}{3}]$ e $[0, +\infty)$; decrescente em $[-\frac{4}{3}, 0]$; côncavo para baixo para $x < -1$; côncavo para cima para $x > -1$
31. $f(-\frac{1}{2}\pi) = -3$, mín. rel.; $f(0) = 3$, máx. rel.; $f(\frac{1}{2}\pi) = -3$, mín. rel.; $(-\frac{3}{4}\pi, 0)$, $(-\frac{1}{4}\pi, 0)$, $(\frac{1}{4}\pi, 0)$, $(\frac{3}{4}\pi, 0)$, pontos de infl.; decrescente em $[-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ e $[0, \frac{1}{2}\pi]$; crescente em $[-\frac{1}{2}\pi, 0]$ e $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$; côncavo para baixo para $-\pi < x < -\frac{3}{4}\pi$, $-\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$ e $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$; côncavo para cima para $-\frac{3}{4}\pi < x < -\frac{1}{4}\pi$ e $\frac{1}{4}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$ **33.** $(\frac{1}{2}\pi, 0)$, mín. rel.; não tem pontos de infl.; crescente em $[0, \frac{1}{2}\pi)$ e $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$; côncavo para baixo para $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ e $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ **35.** não tem extremos relativos; $(0, 0)$, ponto de infl; crescente $(-\pi, \pi)$; côncavo para baixo para $-\pi < x < 0$; côncavo para cima para $0 < x < \pi$; $x = -\pi$ e $x = \pi$ são assíntotas **37.** $f(-\frac{7}{4}\pi) = \sqrt{2}$, máx. rel.; $f(-\frac{3}{4}\pi) = -\sqrt{2}$, mín. rel.; $f(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}$, máx. rel.; $f(\frac{5}{4}\pi) = -\sqrt{2}$, mín. rel.; $(-\frac{5}{4}\pi, 0)$, $(-\frac{1}{4}\pi, 0)$, $(\frac{3}{4}\pi, 0)$, $(\frac{7}{4}\pi, 0)$, pontos de infl.; crescente em $[-2\pi, -\frac{7}{4}\pi]$, $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ e $[\frac{5}{4}\pi, 2\pi]$; decrescente em $[-\frac{7}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi]$ e $[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$; côncavo para baixo para $-2\pi < x < -\frac{5}{4}\pi$, $-\frac{1}{4}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$ e $\frac{7}{4}\pi < x < 2\pi$; côncavo para cima para $-\frac{5}{4}\pi < x < -\frac{1}{4}\pi$ e $\frac{3}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$ **39.** $f(0) = 0$, máx. rel.; $f(2) = 4$, mín. rel.; não tem pontos de infl.; crescente em $(-\infty, 0]$ e $[2, +\infty)$; decrescente em $[0, 1)$ e $(1, 2]$; côncavo para baixo para $x < 1$; côncavo para cima para $x > 1$; $x = 1$ e $y = x + 1$ são assíntotas **41.** $f(0) = -1$, máx. rel.; não tem pontos de infl.; crescente em $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0]$; decrescente em $[0, 1)$ e $(1, +\infty)$; côncavo para cima para $x < -1$ e $x > 1$; côncavo para baixo para $-1 < x < 1$; $y = 1$, $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas
43. $f(-1) = -1$, mín. rel.; $f(1) = 1$, máx. rel.; $(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, pontos de infl.; decrescente em $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$; crescente em $[-1, 1]$; côncavo para baixo para $x < -\sqrt{3}$ e $0 < x < \sqrt{3}$; côncavo para cima para $-\sqrt{3} < x < 0$ e $x > \sqrt{3}$; $y = 0$ é uma assíntota
45. $f(0) = 0$, mín. rel.; $f(1) = 1$, máx. rel.; não tem pontos de infl.; decrescente em $(-\infty, 0]$ e $[1, +\infty)$; crescente em $[0, 1]$; côncavo para baixo para $x < 0$ e $x > 0$ **47.** $f(1) = -1$, mín. rel.; não tem pontos de infl.; decrescente em $(-\infty, 1]$; crescente em $[1, +\infty)$; côncavo para cima para todo x
49. não tem extremos relativos; $(3, 2)$, ponto de infl.; crescente em $(-\infty, +\infty)$; côncavo para baixo para $x > 3$; côncavo para cima para $x < 3$
51. não tem extremos relativos; $(3, 2)$, ponto de infl. com tangente horizontal; crescente em $(-\infty, +\infty)$; côncavo para baixo para $x < 3$; côncavo para cima para $x > 3$ **53.** $f(0) = 0$, mín. rel.; $f(\frac{16}{5}) = \frac{512}{125}\sqrt{5}$, máx. rel.; ponto de infl. em $x = \frac{1}{15}(48 - 8\sqrt{6})$; decrescente em $(-\infty, 0]$ e $[\frac{16}{5}, 4]$; crescente em $[0, \frac{16}{5}]$; côncavo para cima para $x < \frac{1}{15}(48 - 8\sqrt{6})$; côncavo para baixo para $\frac{1}{15}(48 - 8\sqrt{6}) < x < 4$ **55.** $f(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}\sqrt{6}$, máx. rel.; não tem pontos de infl.; crescente em $(-\infty, -\frac{2}{3}]$; decrescente em $[-\frac{2}{3}, 0]$; côncavo para baixo para $x < 0$ **57.** $f(-1) = 0$, máx. rel.; $f(1) = -\sqrt[3]{4}$, mín. rel.; $(2, 0)$, ponto de infl.; crescente em $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$; decrescente em $[-1, 1]$; côncavo para cima para $x < -1$ e $-1 < x < 2$; côncavo para baixo para $x > 2$

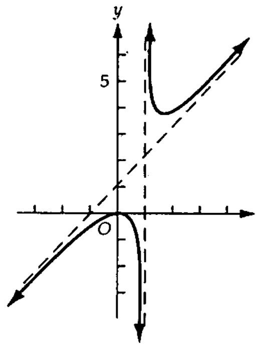


FIGURA 4.7-1

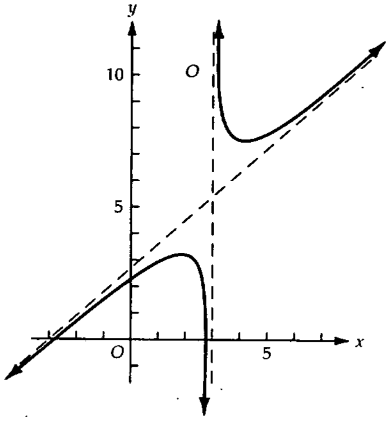


FIGURA 4.7-3

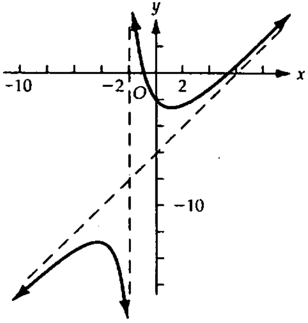


FIGURA 4.7-5

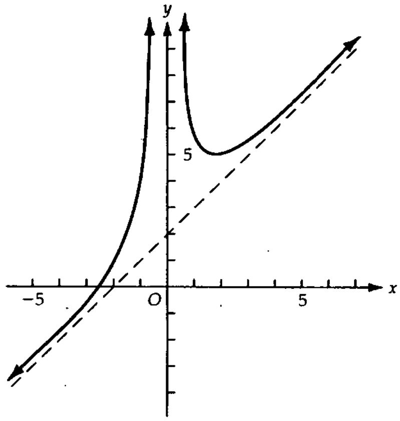


FIGURA 4.7-7

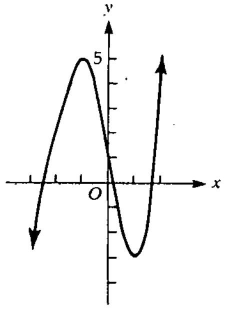


FIGURA 4.7-9

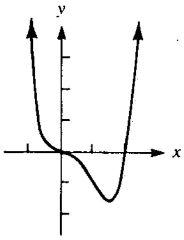


FIGURA 4.7-11

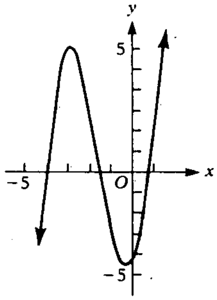


FIGURA 4.7-13

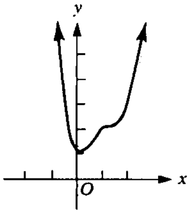


FIGURA 4.7-15

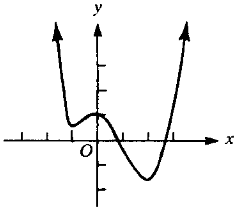


FIGURA 4.7-17

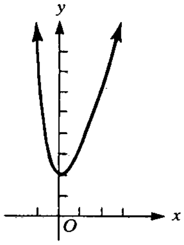


FIGURA 4.7-19

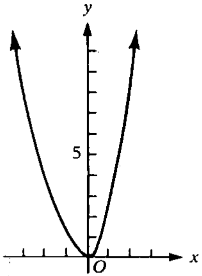


FIGURA 4.7-21

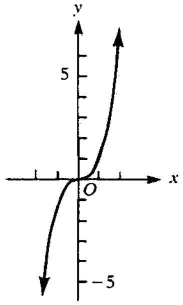


FIGURA 4.7-23

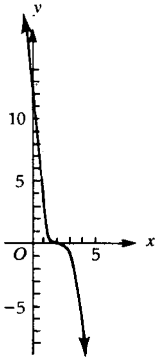


FIGURA 4.7-25

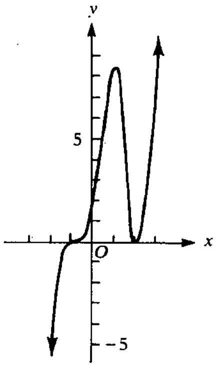


FIGURA 4.7-27

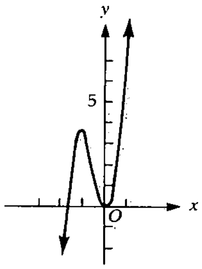


FIGURA 4.7-29

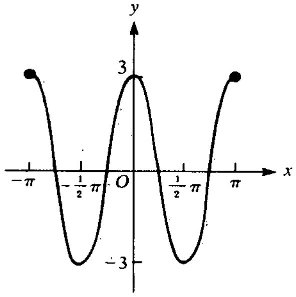


FIGURA 4.7-31

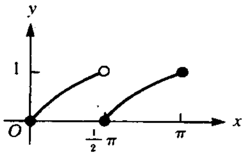


FIGURA 4.7-33

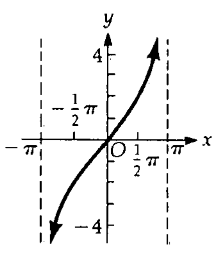


FIGURA 4.7-35

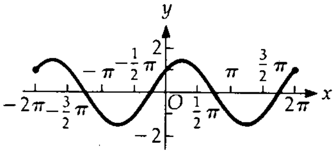


FIGURA 4.7-37

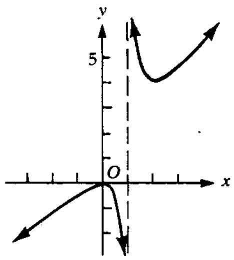


FIGURA 4.7-39

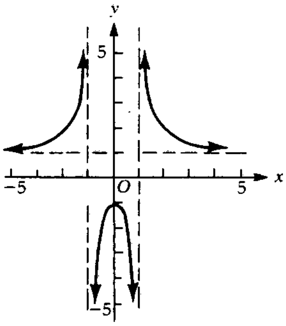


FIGURA 4.7-41

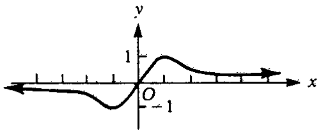


FIGURA 4.7-43

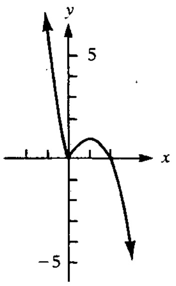


FIGURA 4.7-45

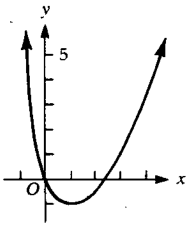


FIGURA 4.7-47

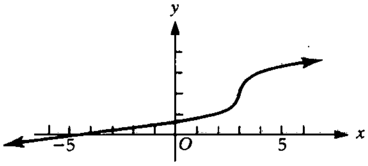


FIGURA 4.7-49

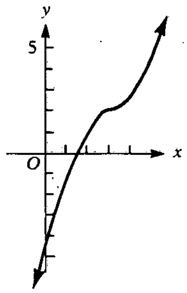


FIGURA 4.7-51

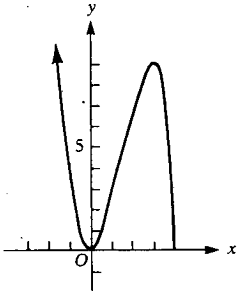


FIGURA 4.7-53

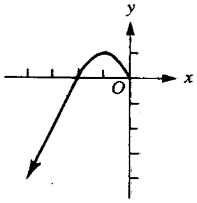


FIGURA 4.7-55

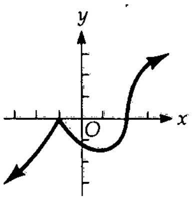


FIGURA 4.7-57

EXERCÍCIOS 4.8 (Página 267)

1. $f(0) = 0$, mín. abs. **3.** não existe **5.** $g(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$, mín. abs. **7.** não existe **9.** $f(-2) = -13$, mín. abs.
11. $g(-1) = -2$, máx. abs. **13.** $f(0) = 0$, mín. abs.; $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{18}\sqrt{3}$, máx. abs. **15.** $f(-\frac{1}{6}\pi) = \sqrt{3}$, mín. abs. **17.** 45 m × 60 m
19. 6 cm × 9 cm **21.** 12 cm × 4 cm × 6 cm **23.** $2x - y + 1 = 0$ **25.** 1 mês; 7,5% **27.** altura $4\sqrt[3]{4}$ cm; raio, $\sqrt[3]{4}$ cm
29. 40 unidades **31.** $ 1.500 **33.** $(\frac{9}{5}, \frac{3}{5})$
35. raio do semicírculo, $\dfrac{10}{4 + \pi}$ m; altura do retângulo, $\dfrac{10}{4 + \pi}$ m **37.** 90 km/h **39.** $\frac{36}{25}$ s **41.** $5\sqrt{5}$ m **43.** $\sqrt{2}$ **45.** $2\sqrt{2}$ **47.** $\frac{4}{3}a$

EXERCÍCIOS 4.9 (Página 276)

1. 4; 5 **3.** $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$; $\sqrt[3]{10} - 2 \approx 0{,}154$ **5.** (a) $(-3-4x)\,\Delta x - 2(\Delta x)^2$; (b) $(-3-4x)\,\Delta x$; (c) $-2(\Delta x)^2$
7. (a) $(3x^2 - 2x)\,\Delta x + (3x - 1)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; (b) $(3x^2 - 2x)\,\Delta x$; (c) $(3x - 1)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$
9. (a) $\dfrac{-2\Delta x}{(x - 1)(x + \Delta x - 1)}$; (b) $\dfrac{-2\Delta x}{(x - 1)^2}$; (c) $\dfrac{2(\Delta x)^2}{(x - 1)^2(x + \Delta x - 1)}$ **11.** (a) 0,0309; (b) 0,03; (c) 0,0009
13. (a) $\frac{1}{42} \approx 0{,}0238$; (b) $\frac{1}{40} = 0{,}025$; (c) $-\frac{1}{840} \approx -0{,}0012$ **15.** (a) $-0{,}875$; (b) $-1{,}5$; (c) $0{,}625$ **17.** $3(3x^2 - 2x + 1)^2(6x - 2)\,dx$

19. $\frac{(14x^2 + 18x)\,dx}{3(2x + 3)^{2/3}}$ **21.** $\frac{(1 - 2 \operatorname{sen} x + 2 \cos x)\,dx}{(2 - \operatorname{sen} x)^2}$ **23.** $2 \operatorname{tg} x \sec^2 x(2 \operatorname{tg}^2 x + 1)\,dx$ **25.** $-\frac{3x}{4y}$ **27.** $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

29. 1 **31.** (a) $dx = 4t\,dt$, $dy = 3\,dt$; (b) $\frac{3}{4t}$; (c) $\frac{9}{4y}$ **33.** (a) $dx = -2 \operatorname{sen} t\,dt$, $dy = 3 \cos t\,dt$; (b) $-\frac{3 \cos t}{2 \operatorname{sen} t}$; (c) $-\frac{9x}{4y}$

35. (a) 6,75 cm^3; (b) 0,3 cm^2 **37.** $\frac{12}{5}\pi$ m^3 **39.** $0{,}4\pi$ cm^2 **41.** $0{,}9\,\pi$ cm^3 **43.** 4% **45.** 10 cm^3

EXERCÍCIOS 4.10 (Página 281)

1. 4,1179 **3.** −1,1673 **5.** 2,649 **7.** 0,507 **9.** −1,128 **11.** 1,73205 **13.** 1,81712 **15.** 0,7391 **17.** 0,8767
19. 2,0288, 4,9132 **21.** 3,14159

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 4 (Página 282)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 31 aparecem nas Figs. 4-1 a 4-31.)
1. mín. abs.: $f(-5) = 0$ **3.** mín. abs.: $f(1) = -\frac{1}{2}$; máx. abs.: $f(2) = 64$ **5.** mín. abs.: $f(3) = 0$; máx. abs.: $f(0) = 9$
7. mín. abs.: $f(\sqrt{6}) = 0$; máx. abs.: $f(5) = 361$ **9.** mín. abs.: $f(-\frac{1}{6}\pi) = -2$; máx. abs.: $f(\frac{1}{6}\pi) = 2$ **11.** máx. abs.: $f(\frac{1}{12}) = \sqrt{3}$
13. $f(-2) = 0$, máx. rel.; $f(0) = -4$, mín. rel.; $(-1, -2)$, ponto de inflexão; crescente em $(-\infty, -2]$ e $[0, +\infty)$; decrescente em $[-2, 0]$; côncavo para baixo para $x < -1$; côncavo para cima para $x > -1$
15. $f(\frac{8}{5}) = \frac{839{,}808}{3.125}$, máx. rel.; $f(4) = 0$, mín. rel.; ponto de inflexão em $x = -2$ e $x = \frac{1}{5}(8 \pm 3\sqrt{6})$; crescente em $(-\infty, \frac{8}{5}]$ e $[4, +\infty)$; decrescente em $[\frac{8}{5}, 4]$; côncavo para cima para $-2 < x < \frac{1}{5}(8 - 3\sqrt{6})$ e $x > \frac{1}{5}(8 + 3\sqrt{6})$; côncavo para baixo para $x < -2$ e $\frac{1}{5}(8 - 3\sqrt{6}) < x < \frac{1}{5}(8 + 3\sqrt{6})$ **17.** não tem extremos relativos, $(4, -3)$, ponto de inflexão; crescente em $(-\infty, +\infty)$; côncavo para cima para $x < 4$; côncavo para baixo para $x > 4$ **19.** $f(0) = 0$, mín. rel.; $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, pontos de inflexão; decrescente em $(-\infty, 0]$; crescente em $[0, +\infty)$; côncavo para baixo para $x < -\frac{1}{3}$ e $x > \frac{1}{3}$; côncavo para cima para $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$; $y = \frac{4}{3}$ é uma assíntota
21. $f(0) = 0$, máx. rel.; não tem pontos de inflexão; crescente em $(-\infty, -2)$ e $(-2, 0]$; decrescente em $[0, 2)$ e $(2, +\infty)$; côncavo para cima para $x < -2$ e $x > 2$; côncavo para baixo para $-2 < x < 2$; $y = 5$, $x = -2$ e $x = 2$ são assíntotas **23.** $f(0) = 0$, máx. rel.; $f(6) = 12$, mín. rel.; não tem pontos de inflexão; crescente em $(-\infty, 0]$ e $[6, +\infty)$; decrescente em $[0, 3)$ e $(3, 6]$; côncavo para baixo para $x < 3$; côncavo para cima para $x > 3$; $x = 3$ e $y = x + 3$ são assíntotas **25.** $f(1) = 0$, mín. rel.; não tem pontos de inflexão; decrescente em $(-\infty, 1]$; crescente em $[1, +\infty)$; côncavo para cima para x **27.** não tem extremos relativos; $(3, 1)$, ponto de inflexão; crescente em $(-\infty, +\infty)$; côncavo para baixo para $x < 3$; côncavo para cima para $x > 3$ **29.** $f(-1) = 0$, mín. rel.; $f(0) = 9$, máx. rel.; $f(3) = 0$, mín. rel.; pontos de inflexão em $x = \pm\frac{3}{5}\sqrt{5}$; decrescente em $(-\infty, -1]$ e $[0, 3]$; crescente em $[-1, 0]$ e $[3, +\infty)$; côncavo para cima para $x < -\frac{3}{5}\sqrt{5}$ e $x > \frac{3}{5}\sqrt{5}$; côncavo para baixo para $-\frac{3}{5}\sqrt{5} < x < \frac{3}{5}\sqrt{5}$ **31.** $f(-\frac{1}{8}\pi) = -\sqrt{2}$, mín. rel.; $f(\frac{3}{8}\pi) = \sqrt{2}$, máx. rel.; $(\frac{1}{8}\pi, 0)$, ponto de inflexão; decrescente em $[-\frac{3}{8}\pi, -\frac{1}{8}\pi]$ e $[\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi]$; crescente em $[-\frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi]$; côncavo para cima para $-\frac{3}{8}\pi < x < \frac{1}{8}\pi$; côncavo para baixo para $\frac{1}{8}\pi < x < \frac{5}{8}\pi$;
33. $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{13})$ **35.** $-\frac{13}{4}$ **41.** $\sqrt{A^2 + B^2}$ **43.** ponto de inflexão em (0,2); côncavo para baixo para $x < 0$; côncavo para cima para $x > 0$
45. $a = 2$, $b = -6$, $c = 3$ **51.** 6,6 **55.** 20 cm × 20 cm × 10 cm **57.** $\sqrt[3]{2k}$ cm × $\sqrt[3]{2k}$ cm × $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$ cm **59.** 1.500 **61.** 12 km do ponto a partir do banco próximo **65.** $1.800 **67.** 25 radios; $525
69. $\frac{3}{2}$ s; a velocidade da partícula movendo-se horizontalmente é de 1 cm/s; a velocidade da partícula movendo-se verticalmente é de 3 cm/s
71. $(h^{2/3} + w^{2/3})^{3/2}$ m **73.** 9 m × 18 m **75.** o raio é $\frac{3}{2}r$ cm e a altitude é $3h$ cm **77.** o arame deve ser cortado ao meio
79. 1.000; $11 **81.** (a) −0,16; (b) −0,64 **83.** 2π cm^3 **85.** um erro de aproximadamente $\frac{\pi^2}{1.610t}$ s **91.** 1,168 **93.** 1,9622

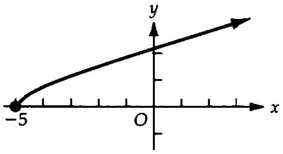


FIGURA 4-1

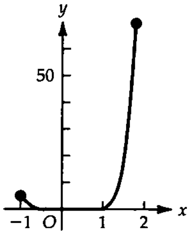


FIGURA 4-3

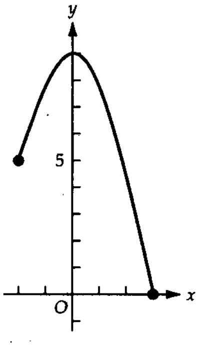


FIGURA 4-5

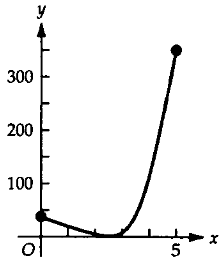


FIGURA 4-7

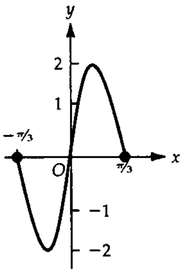


FIGURA 4-9

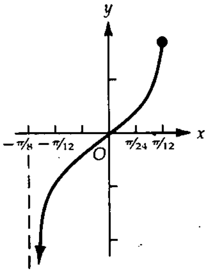


FIGURA 4-11

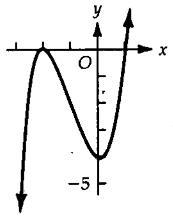


FIGURA 4-13

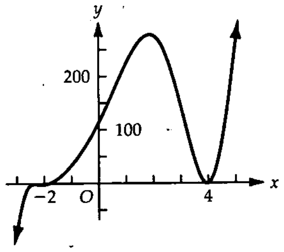


FIGURA 4-15

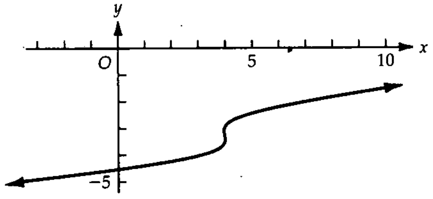


FIGURA 4-17

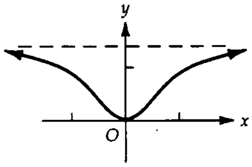


FIGURA 4-19

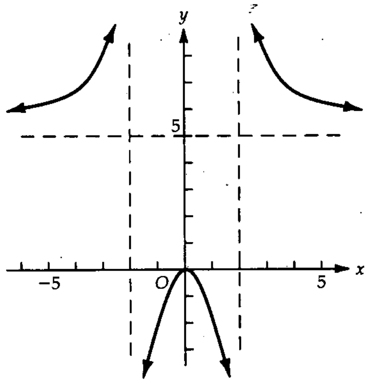


FIGURA 4-21

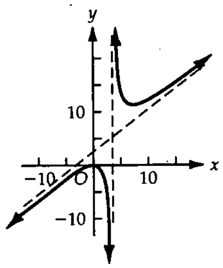


FIGURA 4-23

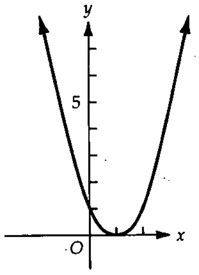


FIGURA 4-25

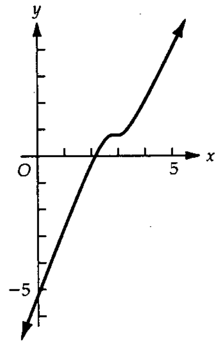


FIGURA 4-27

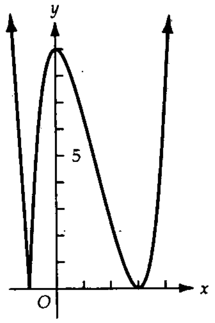


FIGURA 4-29

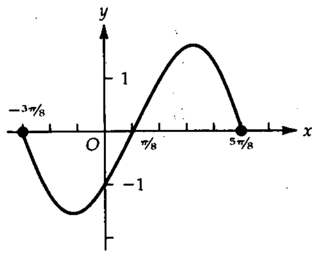


FIGURA 4-31

EXERCÍCIOS 5.1 (Página 294)

1. $\frac{3}{5}x^5 + C$ **3.** $-\dfrac{1}{2x^2} + C$ **5.** $2u^{5/2} + C$ **7.** $3x^{2/3} + C$ **9.** $\frac{9}{5}t^{10/3} + C$ **11.** $x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$ **13.** $\frac{1}{3}y^6 - \frac{3}{4}y^4 + C$
15. $3t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 + C$ **17.** $\frac{8}{5}x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x + C$ **19.** $\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$ **21.** $\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2}x^2 + C$
23. $-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5x + C$ **25.** $\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} - 8x^{1/2} + C$ **27.** $\frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{3}{2}x^{2/3} + C$ **29.** $-3 \cos t - 2 \operatorname{sen} t + C$
31. $\sec x + C$ **33.** $-4 \operatorname{cosec} x + 2 \operatorname{tg} x + C$ **35.** $-2 \operatorname{cotg} \theta - 3 \operatorname{tg} \theta + \theta + C$ **37.** $y = x^2 - 3x + 2$
39. $3y = -2x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ **41.** $12y = -x^4 + 6x^2 - 20x + 27$ **43.** $C(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 6$
45. (a) $C(x) = 3x^2 + 8$; (b) \$800 **47.** (a) $R(x) = 15x - 2x^2$; (b) $p = 15 - 2x$ **49.** 117π m^3 **51.** g não é diferenciável em $(-1, 1)$

EXERCÍCIOS 5.2 (Página 302)

1. $-\frac{1}{6}(1 - 4y)^{3/2} + C$ **3.** $-\frac{3}{8}(6 - 2x)^{4/3} + C$ **5.** $\frac{1}{3}(x^2 - 9)^{3/2} + C$ **7.** $\frac{1}{33}(x^3 - 1)^{11} + C$ **9.** $-\frac{3}{8}(9 - 4x^2)^{5/3} + C$
11. $\dfrac{1}{32(1 - 2y^4)^4} + C$ **13.** $\frac{3}{11}(x - 2)^{11/3} + C$ **15.** $\frac{2}{5}(x + 2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x + 2)^{3/2} + C$ **17.** $-\frac{2}{5}(1 - r)^{-5} + \frac{1}{3}(1 - r)^{-6} + C$
19. $-\frac{3}{4}(3 - 2x)^{3/2} + \frac{3}{10}(3 - 2x)^{5/2} - \frac{1}{28}(3 - 2x)^{7/2} + C$ **21.** $\frac{1}{4} \operatorname{sen} 4\theta + C$ **23.** $-2 \cos x^3 + C$ **25.** $\frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + C$

27. $-\frac{1}{6}\operatorname{cosec} 3y^2 + C$ **29.** $\frac{1}{6}(2 + \operatorname{sen} x)^6 + C$ **31.** $-2\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3/2} + C$ **33.** $-\frac{3}{2}(1 + \cos x)^{4/3} + C$ **35.** $-\frac{1}{3}\cos^3 t + C$
37. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x - \frac{1}{2}\operatorname{cotg} 2x + C$ **39.** $-\frac{1}{3}\sqrt{1 - 2\operatorname{sen} 3x} + C$ **41.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} + C$ **43.** $-\frac{1}{4(3x^4 + 2x^2 + 1)} + C$
45. $\frac{3}{4}(3 - y)^{4/3} - 18(3 - y)^{1/3} + C$ **47.** $\frac{3}{5}(r^{1/3} + 2)^5 + C$ **49.** $\sqrt{x^2 + 4} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4}} + C$ **51.** $\cos(\cos x) + C$
53. (a) $2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + C$; (b) $\frac{1}{8}(2x + 1)^4 + C$ **55.** (a) $\frac{2}{3}x^{3/2} - 2x + 2x^{1/2} + C$; (b) $\frac{2}{3}(\sqrt{x} - 1)^3 + C$
57. (a) $\operatorname{sen}^2 x + C$; (b) $-\cos^2 x + C$; (c) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$ **59.** $C(x) = \frac{6}{5}\sqrt{5x + 4} + \frac{38}{5}$ **61.** $p = \frac{4x + 22}{x + 5}$ **63.** $\frac{1}{6}$ coulombs
65. \$325 **67.** 3,1 μm^3

EXERCÍCIOS 5.3 (Página 310)

1. $y = 2x^2 - 5x + C$ **3.** $y = x^3 + x^2 - 7x + C$ **5.** $y = \frac{-2}{3x^2 + C}$ **7.** $2\sqrt{1 + u^2} = 3v^2 + C$ **9.** $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y + y = C$
11. $y = \frac{5x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ **13.** $s = -\frac{1}{9}(\operatorname{sen} 3t + \cos 3t) + C_1 t + C_2$ **15.** $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 6$
17. $4\operatorname{sen} 3x + 6\cos 2y + 7 = 0$ **19.** $u = 3v^4 + 4v^3 + 2v^2 + 2v$ **21.** $s = \frac{1}{3}(2t + 4)^{3/2} - \frac{8}{3}$
23. $v = 2 + 5t - t^2$, $s = 2t + \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3$ **25.** $v = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 4$, $s = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - 4t + 1$
27. $v = -2\sqrt{2}\operatorname{sen}(2t - \frac{1}{4}\pi)$, $s = \sqrt{2}\cos(2t - \frac{1}{4}\pi)$ **29.** $1.600s = v^2 + 1.200$ **31.** $5s^2 + 4s = v^2 + 12$ **33.** (a) 4 s;
(b) 20 m/s; (c) 2 s; (d) 20 m **35.** (a) $\sqrt{33} \approx 5{,}7$ s ; (b) $10\sqrt{33} \approx 57$ m/s **37.** (a) 6,6 s; (b) 65,7 m/s
39. (a) $v^2 = -20s + 1.600$; (b) 35,8 m/s **41.** $\frac{3}{2\pi}$ cm à direita da origem **43.** 1,62 m/s^2 **45.** (a) 3,47 s; (b) 48,22 m
47. 20 m/s ou 72 km/h **49.** $x^2 + 2y^2 = C$

EXERCÍCIOS 5.4 (Página 322)

1. 51 **3.** 147 **5.** 2.025 **7.** $\frac{73}{12}$ **9.** $\frac{63}{4}$ **11.** $\frac{7}{12}$ **13.** 10.400 **15.** $2^n - 1$ **17.** $\frac{100}{101}$ **19.** $n^4 - \frac{2}{3}n^3 - 3n^2 - \frac{4}{3}n$
21. $\frac{8}{3}$ unidades quad. **23.** 15 unidades quad. **25.** $\frac{5}{3}$ unidades quad. **27.** 9 unidades quad. **29.** $\frac{3}{5}$ unidades quad. **31.** $\frac{17}{4}$ unidades quad.
33. $\frac{27}{4}$ unidades quad. **35.** $\frac{1}{2}m(b^2 - a^2)$ unidades quad. **37.** $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ unidades quad. **39.** 9 unidades quad. **41.** 15 unidades quad.
43. 9 unidades quad. **45.** 1,0349 unidades quad. **47.** 1,1682 unidades quad. **49.** 1,8530 unidades quad. **51.** 1,5912 unidades quad.

EXERCÍCIOS 5.5 (Página 330)

1. $\frac{247}{32}$ **3.** $\frac{1.469}{1.320}$ **5.** 0,835 **7.** $\frac{1}{24}(10 + \sqrt{2} + 3\sqrt{3})\pi$ **9.** 9 **11.** $\frac{8}{3}$ **13.** $\frac{15}{4}$ **15.** 66 **17.** 4 **19.** 20 unidades quad.
21. 44 unidades quad. **23.** $\frac{5}{3}$ unidades quad. **25.** $\frac{305}{6}$ unidades quad. **27.** $\frac{31}{4}$ unidades quad. **29.** 0,2672 **31.** 2,6725
33. $\int_0^2 x^2\,dx$ **35.** $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

EXERCÍCIOS 5.6 (Página 340)

1. 12 **3.** $4\sqrt{5}$ **5.** -5 **7.** 15 **9.** 0 **11.** -21 **13.** $-\frac{3}{2}$ **15.** $4 + \pi$ 17. $\frac{33}{2}\pi$ **19.** [24, 56] **21.** [0, 64] **23.** [0, 27]
25. [0, 576] **27.** $[\frac{1}{12}\pi, \frac{1}{12}\sqrt{3}\pi]$ **29.** [0, 6] **31.** $[-3, \frac{3}{2}]$ **33.** $[-3\sqrt{3}\pi, 0]$ **35.** $\geqslant$ **37.** $\leqslant$

EXERCÍCIOS 5.7 (Página 343)

1. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ **3.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{30}$ **5.** $-2 + \sqrt{21}$ **7.** 0 **17.** O valor médio é $\frac{1}{2}$ em $x = \frac{1}{2}$ **19.** $\frac{2}{\pi}$; 0,69 **21.** $v = 32t$; 32 **23.** π

EXERCÍCIOS 5.8 (Página 351)

1. 12 **3.** 36 **5.** $\frac{3}{2}$ **7.** $\frac{3}{16}$ **9.** $\frac{134}{3}$ **11.** -8 **13.** 1 **15.** $\frac{2}{9}(27 - 2\sqrt{2})$ **17.** $2 - \sqrt[3]{2}$ **19.** $\frac{104}{5}$ **21.** $\frac{29}{2}$ **23.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
25. $\frac{256}{15}$ **27.** $\frac{5}{6}$ **29.** $\frac{6.215}{12}$ **31.** $\frac{11}{6}$ **33.** 0 **35.** $\frac{3}{2}$ **37.** $\sqrt{4 + x^6}$ **39.** $-\sqrt{\text{sen } x}$
41. $\dfrac{2}{3 + x^2}$ **43.** $3x^2\sqrt[3]{x^6 + 1}$ **45.** 1 **47.** O valor médio é 6 em $x = \sqrt{3}$ **49.** 27 **51.** $\dfrac{4}{\pi}$ **55.** $\frac{188}{3}$

EXERCÍCIOS 5.9 (Página 359)

1. $\frac{32}{3}$ unidades quad. **3.** $\frac{22}{3}$ unidades quad. **5.** $\frac{52}{3}$ unidades quad. **7.** $\frac{343}{6}$ unidades quad. **9.** 1 unidade quad. **11.** 1 unidade quad.
13. $\frac{32}{3}$ unidades quad. **15.** $\frac{32}{3}$ unidades quad. **17.** $\frac{1}{6}$ unidades quad. **19.** $\frac{12}{5}$ unidades quad. **21.** $\frac{9}{2}$ unidades quad.
23. $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ unidades quad. **25.** $\frac{5}{12}$ unidades quad. **27.** $\frac{27}{10}$ unidades quad. **29.** $\frac{64}{3}$ unidades quad. **31.** $\frac{253}{12}$ unidades quad.
33. $\frac{37}{12}$ unidades quad. **35.** $(\sqrt{2} - 1)$ unidades quad. **37.** $\frac{7}{3}$ unidades quad. **39.** 12 unidades quad. **41.** $\frac{128}{5}$ unidades quad.
43. 64 unidades quad. **45.** $(\frac{1}{2}\pi - 1)$ unidades quad. **47.** $(1 - \frac{1}{4}\pi)$ unidades quad. **49.** $\frac{16}{3}p^2$ unidades quad. **51.** 32 **53.** $\frac{3}{22}K$

EXERCÍCIOS 5.10 (Página 368)

1. aproximado: 4,250; exato: 4 **3.** aproximado: 0; exato: 0 **5.** aproximado: 0,696 **7.** 0,880 **9.** 0,248 **11.** 3,689
13. $-0{,}5 \leqslant \epsilon_T \leqslant 0$ **15.** $-0{,}161 \leqslant \epsilon_T \leqslant 0{,}161$ **17.** $-0{,}007 \leqslant \epsilon_T \leqslant -0{,}001$ **19.** 4,000 **21.** 0,693 **23.** 0,6045 **25.** 0
27. $-0{,}0005 \leqslant \epsilon_S \leqslant 0$ **29.** 0,237 **31.** 1,569 **33.** 1,402 **35.** 3,090 **37.** (a) 15,95; (b) 16,03 **39.** 26,6 unidades quad. **41.** 5,9 km
43. 4,109 unidades quad. **45.** 56 **47.** 222

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 5 (Página 369)

1. $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x + C$ **3.** $2y^2 + 4y^{3/2} + C$ **5.** $-\frac{1}{3}\cos 3t + C$ **7.** $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$ **9.** $-\dfrac{2}{3x^3} + \dfrac{5}{x} + C$

11. $\frac{5}{54}(2 + 3x^2)^9 + C$ **13.** $\frac{2}{3}x\sqrt{3x} + \frac{2}{5}\sqrt{5x} + C$ **15.** $-\dfrac{1}{24(x^4 + 2x^2)^6} + C$ **17.** $\frac{1}{6}(2s + 3)^{3/2} - \frac{3}{2}(2s + 3)^{1/2} + C$

19. $\frac{1}{3}\text{ tg } 3\theta - \theta + C$ **21.** $5 \text{ sen } x - 3 \sec x + C$ **23.** $\frac{1}{420}(4x + 3)^{3/2}(30x^2 - 18x + 79) + C$ **25.** 6 **27.** $-\frac{27}{4}$ **29.** 0

31. $\frac{5}{4}$ **33.** $\frac{1}{2}$ **35.** $\frac{652}{15}$ **37.** $4 - \frac{1}{2}\pi$ **39.** $y^2 = \dfrac{1}{2x^{-1} + C} + 1$ **41.** $y = \frac{1}{15}(2x - 1)^{5/2} + C_1x + C_2$
43. (a) $\frac{1}{9}(x^3 + 1)^3 + C$; (b) $\frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{3}x^3 + C$ **45.** $y = 10x - 2x^2 - 9$ **47.** (a) $R(x) = \frac{1}{4}x^3 - 5x^2 + 12x$;
(b) $p = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 12$ **49.** (a) $V = \frac{2}{3}(t + 1)^{3/2} + \frac{1}{3}t^2 + \frac{74}{3}$; (b) 64 cm^3 **51.** 1,46 cm^3 **53.** \$5

55. $v = 3 \text{ sen } 2t + 3$, $s = -\frac{3}{2}\cos 2t + 3t + \frac{1}{2}(5 - 3\pi)$ **57.** $\dfrac{25\sqrt{817} - 625}{8}$ s $\approx$ 11,2 s **59.** (a) 1 s; (b) -80 m/s

61. 4.100.656.560 **67.** $[0, \pi]$ **69.** $\frac{313}{2}$ **71.** $-(3x^2 - 4)^{3/2}$ **73.** $\frac{1}{x}$ **75.** 0 **77.** $\frac{42.304}{175}$ **81.** 18 unidades quad.
83. $\frac{224}{3}$ unidades quad. **85.** $\frac{1}{3}(40\sqrt{5} - 20)$ unidades quad. **87.** 36 unidades quad. **89.** $\frac{1}{12}$ unidades quad. **91.** $2\sqrt{2}$ unidades quad.
93. $(\frac{1}{2}\pi - 1)$ unidades quad. **95.** (b) 47°; (c) 60°; (d) 73°; (e) 75°; (f) 67,5°; (g) $60 + \dfrac{9}{\pi}(\sqrt{3} + 2)$ graus $\approx$ 70,7° **97.** 2,977
99. 2,958 **101.** (a) 1,624; (b) 1,563 **103.** $\sqrt{3} + \frac{1}{6}\pi$ **105.** 12; $\sqrt{3}$ **111.** (b) 27

EXERCÍCIOS 6.1 (Página 381)

1. $\frac{4}{3}\pi r^3$ unidades cúb. **3.** $\frac{127}{7}\pi$ unidades cúb. **5.** 64π unidades cúb. **7.** $\frac{704}{5}\pi$ unidades cúb. **9.** $\frac{384}{7}\pi$ unidades cúb. **11.** $\frac{3.456}{35}\pi$ unidades cúb.
13. $\frac{256}{15}\pi$ unidades cúb. **15.** $\frac{128}{5}\pi$ unidades cúb. **17.** $\frac{4}{3}\pi r^3$ unidades cúb. **19.** $\frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$ unidades cúb. **21.** π unidades cúb.
23. $\frac{1}{2}\pi^2$ unidades cúb. **25.** $(4\pi - \frac{1}{2}\pi^2)$ unidades cúb. **27.** $(\sqrt{3}\pi - \frac{1}{3}\pi^2)$ unidades cúb. **29.** $\frac{1.250}{3}\pi$ unidades cúb. **31.** $\frac{64}{5}\pi$ unidades cúb.
33. $\frac{261}{32}\pi$ unidades cúb. **35.** $\frac{16}{3}\pi$ unidades cúb. **37.** 180π cm^3 **39.** $(\frac{8}{3}\pi^2 - 2\sqrt{3}\pi)$ unidades cúb. **41.** 2 **43.** $\frac{1.372}{3}\sqrt{3}$ cm^3
45. $\frac{686}{3}$ cm^3 **47.** $\frac{8}{3}r^3$ unidades cúb. **49.** $\frac{2}{3}r^3$ cm^3

EXERCÍCIOS 6.2 (Página 387)

13. $\frac{1}{2}\pi$ unidades cúb. **15.** $\frac{3}{10}\pi$ unidades cúb. **17.** $\frac{5}{6}\pi$ unidades cúb. **19.** $\frac{49}{30}\pi$ unidades cúb. **21.** 16π unidades cúb.
23. $\frac{512}{15}\pi$ unidades cúb. **25.** $\frac{32}{15}\pi p^3$ unidades cúb. **27.** $\frac{8}{5}\pi$ unidades cúb. **29.** $\frac{11}{10}\pi$ unidades cúb. **31.** $\frac{38}{15}\pi$ unidades cúb.
33. $\frac{16}{3}\pi$ unidades cúb. **35.** $\frac{32}{15}\pi$ unidades cúb. **37.** $\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})\pi$ unidades cúb. **39.** π unidades cúb. **41.** $\frac{224}{3}\pi$ unidades cúb. **43.** $\sqrt[7]{2.744}$

EXERCÍCIOS 6.3 (Página 393)

1. $\sqrt{10}$ **3.** $\sqrt{97}$ **5.** $\frac{14}{3}$ **7.** $\frac{33}{16}$ **9.** $\frac{1}{27}(97^{3/2} - 125)$ **11.** 12 **13.** $\frac{22}{3}$ **15.** $\frac{9}{8}$ **17.** $\dfrac{8a^3 - (a^2 + 3b^2)^{3/2}}{8(a^2 - b^2)}$ se $b \neq a$; $\frac{9}{8}a$ se $b = a$
19. $2\sqrt{3} - \frac{4}{3}$ **21.** 2 **23.** 3,8203 **25.** 1,0894

EXERCÍCIOS 6.4 (Página 399)

1. 250 dinas **3.** 4.000 dinas **5.** $\frac{3}{2}$ m/s^2 **7.** $\frac{8}{3}$ kg **9.** 4 **11.** 6 **13.** 54 kg; $\frac{11}{3}$ m a partir de um extremo
15. 171 g; 5,92 mm a partir de um extremo **17.** 42 g; $\frac{44}{7}$ cm a partir de um extremo
19. 31,5 kg; $\frac{18}{7}$ m a partir do extremo com a maior densidade **21.** 16 kg; $\frac{16}{5}$ m a partir de um extremo
23. 1,2 m a partir do extremo com a maior densidade **25.** $\dfrac{20}{L^2}x^2$ g/cm **27.** 12 kg/m

EXERCÍCIOS 6.5 (Página 406)

1. $(2, \frac{1}{3})$ **3.** $\frac{29}{7}$ **5.** $(\frac{2}{3}, 1)$ **7.** $(0, \frac{8}{5})$ **9.** $(0, \frac{12}{5})$ **11.** $(\frac{16}{15}, \frac{64}{21})$ **13.** $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ **15.** $(2, 0)$ **17.** $\frac{5}{3}p$
21. O ponto no raio cuja distância do centro da circunferência é $\dfrac{4}{3\pi}$ vezes o raio.
23. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ unidades cúb. **25.** $\frac{1}{6}\sqrt{2}(4 + 3\pi)\pi r^3$ unidades cúb.

EXERCÍCIOS 6.6 (Página 412)

1. $\frac{158}{3}$ J **3.** $\frac{1.076}{15}$ ergs **5.** $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{393})$ **7.** 180 ergs **9.** 8 J **11.** 1.350 ergs **13.** 6.562,5w J
15. $256\pi w$ J **17.** 13.500 J **19.** 5.500 J **21.** 9.196.875π J **23.** 1.017.938π J **25.** $\dfrac{144w}{55}$ s **27.** $2\sqrt{3}$ cm

EXERCÍCIOS 6.7 (Página 417)

1. 320ρg dinas **3.** 64ρg N **5.** 2,25ρg dinas **7.** 941.760 N **9.** 4.087.500 N **11.** $\sqrt[3]{16,31}$ m $\approx$ 2,54 m **15.** 14.000ρg N
17. 100.000ρg kg-m **19.** 12.978 N **21.** $250\sqrt{409}\rho g$ N **23.** $11.250\sqrt{3}\rho g$ N

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 6 (Página 418)

1. $\frac{1}{9}\pi$ unidades cúb. **3.** π unidades cúb. **5.** π unidades cúb. **7.** 250π unidades cúb. **9.** 1.024 unidades cúb. **11.** 3π unidades cúb.
13. $\frac{25}{6}\pi$ unidades cúb. **15.** $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ **17.** 558π cm^3 **19.** $\frac{1}{5.320}[\frac{1}{8}(10.999)^{3/2} - (2.251)^{3/2}] \approx 7{,}03$ **21.** $\frac{2}{13}$ **23.** $(\frac{3}{2}, 2)$
25. $\frac{104}{3}$ kg; $\frac{298}{65}$ m do extremo esquerdo **27.** $(\frac{9}{8}, \frac{18}{5})$ **29.** $(\frac{9}{20}, \frac{9}{20})$ **31.** $\frac{256}{3}\pi$ m^3 **33.** $\frac{128}{15}\pi$ unidades cúb. **35.** $\frac{1.539}{20}\pi$ unidades cúb.
37. 6.000 ergs **39.** 400 joules **41.** 44.145.000 joules **43.** $\frac{2.752}{3}w\pi$ joules **45.** 4,5 $w\pi$J **47.** 90 m^3 **49.** $\frac{832}{3}\pi$ unidades cúb.
51. $\frac{1}{4}\pi^2$ unidades cúb. **53.** $\frac{18}{5}\rho g$ N **55.** $\frac{82.048}{3}$N

EXERCÍCIOS 7.1 (Página 430)

1. biunívoca **3.** não é biunívoca **5.** biunívoca **7.** biunívoca **9.** biunívoca **11.** biunívoca **13.** biunívoca
15. biunívoca **17.** não é biunívoca **19.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x + 7)$; domínio: $(-\infty, +\infty)$, imagem: $(-\infty, +\infty)$ **21.** não tem inversa

23. $f^{-1}(x) = 4 - \sqrt[3]{x}$; domínio: $(-\infty, +\infty)$, imagem: $(-\infty, +\infty)$ **25.** $h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$; domínio: $[0, +\infty)$, imagem: $[3, +\infty)$
27. $F^{-1}(x) = x^3 - 1$; domínio: $(-\infty, +\infty)$, imagem: $(-\infty, +\infty)$ **29.** não tem inversa
31. $f^{-1}(x) = \frac{1}{32}x^5$; domínio: $(-\infty, +\infty)$, imagem: $(-\infty, +\infty)$ **33.** $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{1-x}$; domínio: $\{x \mid x \neq 1\}$, imagem: $\{y \mid y \neq -1\}$
35. $g^{-1}(x) = \sqrt{x-5}$; domínio: $[5, +\infty)$, imagem: $[0, +\infty)$ **37.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} - 1)$; domínio: $[0, 8]$, imagem: $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
39. $F^{-1}(x) = \sqrt{9 - x^2}$; domínio: $[0, 3]$, imagem: $[0, 3]$ **41.** (b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x + 3)$ **43.** (b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$
45. (b) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x-1}{3-2x}$ **47.** $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ **51.** (b) $f_1(x) = x^2 + 4, x \geqslant 0$; $f_2(x) = x^2 + 4, x \leqslant 0$;
(c) $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x-4}$; domínio: $[4, +\infty)$; $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x-4}$; domínio: $[4, +\infty)$
53. (b) $f_1(x) = \sqrt{9-x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 3$; $f_2(x) = \sqrt{9-x^2}, -3 \leqslant x \leqslant 0$;
(c) $f_1^{-1}(x) = \sqrt{9-x^2}$, domínio: $[0, 3]$; $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{9-x^2}$, domínio: $[0, 3]$ **55.** $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 81 \\ \frac{1}{729}x^2 & \text{se } x > 81 \end{cases}$

EXERCÍCIOS 7.2 (Página 438)

11. $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{1}{10}$ **15.** $\frac{1}{12}$ **17.** $\frac{1}{21}$ **19.** -2 **21.** $-\frac{1}{4}$ **23.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ **25.** $-\frac{1}{4}$ **27.** $\frac{1}{3}$
29. (a) $f_1(x) = \sqrt{9-x^2}, f_2(x) = -\sqrt{9-x^2}$; (b) nenhuma tem inversa; (c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}, \dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{y}{x}$
31. (a) $f(x) = \dfrac{4}{x}$; (b) $f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x}$, domínio: $\{x \mid x \neq 0\}$; (c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}, \dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x}{y}$
33. (a) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{3x}$; (b) não tem inversa; (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x-3y}{3x}, \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{3x}{4x-3y}$ **35.** (b) 6; (c) $\frac{1}{6}$ **37.** $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$ **39.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

EXERCÍCIOS 7.3 (Página 448)

1. $\dfrac{5}{4+5x}$ **3.** $\dfrac{5}{8+10x}$ **5.** $\dfrac{6}{3t+1}$ **7.** $\dfrac{6\ln(3t+1)}{3t+1}$ **9.** $-\dfrac{2x}{12-3x^2}$ **11.** $\dfrac{5\cos 5y}{\operatorname{sen} 5y}$ **13.** $-\dfrac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}$ **15.** $2 \sec 2x$
17. $\dfrac{\sec^2 x}{2 \operatorname{tg} x} = \operatorname{cosec} 2x$ **19.** $-\dfrac{17}{2(2w-5)(3w+1)}$ **21.** $\dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ **23.** $\dfrac{1-2x-x^2}{3(x+1)(x^2+1)}$ **25.** $\dfrac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$
27. $-\dfrac{xy+y}{xy+x}$ **29.** $x + y$ **31.** $\dfrac{4x^2y - xy - 2y}{6xy^2 + x}$

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 35 a 41 aparecem nas Figs. 7.3-35 a 7.3-41.)

43. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \ln 2$ **45.** $y = 40x - 40$ **47.** $-\frac{1}{2}$ **49.** (a) \$5 por \$1 no orçamento; (b) \$688

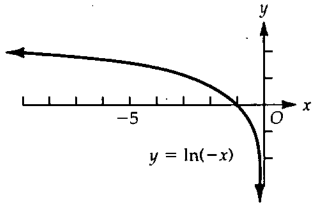


FIGURA 7.3-35

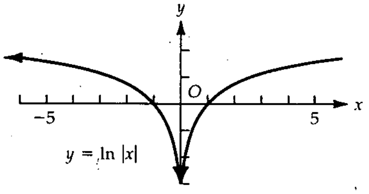


FIGURA 7.3-37

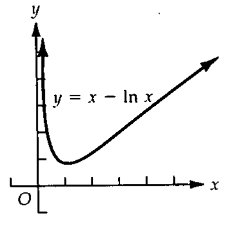


FIGURA 7.3-39

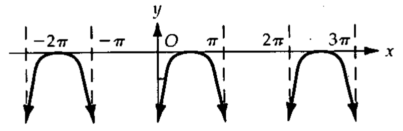


FIGURA 7.3-41

EXERCÍCIOS 7.4 (Página 454)

1. $\dfrac{3x^2}{x^3+1}$ **3.** $-\dfrac{3\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}$ **5.** $4 \sec 4x$ **7.** $\dfrac{4-x^2}{x(x^2+4)}$ **9.** $2x(x+1)^6(x-1)^2(6x^2-2x-1)$
11. $\dfrac{x(x-1)(x+2)^2}{(x-4)^6}(2x^3 - 30x^2 - 6x + 16)$ **13.** $\dfrac{8x^9 - 4x^7 + 15x^2 + 10}{5(x^7+1)^{6/5}}$ **15.** $-\frac{1}{2}\ln|3-2x| + C$ **17.** $\frac{3}{2}\ln(x^2+4) + C$
19. $\frac{1}{5}\ln|5x^3 - 1| + C$ **21.** $\frac{1}{2}\ln|1 + 2\operatorname{sen} t| + C$ **23.** $\frac{1}{5}\ln(1 - \cos 5x) + C$ **25.** $\ln(1 + \operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$
27. $x^2 + 4\ln|x^2 - 4| + C$ **29.** $\ln|\ln x| + C$ **31.** $\frac{1}{3}\ln^3 3x + C$ **33.** $\ln|(\ln x)^2 + \ln x| + C$ **35.** $\ln|\sec(\ln x)| + C$

37. $\ln 5$ **39.** $4 + \ln 2$ **41.** $\frac{1}{2}\ln(4 + 2\sqrt{3})$ **43.** $\dfrac{1}{\ln 4}$ **47.** $\frac{1}{4}\ln 5 \approx 0{,}402$ **49.** $2.000 \ln 2$ N/m^2 ≈ 1.386 N/m^2
51. ln 4 unidades quad. ≈ 1,386 unidades quad. **53.** $\pi(11 + 8\ln 2)$ unidades cúb. ≈ 51,978 unidades cúb. **55.** $\ln(2 + \sqrt{3})$

EXERCÍCIOS 7.5 (Página 462)

1. $5e^{5x}$ **3.** $-6xe^{-3x^2}$ **5.** $-e^{\cos x}\operatorname{sen} x$ **7.** $e^{2x}\cos e^x + e^x \operatorname{sen} e^x$ **9.** $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\sec^2 e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ **11.** $\dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ **13.** $2x$

15. $2e^{2x}\sec e^{2x}\operatorname{tg} e^{2x} + 2e^{2\sec x}\sec x \operatorname{tg} x$ **17.** $-e^{y-x}$ **19.** $-\dfrac{y^2 + 2ye^{2x}}{2e^{2x} + 3xy}$ **21.** $-\frac{1}{5}e^{2-5x} + C$ **23.** $e^x - e^{-x} + C$

25. $\dfrac{1}{6(1 - 2e^{3x})} + C$ **27.** $e^x - 3\ln(e^x + 3) + C$ **29.** e^2 **31.** 2 **33.** $\frac{1}{2}$ **35.** $\frac{1}{2}(e^4 - 1)$ **37.** 2,67 **39.** 2,57

41. Veja Fig 75-41 **43.** $(e^2 - 1)$ unidades quad. **45.** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$ **47.** $(e^3 + \frac{1}{2})$ m $\approx$ 20,586 m **49.** $-46{,}97$ N/m²/s

51. 0,0009 **53.** $\frac{1}{2}\pi w(e^{-2} - e^{-8})$ J **55.** (b) 2,7181459; 2,7184177; 2,7182818 **61.** $f(1) = \dfrac{1}{e}$, max. rel.; $(2, 2e^{-2})$, ponto de inflexão; crescente em $(-\infty, 1]$; decrescente em $[1, +\infty)$; côncavo para baixo para $x < 2$; côncavo para cima para $x > 2$. Veja Fig. 7.5-61

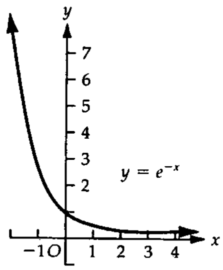


FIGURA 7.5-41

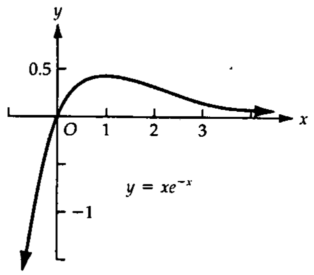


FIGURA 7.5-61

EXERCÍCIOS 7.6 (Página 468)

1. $(5\ln 3)3^{5x}$ **3.** $4^{3t^2}(\ln 4)\,6t$ **5.** $4^{\operatorname{sen} 2x}(2\ln 4)\cos 2x$ **7.** $2^{5x}3^{4x^2}(5\ln 2 + 8x\ln 3)$ **9.** $\dfrac{1}{x^2}\log_{10}\dfrac{e}{x}$ **11.** $\dfrac{\log_a e}{2x\sqrt{\log_a x}}$

13. $\dfrac{(\log_{10} e)^2}{(x + 1)\log_{10}(x + 1)}$ **15.** $3^{t^2}\sec 3^{t^2}\operatorname{tg} 3^{t^2}(2t\ln 3)$ **17.** $x^{\sqrt{x}-(1/2)}(1 + \frac{1}{2}\ln x)$ **19.** $z^{\cos z - 1}[\cos z - z(\ln z)\operatorname{sen} z]$

21. $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}[1 + (\ln \operatorname{sen} x)\sec^2 x]$ **23.** $x^{e^x - 1}e^x(x\ln x + 1)$ **25.** $\dfrac{3^{2x}}{2\ln 3} + C$ **27.** $\dfrac{a^t e^t}{1 + \ln a} + C$ **29.** $\dfrac{10^{x^3}}{3\ln 10} + C$

31. $\dfrac{6^{e^y}}{\ln 6} + C$ **33.** 0,621 **35.** 2,999 **45.** (a) 61 vendas por dia; (b) 2,26 vendas por dia **49.** (a) $y = 200 \cdot 2^{t/10}$; (b) \$ 12,800; (c) \$877 por ano **51.** $\left(e - 1 - \dfrac{1}{\ln 2}\right)$ unidades quad. $\approx$ 0,276 unidades quad. **53.** $\left(\dfrac{4}{\ln 3} - 1\right)\pi$ unidades cúb. $\approx$ 8,297 unidades cúb.

EXERCÍCIOS 7.7 (Página 480)

1. 68,4 anos **3.** 38.720 **5.** \$2.734 **7.** 16.000 **9.** (a) 96 %; (b) 66 % **11.** 1.389 **13.** (a) \$52,59; (b) 10,52 %
15. 15,9 anos **17.** 8,7 anos **19.** 43,9 g **21.** 11,6 kg **23.** 6.451 anos atrás **25.** (a) 34,7; (b) 55,5′ **27.** (a) 0,3401; (b) 0,3414 **29.** 0,8427

EXERCÍCIOS 7.8 (Página 491)

1. $y = \dfrac{C}{x}$ **3.** $y = C\cos x$ **5.** $y = (x + C)e^x$ **7.** $y = [\ln(1 + e^x) + C]e^{-x}$ **9.** $x = y + Cy^{-2}$ **11.** $y = \frac{1}{3}\operatorname{sen} x + C\operatorname{cosec}^2 x$

13. $y = \dfrac{x + C}{1 + x^2}$ **15.** $x = \ln y(\ln|\ln y| + C)$ **17.** $y = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ **19.** $y = x(e^{x-1} + 1)$ **21.** $y = 5\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x\cos x$

23. $y = 8\operatorname{sen}^2 x - 2$ **25.** 70 min **27.** (a) 1 min 42 s; (b) 42,1° **29.** (a) $i = 3 - 3e^{-5t}$; (b) 3 ampères **31.** $i = \frac{1}{45}(e^t - e^{-8t})$
33. (a) $q = 8 - 4(1 + 0{,}01t)^{-1.000}$; (b) $i = 40(1 + 0{,}01t)^{-1.001}$; (c) 8 coulombs **35.** $y = (\frac{1}{3}x^{-3} + Cx^6)^{-1/3}$
37. $y = \pm(\frac{1}{3}e^{-x^2} + Ce^{2x^2})^{-1/2}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 7 (Página 492)

1. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 4}$; domínio: $(-\infty, +\infty)$; imagem: $(-\infty, +\infty)$ **3.** não tem inversa

5. $f^{-1}(x) = \dfrac{4}{3 - x}$; domínio: $\{x|x \neq 3\}$; imagem: $\{y|y \neq 0\}$ **7.** (b) $f^{-1}(x) = x^3 - 1$ **9.** $\frac{1}{4}$ **11.** $\frac{1}{12}$ **13.** $\dfrac{8 \ln x}{x}$

15. $(-4 \ln 2)2^{\cos 4x} \operatorname{sen} 4x$ **17.** $\dfrac{(4 - x^2)e^{x/(4+x^2)}}{(4 + x^2)^2}$ **19.** $\dfrac{\log_{10} e}{(1 - x^2)\sqrt{\log_{10} \dfrac{1 + x}{1 - x}}}$ **21.** 0

23. $x^{x^{e^x} + e^{x-1}}(xe^x \ln^2 x + e^x \ln x + 1)$ **25.** $\frac{3}{2}\ln(1 + e^{2x}) + C$ **27.** $\dfrac{1}{3}\left(e^{3x} + \dfrac{2^{3x}}{\ln 2} + C\right)$ **29.** $\frac{1}{6}\sqrt{1 + e^{6x^2}} + C$

31. $\dfrac{2}{3 \ln 2}\sqrt{3 \cdot 2^x + 4} + C$ **33.** $\frac{1}{3}(e^8 - 1)$ **35.** $\frac{3}{2} \ln 2$ **37.** $1 + 5 \ln \frac{3}{4}$ **39.** $-\dfrac{ye^x + e^y + 1}{e^x + xe^y + 1}$ **41.** 5,004

43. $v = e^t - e^{-t} + 1$; $s = e^t + e^{-t} + t$ **45.** $\frac{1}{2}\pi(1 - e^{-2b})$; $\frac{1}{2}\pi$ **47.** 8.212 anos **49.** $g(x) = -e^x$; domínio: $(-\infty; +\infty)$

53. $3.000 \ln \frac{3}{2}$ ergs **55.** 8,66 anos **57.** 187.500 **59.** (a) 32; (b) 43,5; (c) 3,83 **61.** 8,63 min **63.** $(1, e)$ **71.** $\operatorname{sgn} t(1 - e^{-|t|})$

73. (a) $\ln \frac{4}{5} > \ln \frac{1}{2}$; (b) $\ln 2 > -\ln 2$; (c) $\ln 2 > \ln \frac{5}{4}$ **75.** $y = x + x^{-1} + Cx^{-2}$

77. $y = (x + 2)(\sec x - \operatorname{tg} x)$ **79.** (a) $i = 10 - 10(1 + \frac{1}{3}t)^{-1.000}$; (b) 10 ampères **81.** 73,7°

EXERCÍCIOS 8.1 (Página 502)

1. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{6}\pi$; (c) $\frac{1}{3}\pi$; (d) $\frac{2}{3}\pi$ **3.** (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $\frac{7}{6}\pi$ **5.** (a) $\frac{1}{2}\pi$; (b) $-\frac{1}{2}\pi$; (c) $\frac{1}{2}\pi$; (d) $-\frac{1}{2}\pi$; (e) 0

7. (a) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; (b) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$; (c) $2\sqrt{2}$; (d) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$; (e) 3 **9.** (a) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; (b) $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$; (c) $-2\sqrt{2}$; (d) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$; (e) -3

11. (a) $-\frac{2}{5}\sqrt{5}$; (b) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$; (c) $-\frac{1}{2}$; (d) $\sqrt{5}$; (e) $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ **13.** (a) $-\frac{2}{3}$; (b) $-\frac{1}{3}\sqrt{5}$; (c) $\frac{2}{5}\sqrt{5}$; (d) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; (e) $-\frac{3}{5}\sqrt{5}$

15. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{6}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $-\frac{1}{6}\pi$; **17.** (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{2}{3}\pi$; (d) $\frac{2}{3}\pi$ **19.** (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $-\frac{1}{3}\pi$

21. (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $\frac{2}{3}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $\frac{2}{3}\pi$ **23.** (a) $\frac{1}{3}\pi$; (b) $\frac{1}{3}\pi$; (c) $\frac{4}{3}\pi$; (d) $\frac{4}{3}\pi$ **25.** (a) $\frac{1}{6}\pi$; (b) $-\frac{5}{6}\pi$; (c) $\frac{1}{6}\pi$; (d) $-\frac{5}{6}\pi$

27. (a) $\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{7}\sqrt{21}$ **29.** (a) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **31.** $\frac{119}{169}$ **33.** $\frac{2}{9}(1 + \sqrt{10})$ **35.** $\frac{1}{27}(7\sqrt{5} + 8\sqrt{2})$ **37.** $\frac{1}{39}(48 - 25\sqrt{3})$

39. $\frac{1}{15}(4\sqrt{10} + \sqrt{5})$ **43.** Veja Fig. 8.1-43 **45.** Veja Fig. 8.1-45 **47.** Veja Fig. 8.1-47 **49.** Veja Fig. 8.1-49

51. (a) $\left\{t \middle| t = \frac{1}{4\pi}\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{2} - \frac{1}{8} + \frac{k}{2}\right\} \cup \left\{t \middle| t = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi}\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{2} + \frac{k}{2}\right\}$, onde k é um inteiro qualquer; (b) $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$

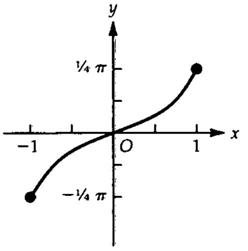


FIGURA 8.1-43

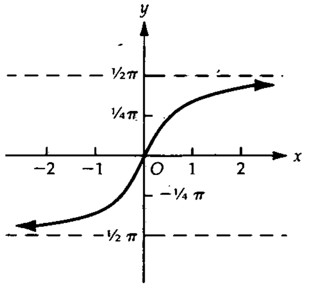


FIGURA 8.1-45

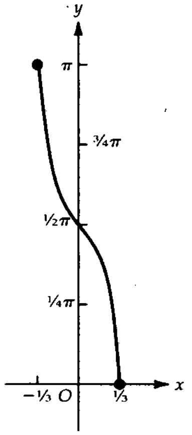


FIGURA 8.1-47

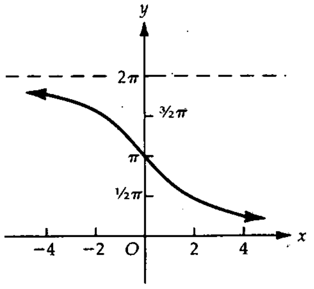


FIGURA 8.1-49

EXERCÍCIOS 8.2 (Página 509)

1. $\dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ **3.** $\dfrac{2}{1 + 4x^2}$ **5.** $-\dfrac{1}{\sqrt{x - x^2}}$ **7.** 0 **9.** $-\dfrac{x}{|x|\sqrt{1 - x^2}}$ **11.** $\dfrac{4}{4 + x^2}$ **13.** $\operatorname{sen}^{-1} 2y + \dfrac{2y}{\sqrt{1 - 4y^2}}$

15. $2x \sec^{-1}\dfrac{1}{x} - \dfrac{x|x|}{\sqrt{1 - x^2}}$ **17.** $-\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$ **19.** $\dfrac{2x}{(1 + x^4)\operatorname{tg}^{-1} x^2}$ **21.** $2\sqrt{4 - x^2}$ **23.** $-\dfrac{3}{\sqrt{4e^{6x} - 1}}$ **25.** $\operatorname{cotg}^{-1} x$

27. $-1-\dfrac{1}{\cos^{-1}x\sqrt{1-x^2}}$ **29.** $\dfrac{(1+y^2)(3x^2+\operatorname{sen} y)}{1-x\cos y(1+y^2)}$ **31.** $2\sqrt{3}x-6y+2\pi-\sqrt{3}=0$; $6\sqrt{3}x+6y-2\pi-3\sqrt{3}=0$

33. $\sqrt{10}$ m **35.** 0,078 rad/s **37.** $\frac{52}{3}\pi$ km/min **39.** 2,4 m/s **41.** $\dfrac{6}{x\sqrt{x^2-64}}$

EXERCÍCIOS 8.3 (Página 513)

1. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}2x+C$ **3.** $\frac{1}{12}\operatorname{tg}^{-1}\frac{3x}{4}+C$ **5.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{x-1}{2}+C$ **7.** $\frac{1}{16}\sec^{-1}\frac{x}{4}+C$ **9.** $\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{10}}{2}x+C$

11. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{3r^2}{4}+C$ **13.** $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{e^x}{\sqrt{7}}+C$ **15.** $2\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x}+C$ **17.** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{2x-1}{\sqrt{7}}+C$ **19.** $\cos^{-1}\dfrac{1-x}{4}+C$

21. $\cos^{-1}\dfrac{1+x}{2}-\sqrt{3-2x-x^2}+C$ **23.** $\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{1+x}{\sqrt{5}}-\sqrt{4-2x-x^2}+C$

25. $\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{4}\ln(2x^2-4x+3)-\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{2}(x-1)+C$ **27.** $\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\ln 2$ **29.** $\frac{1}{3}\pi$ **31.** $\operatorname{tg}^{-1}e-\frac{1}{4}\pi$

33. $\frac{1}{4}\pi$ **35.** π unidades quad. **37.** $\frac{1}{3}\pi$ unidades quad.

EXERCÍCIOS 8.4 (Página 522)

17. $\frac{4}{5}\operatorname{sech}^2\dfrac{4x+1}{5}$ **19.** $2e^{2y}\cosh e^{2y}$ **21.** $-8\operatorname{sech}^2 4w\operatorname{tgh}4w$ **23.** e^{2x} **25.** $2\operatorname{cosech}2t$ **27.** $2x\operatorname{sech}x^2$

29. $x^{\operatorname{senh}x-1}(x\cosh x\ln x+\operatorname{senh}x)$ **35.** $\frac{1}{2}\cosh^2(e^t)+C$ **37.** $2\cosh\sqrt{x}+C$ **39.** $x-\frac{1}{3}\operatorname{cotgh}3x+C$ **41.** $\frac{1}{6}\operatorname{tgh}^6x+C$

43. $\frac{1}{2}\ln^2\cosh x+C$ **45.** $\frac{4}{5}$ **47.** $\frac{1}{4}\operatorname{senh}^4 2$

49. $\operatorname{sech}(0)=1$, máx. rel; pts. de inflex. em $x=\pm\ln(1+\sqrt{2})$; crescente em $(-\infty,0]$; decrescente em $[0,+\infty)$; côncavo para cima para $x<-\ln(1+\sqrt{2})$ e $x>\ln(1+\sqrt{2})$; côncavo para baixo para $-\ln(1+\sqrt{2})<x<\ln(1+\sqrt{2})$

51. $a^2\operatorname{senh}\dfrac{x_1}{a}$ unidades quad. **53.** $v=e^{-ct/2}[(B-\frac{1}{2}cA)\operatorname{senh}t+(A-\frac{1}{2}cB)\cosh t]$;

$a=e^{-ct/2}[(A-cB+\frac{1}{4}c^2A)\operatorname{senh}t+(B-cA+\frac{1}{4}c^2B)\cosh t]$; $a=K_1s+K_2v$, onde $K_1=1-\frac{1}{4}c^2$ e $K_2=-c$

EXERCÍCIOS 8.5 (Página 527)

9. (a) $\ln\frac{1}{4}(1+\sqrt{17})$; (b) $\frac{1}{2}\ln 3$ **11.** $\dfrac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$ **13.** $\dfrac{4}{1-16x^2}$ **15.** $-\dfrac{1}{2x+3x^2}$ 17. $2x\left(\cosh^{-1}x^2+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4-1}}\right)$

19. $|\sec x|$ **21.** $-\dfrac{\operatorname{cosec}x\operatorname{cotg}x}{|\operatorname{cotg}x|}$ **23.** $\dfrac{6z(\operatorname{cotgh}^{-1}z^2)^2}{1-z^4}$ **25.** $-e^x\operatorname{cosec}e^x$ **27.** $\operatorname{senh}^{-1}x$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 8 (Página 527)

1. (a) $\frac{4}{5}$; (b) $\frac{3}{5}$; (c) $\frac{3}{4}$; (d) $-\frac{3}{4}$ **3.** (a) $-\frac{120}{169}$; (b) $\frac{3}{4}$ **5.** $\dfrac{2^x\ln 2}{1+2^{2x}}$ **7.** $6\operatorname{senh}^2 2x\cosh 2x$ **9.** $\dfrac{x}{|x|(x^2+1)}$ **11.** $\dfrac{\operatorname{sech}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

13. $-4e^{2x}\operatorname{cosech}e^{2x}\operatorname{cotgh}e^{2x}$ **15.** $(\cosh x)^{1/x}\left(\dfrac{x\operatorname{tgh}x-\ln\cosh x}{x^2}\right)$ **19.** $\dfrac{6xy-9y^4-x^4y^2}{3x^2+18xy^3+2x^5y}$ **21.** $\frac{3}{2}\operatorname{sen}^{-1}x^2+C$

23. $x-\frac{1}{3}\operatorname{tgh}3x+C$ **25.** $\dfrac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{4t+3}{\sqrt{31}}+C$ **27.** $\frac{1}{4}\sqrt{2}\sec^{-1}\frac{1}{4}\sqrt{2}e^x+C$ **29.** $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}-2$ **31.** $2\sqrt{2}\operatorname{senh}\frac{1}{2}$

33. (a) $\left\{t\,\middle|\,t=\dfrac{k}{60}+\dfrac{1}{120\pi}\cos^{-1}\dfrac{E}{20}\right\}\cup\left\{t\,\middle|\,t=\dfrac{k}{60}-\dfrac{1}{120\pi}\cos^{-1}\dfrac{E}{20}\right\}$, onde k é um inteiro qualquer; (b) $\frac{1}{360}$; (c) 0,0035; (d) $\frac{1}{180}$; (e) 0,0048

37. $9\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}\sqrt{2}$ unidades quad. **39.** $\frac{1}{4}\pi$ unidades cúb. **41.** (a) 120 rad/h; (b) 60 rad/h **43.** decrescente à taxa de 60 rad/h

45. $\frac{1}{10}\pi$ h; ele vai a pé **47.** $\ln(2+\sqrt{3})$ **49.** $2w\operatorname{senh}^{-1}2w+\dfrac{2w^2}{\sqrt{4w^2+1}}$ **51.** $\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

EXERCÍCIOS 9.1 (Página 536)

1. $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$ **3.** $x \sec x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$ **5.** $x \ln x - x + C$ **7.** $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$
9. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1} x(x^2 + 1) - \frac{1}{2}x + C$ **11.** $\dfrac{e^x}{x + 1} + C$ **13.** $-\cos x \ln(\cos x) + \cos x + C$ **15.** $\frac{1}{2}e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + C$
17. $- x^2\sqrt{1 - x^2} - \frac{2}{3}(1 - x^2)^{3/2} + C$ **19.** $x^2 \cosh x - 2x \operatorname{senh} x + 2 \cosh x + C$ **21.** $2\sqrt{z} \operatorname{cotg}^{-1}\sqrt{z} + \ln(1 + z) + C$
23. $2\sqrt{x} \operatorname{sen}\sqrt{x} + 2 \cos\sqrt{x} + C$ **25.** $\frac{36}{\ln 3} - \frac{36}{(\ln 3)^2} + \frac{16}{(\ln 3)^3}$ **27.** $\frac{9}{16}$ **29.** $\frac{1}{4}(3e^4 + 1)$ **31.** $\frac{4}{25}(e^{3\pi/4} + 1)$

33. $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} + 1$ **35.** $(e^2 + 1)$ unidades quad. **37.** $\frac{1}{2}\pi(3e^4 + 1)$ unidades cúb. **39.** $(8 - 24e^{-2})$ unidades quad.
41. $2(1 - e^{-6})$ kg; $\dfrac{e^6 - 7}{e^6 - 1}$ m de um extremo **43.** (0,267, 0,604) **45.** $\frac{1}{4}(1 - 9e^{-8})\, w\pi$ joules **47.** $C(x) = x \ln x - x + 6$
49. (b) $\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$ **51.** (b) $\frac{1}{5}\sec^4 x \operatorname{tg} x + \frac{4}{15}\sec^2 x \operatorname{tg} x + \frac{8}{15}\operatorname{tg} x + C$ **55.** (a) 0,4156; (b) −0,4133
57. (a) $i = \dfrac{3}{625 + 9\pi^2}(250 \operatorname{sen} 120\pi t - 30\pi \cos 120\pi t) + \dfrac{90\pi}{625 + 9\pi^2}e^{-1.000t}$ (b) $i \approx \dfrac{3}{625 + 9\pi^2}(250 \operatorname{sen} 120\pi t - 30\pi \cos 120\pi t)$.

EXERCÍCIOS 9.2 (Página 541)

1. $\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$ **3.** $-\frac{1}{16}\cos^4 4x + C$ **5.** $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$ **7.** $\frac{3}{8}z - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2z + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4z + C$

9. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$ **11.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$ **13.** $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$ **15.** $\frac{1}{8}t - \frac{1}{96}\operatorname{sen} 12t + C$
17. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{2/3} 3x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^{8/3} 3x + C$ **19.** $\frac{1}{14}\operatorname{sen} 7x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$ **21.** $-\frac{1}{16}\cos 8y + \frac{1}{4}\cos 2y + C$
23. $t - \operatorname{sen} t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6t + C$ **25.** $\frac{2}{3}$ **27.** $\frac{3}{8}$ **29.** $\frac{1}{8}$ **31.** $\frac{1}{8}(\sqrt{2} - 1)$
33. (a) $\operatorname{sen}^2 x + C$; (b) $-\cos^2 x + C$; (c) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$ **39.** $\frac{1}{2}\pi$ unidades quad. **41.** $\frac{3}{8}\pi^2$ unidades cúb. **43.** $\frac{5}{8}\pi^2$ unidades cúb.
45. $(\frac{1}{2}\pi - 1, \frac{1}{8}\pi)$ **49.** 31.250.000 N

EXERCÍCIOS 9.3 (Página 545)

1. $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x - x + C$ **3.** $-\frac{1}{4}\operatorname{cotg} 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$ **5.** $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 t - \ln|\operatorname{sen} t| + C$
7. $\frac{1}{15}\operatorname{tg}^5 3x - \frac{1}{9}\operatorname{tg}^3 3x + \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x - x + C$ **9.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C$ **11.** $-\frac{1}{2}\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C$
13. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 e^x - \operatorname{tg} e^x + e^x + C$ **15.** $\frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x + \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + C$ **17.** $-\frac{1}{15}\operatorname{cotg}^5 3x - \frac{1}{9}\operatorname{cotg}^3 3x + C$
19. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x) + C$ **21.** $2 \sec w - \operatorname{tg} w + C$ **23.** $\frac{1}{12}\operatorname{tg}^4 3x - \frac{1}{6}\operatorname{tg}^2 3x + \frac{1}{3}\ln|\sec 3x| + C$
25. $u - 2 \operatorname{tg}\frac{1}{4}u + C$ **27.** $-\frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + C$ **29.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4(\ln x) + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^6(\ln x) + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^8(\ln x) + C$ **31.** $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\ln 2$ **33.** $\frac{56}{15}$
35. $\frac{1}{5}$ **37.** $(1 - \frac{1}{4}\pi)$ unidades quad. **39.** $\frac{4}{3}\pi$ unidades cúb.

EXERCÍCIOS 9.4 (Página 550)

1. $-\dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + C$ **3.** $\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}\right| + C$ **5.** $\frac{1}{5}\ln\left|\dfrac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x}\right| + C$ **7.** $\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$

9. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{2}x - \dfrac{x}{2(x^2 + 4)} + C$ **11.** $-\dfrac{x}{9\sqrt{4x^2 - 9}} + C$ **13.** $\frac{1}{5}\ln\left(\dfrac{\sqrt{t^4 + 25} - 5}{t^2}\right) + C$ **15.** $\ln|x + 2 + \sqrt{4x + x^2}| + C$
17. $\dfrac{x + 2}{9\sqrt{5 - 4x - x^2}} + C$ **19.** $\dfrac{\operatorname{tg} x}{4\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 x}} + C$ **21.** $\frac{1}{3}\sqrt{\ln^2 w - 4}(8 + \ln^2 w) + C$ **23.** $-\dfrac{e^t + 4}{9\sqrt{e^{2t} + 8e^t + 7}} + C$
25. $\frac{128}{3} - 24\sqrt{3}$ **27.** $\frac{1}{27}(6 - 2\sqrt{3})$ **29.** $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\pi$ **31.** $\frac{625}{16}\pi$ **33.** (a) $\sec^{-1}\frac{2}{3}x + C$; (b) $-\frac{5}{2}\sqrt{3 - 2x^2} + C$

35. $\ln\left(\dfrac{\sqrt{10} - 1}{3\sqrt{2} - 3}\right) + \sqrt{10} - \sqrt{2}$ **37.** $\frac{81}{16}\pi^2$ unidades cúb. **39.** $\dfrac{392}{60 + 27 \ln 3}$ cm do extremo esquerdo

41. $\left(\dfrac{20 - 15 \cos^{-}\frac{3}{5}}{5 \ln 3 - 4}, \dfrac{26}{225(5 \ln 3 - 4)}\right)$ **43.** $(\frac{8}{3}\pi + 3\sqrt{3})\,\rho g$ kg **45.** $(\frac{512}{3}\pi + 192\sqrt{3})\,\rho$ g

---

EXERCÍCIOS 9.5 (Página 560)

1. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$ **3.** $\ln|C(x-2)^2(x+2)^3|$ **5.** $\ln\left|\frac{C(w+4)^3}{2w-1}\right|$ **7.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{Cx^4(2x+1)^3}{2x-1}\right|$ **9.** $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right| - \frac{1}{3x} + C$

11. $2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + C$ **13.** $\frac{3}{x+1} + \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$

15. $\frac{5}{16(z+2)} - \frac{7}{16(z-2)} + \frac{1}{32}\ln\left|\frac{z+2}{z-2}\right| + C$ **17.** $\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{x-1} - \ln|x^2+2x-3| + C$

19. $-\ln[(3x+2)^{2/3}(x-1)^2] - \frac{1}{3(3x+2)} - \frac{3}{x-1} + C$ **21.** $4\ln\frac{4}{3} - \frac{3}{2}$ **23.** $\ln\frac{27}{4} - 2$ **25.** $13\ln 2 - 4\ln 5$ **27.** $\ln\frac{7}{2} - \frac{5}{3}$

29. ln 4,5 unidades quad. **31.** $2\pi(2 + 6\ln 3 - 2\ln 2)$ unidades cúb. **33.** $\left(\frac{6\ln 3 - 2\ln 2 + 2}{2\ln 3 - \ln 2}, \frac{48\ln 2 - 48\ln 3 + 35}{24(2\ln 3 - \ln 2)}\right)$

35. (a) $f(t) = \frac{5.000}{1 + 4.999e^{-0,5t}}$; (b) 1.328; (c) 4.075; (d) 5.000 **37.** 50 % **39.** \$11.201.100 **41.** $\frac{31}{19}$ **43.** 7,4 g

---

EXERCÍCIOS 9.6 (Página 565)

1. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{Cx^2}{2x^2+1}\right|$ **3.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^{-1}2x + C$ **5.** $\frac{1}{10}\ln|(t^2+1)(2t+1)^3| + \frac{2}{5}\operatorname{tg}^{-1}t + C$

7. $\ln|x-1| + \operatorname{tg}^{-1}x + C$ **9.** $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{Cx^2}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ **11.** $\ln\left(\frac{Cx^2}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}x - \frac{x}{2(x^2+1)}$

13. $\frac{5}{2}\ln(z^2-2z+5) + \frac{65}{16}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{z-1}{2}\right) - \frac{47z-15}{8(z^2-2z+5)} + C$

15. $\frac{5}{162}\ln|9x^2+3x+1| - \frac{2}{81}\ln|3x-1| + \frac{5}{9\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{6x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$ **17.** $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2}{3}x + \frac{x}{4x^2+9} + C$

19. $\ln|\operatorname{tg}x + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\operatorname{tg}x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$ **21.** $6\ln 2$ **23.** $\ln\frac{12}{5} + \frac{3}{2}\ln\frac{20}{13}$ **25.** $\frac{1}{4}\pi$ **27.** $\frac{3}{4}\ln 2 + \frac{5}{8}\pi$

29. $\frac{3}{8}\ln\frac{125}{41}$ **31.** $\frac{1}{16}$ unidades quad. **33.** $(\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi^2 - \frac{2}{3}\pi\ln 3)$ unidades cúb. **35.** $\frac{3}{50}\ln\frac{(t_1+2)^2}{4(t_1{}^2+1)} - \frac{7}{5(t_1+2)} - \frac{4}{25}\operatorname{tg}^{-1}t_1 + \frac{7}{10}$

EXERCÍCIOS 9.7 (Página 569)

1. $\frac{2}{3}x^{3/2} - 3x + 18\sqrt{x} - 54\ln(3+\sqrt{x}) + C$ **3.** $\ln\left|\frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{1+4x}+1}\right| + C$ **5.** $-2\sqrt{1+x} + \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}\right| + C$

7. $\frac{3}{2}(x-2)^{2/3} - 3(x-2)^{1/3} + 3\ln|1+(x-2)^{1/3}| + C$ **9.** $2\sqrt{2x} + 2\sqrt{x+4} + 4\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x}+2}\right| + C$

11. $\frac{1}{9}\sqrt{1+2x^3}(2x^3+7) + C$ **13.** $\frac{6}{\sqrt{15}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$ **15.** $\frac{\sqrt{15}}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{15}+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\sqrt{15}-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\right| + C$

17. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x| - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x + C$ **19.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x - 3}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}}\right| + C$ **21.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x + 3}\right| + C$ **23.** $\sqrt{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x + \sqrt{2}}{\operatorname{tg}x - \sqrt{2}}\right| + C$

25. $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\right| + C$ **27.** $-\frac{1}{2}\ln|13-\operatorname{tg}^2x| + C$ **29.** $2\operatorname{tg}^{-1}(2+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x) + C$

31. $3\operatorname{tg}^{-1}\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + C$ **33.** $4 - 2\ln 3$ **35.** $\ln\frac{11}{10}$ **37.** $\frac{1}{4}\ln 3$ **39.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(1+\frac{1}{2}\sqrt{3})$

41. $2\sqrt{3}\ln(1+\sqrt{3})$ **43.** $\frac{3}{2}\pi - \frac{152}{35}$ **45.** $2\ln|\sqrt{x}-1| + C$

EXERCÍCIOS 9.8 (Página 574)

1. $\operatorname{senh}^{-1}\frac{1}{2}x + C = \ln\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+4}) + C$ **3.** $\frac{1}{2}\cosh^{-1}x^2 + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{x^4-1}) + C$

5. $\left.\begin{cases} -\frac{1}{12}\operatorname{tgh}^{-1}(\frac{3}{4}x) + C & \text{se } |x| < \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{12}\operatorname{cotgh}^{-1}(\frac{3}{4}x) + C & \text{se } |x| > \frac{4}{3} \end{cases}\right\} = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{4-3x}{4+3x}\right| + C$ **7.** $\operatorname{senh}^{-1}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{3}} + C = \ln(\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 3}) + C$

9. $\frac{1}{\sqrt{5}}\cosh^{-1}(\sqrt{5}e^t) + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln(\sqrt{5}e^t + \sqrt{5e^{2t}-1}) + C$

11. $\left.\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + C & \text{se } |x+2| < \sqrt{6} \\ \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{cotgh}^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + C & \text{se } |x+2| > \sqrt{6} \end{cases}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+2+x}{\sqrt{6}-2-x}\right| + C$

13. $\left.\begin{cases} -\operatorname{tgh}^{-1}(x+5) + C & \text{se } |x+5| < 1 \\ -\operatorname{cotgh}^{-1}(x+5) + C & \text{se } |x+5| > 1 \end{cases}\right\} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+6}{x+4}\right| + C$

15. $\frac{3}{2}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2\ln w}{3}\right) + C = \frac{3}{2}\ln(2\ln w + \sqrt{4\ln^2 w + 9}) + C$

17. $\ln\frac{5+\sqrt{21}}{3+\sqrt{5}}$ **19.** $\ln 3$ **21.** $\frac{1}{3}\ln\frac{7+\sqrt{40}}{4+\sqrt{7}}$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 9 (Página 575)

1. $\frac{1}{8}x - \frac{1}{128}\operatorname{sen} 16x + C$ **3.** $-2\sqrt{4-e^x} + C$ **5.** $(x+1)\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$ **7.** $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\operatorname{sen}\frac{2}{3}x + C$

9. $\ln|x-1| - 2(x-1)^{-1} - (x-1)^{-2} + C$ **11.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + C$ **13.** $3\ln\left|\frac{x^{1/3}}{1+x^{1/3}}\right| + C$

15. $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x - \frac{1}{3}\operatorname{cotg} 3x + \frac{2}{3}\ln|\operatorname{tg} 3x| + C$ **17.** $2t + \ln\frac{t^2}{(t+2)^{10}} - \frac{15}{t+2} + C$ **19.** $x - \operatorname{tg}^{-1}x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

21. $\frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\operatorname{sen} 12x - \frac{1}{144}\operatorname{sen}^3 6x + C$ **23.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{r+2}{\sqrt{7}}\right) + C$ **25.** $\frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} x^2 + \frac{1}{2}\cos x^2 + C$

27. $\frac{2}{17}e^{t/2}(4\operatorname{sen} 2t + \cos 2t) + C$ **29.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^{-1}(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x) + C$ **31.** $\begin{cases} \frac{1}{n}\left(-\cos nx + \frac{2}{3}\cos^3 nx - \frac{1}{5}\cos^5 nx\right) + C & \text{se } n \neq 0 \\ C & \text{se } n = 0 \end{cases}$

33. $-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^3 x\operatorname{cotg} x - \frac{3}{8}\operatorname{cosec} x\operatorname{cotg} x + \frac{3}{8}\ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C$ **35.** $2\ln|y-2| - 8(y-2)^{-1} - \frac{9}{2}(y-2)^{-2} + C$

37. $-\operatorname{tg}^{-1}(\cos x) + C$ **39.** $2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{t-2}{2}\right) + \frac{1}{2}(t-2)\sqrt{4t-t^2} + C$ **41.** $\frac{1}{3}\ln|1-x^{-3}| + C$ **43.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}(\frac{3}{2}e^x) + C$

45. $-\frac{1}{15}\operatorname{cotg}^5 3x - \frac{1}{9}\operatorname{cotg}^3 3x + C$ **47.** $\frac{1}{3}x^3\operatorname{sen}^{-1}x + \frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$ **49.** $\operatorname{tg}^{-1}(\cos x) + C$

51. $\frac{2}{3}\sec^{-1}(2\operatorname{sen} 3t) + C$ **53.** $-\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3a^2x^3} + C$ **55.** $\sqrt{2t} - \sqrt{1-2t}\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2t} + C$

57. $\frac{4}{3}\sqrt{2+\sqrt{x-1}}(\sqrt{x-1} - 4) + C$

59. $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{2\operatorname{tg} x} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1) + C$

61. $\begin{cases} \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C & \text{se } n \neq -1 \\ \frac{1}{2}\ln^2 x + C & \text{se } n = -1 \end{cases}$ **63.** 4 **65.** $\frac{1}{2} + 2\ln\frac{6}{5}$ **67.** $\frac{16}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2}$ **69.** $\frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi$ **71.** $\frac{4}{3}$

73. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln 2$ **75.** $-a^2(\frac{9}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi)$ **77.** $\frac{1}{2}\ln\frac{9}{2} - \frac{1}{6}\pi$ **79.** 5 **81.** $\frac{1}{6} + \ln\frac{3}{2}$ **83.** $\frac{4}{3}$ **85.** $1 - \frac{1}{2}\ln 3$ **87.** $\frac{1}{24}\pi$

89. $\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$ **91.** $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$ **93.** $\frac{256}{15}$ **95.** $\frac{1}{3}k(1 - e^{-9})$ kg; $\frac{e^9 - 10}{3(e^9 - 1)}$ m de um extremo

97. $9\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{5} + 2}\right)$ **99.** $\frac{1}{8}\pi$ unidades quad. **101.** $\pi(e^2 \ln 2 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8})$ unidades cúb.
103. (a) $x = 300\left(\frac{18^t - 17^t}{3 \cdot 18^t - 2 \cdot 17^t}\right)$; (b) 35,94 g **105.** $\left(0, \frac{32}{15\pi}\right)$ **107.** $(\frac{1}{2}\pi - 1, \frac{1}{2})$
109. (a) 4.824; (b) 8,18 semanas **111.** $3\rho g$ N

EXERCÍCIOS 10.1 (Página 585)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 7 aparecem nas Figs. 10.1-1 a 10.1-7.)
1. $(0, 1)$; $y = -1$; 4 **3.** $(-2, 0)$; $x = 2$; 8 **5.** $(0, -\frac{1}{4})$; $y = \frac{1}{4}$; 1 **7.** $(\frac{9}{8}, 0)$; $x = -\frac{9}{8}$; $\frac{9}{2}$ **9.** $y^2 = 20x$
11. $x^2 = -8y$ **13.** $y^2 = 2x$ **15.** $y^2 = -6x$ **17.** $y^2 = 10x$ **19.** $x^2 = -y$ **21.** $x'^2 + y'^2 = 13$ **23.** $y'^2 = 6x'$
25. $y' = 2x'^3$ **27.** $(-3, \frac{1}{4})$; $(-3, -\frac{3}{4})$; $x = -3$; $y = \frac{5}{4}$ **29.** $(1, -5)$; $(-\frac{1}{2}, -5)$; $y = -5$; $x = \frac{5}{2}$
31. $(\frac{2}{3}, 1)$; $(\frac{7}{24}, 1)$; $y = 1$; $x = \frac{25}{24}$ **33.** $y^2 + 20x - 8y - 24 = 0$ **35.** $x^2 + 2x - 8y + 41 = 0$
37. $x^2 - 6x - 6y - 3 = 0$; $x^2 - 6x + 6y + 21 = 0$ **39.** $y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$ **41.** (a) $-\frac{5}{2}$; (b) $x^2 = -10y$ **43.** 16,6 m
47. $\frac{64}{75}$ cm **49.** (a) $y = x$; (b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; (c) $2\sqrt{2}$ **53.** translada os eixos de forma que a nova origem seja $(\frac{1}{4}\pi, -3)$

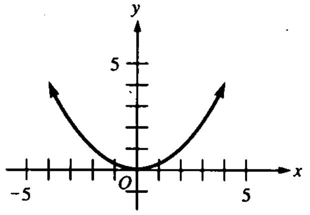


FIGURA 10.1-1

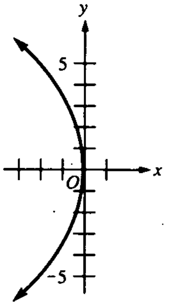


FIGURA 10.1-3

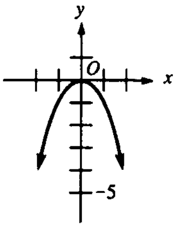


FIGURA 10.1-5

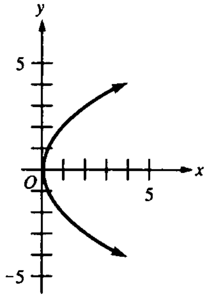


FIGURA 10.1-7

EXERCÍCIOS 10.2 (Página 593)

1. centro: $(0, 0)$; vértices: $(\pm 3, 0)$; focos: $(\pm\sqrt{5}, 0)$; extremidades do eixo menor: $(0, \pm 2)$
3. centro: $(0, 0)$; vértices: $(0, \pm 5)$; focos: $(0, \pm\sqrt{21})$; extremidades do eixo menor: $(\pm 2, 0)$
5. centro: $(0, 0)$; vértices: $(\pm 3, 0)$; focos: $(\pm\sqrt{3}, 0)$; extremidades do eixo menor: $(0, \pm\sqrt{6})$
7. centro: $(0, 0)$; vértices: $(0, \pm\frac{1}{2})$; focos: $(0, \pm\frac{1}{4}\sqrt{3})$; extremidades do eixo menor: $(\pm\frac{1}{4}, 0)$
9. centro: $(2, 3)$; vértices: $(-1, 3)$, $(5, 3)$; focos: $(2 \pm \sqrt{3}, 3)$; extremidades do eixo menor: $(2, 3 \pm \sqrt{6})$
11. centro: $(0, \frac{1}{2})$; vértices: $(0, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17})$; focos: $(0, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{10}\sqrt{170})$; extremidades do eixo menor: $(\pm\frac{1}{10}\sqrt{255}, \frac{1}{2})$ **13.** ponto $(-\frac{5}{2}, 4)$
15. centro: $(1, 0)$; vértices: $(1 \pm \sqrt{5}, 0)$; focos: $(1 \pm \sqrt{2}, 0)$; extremidades do eixo menor: $(1, \pm\sqrt{3})$ **17.** ponto $(1, -1)$
Esboços dos gráficos dos Exercícios de 19 a 25 aparecem nas Figs. 10.2-19 a 10.2-25.)
19. $16x^2 + 25y^2 = 100$ **21.** $3x^2 + 2y^2 = 54$ **23.** $x^2 + 4y^2 = 4$ **25.** $\frac{(x - 4)^2}{25} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$
27. $\frac{(y - 3)^2}{64} + \frac{(x + 1)^2}{48} = 1$ **29.** $2x + 3y - 12 = 0$ **33.** $\frac{42}{5}$ m **35.** $9x^2 + 25y^2 = 56.250.000$ **37.** 845π cm^3
39. $(h \pm \sqrt{a^2 - b^2}, k)$ **41.** $18\pi\rho g$ g

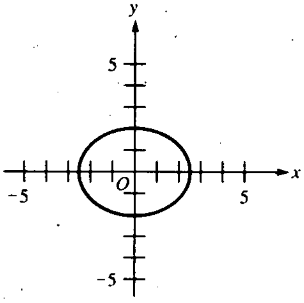


FIGURA 10.2-19

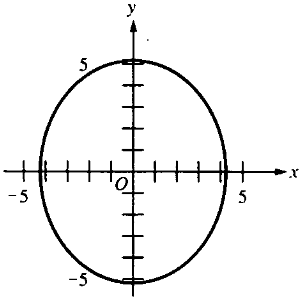


FIGURA 10.2-21

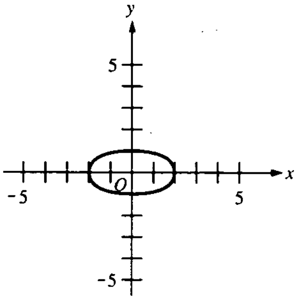


FIGURA 10.2-23

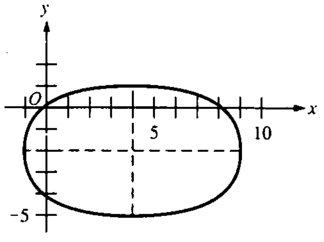


FIGURA 10.2-25

EXERCÍCIOS 10.3 (Página 603)

1. centro: $(0, 0)$; vértices: $(\pm 2, 0)$; focos: $(\pm \sqrt{13}, 0)$; assíntotas: $y = \pm \frac{3}{2} x$

3. centro: $(0, 0)$; vértices: $(\pm 5, 0)$; focos: $(\pm \sqrt{29}, 0)$; assíntotas: $y = \pm \frac{2}{5} x$

5. centro: $(0, 0)$; vértices: $(0, \pm 2)$; focos: $(0, \pm 2\sqrt{5})$; assíntotas: $y = \pm \frac{1}{2} x$

7. centro: $(0, 0)$; vértices: $(0, \pm \frac{1}{3})$; focos: $(0, \pm \frac{5}{12})$; assíntotas: $y = \pm \frac{4}{3} x$

9. centro: $(-4, -1)$; vértices: $(-10, -1)$, $(2, -1)$; focos: $(-4 \pm 6\sqrt{2}, -1)$; assíntotas: $x - y + 3 = 0$, $x + y + 5 = 0$

11. centro: $(-3, -1)$; vértices: $(-3, -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{2})$; focos: $(-3, -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{6})$; assíntotas: $\pm x + \sqrt{2}y + \sqrt{2} \pm 3 = 0$

13. centro: $(-1, 4)$; vértices: $(-1, 4 \pm 2\sqrt{7})$; focos: $(-1, -3)$, $(-1, 11)$; assíntotas: $\pm 2x + \sqrt{3}y \pm 2 - 4\sqrt{3} = 0$

15. centro: $(1, -2)$; vértices: $(1, -5)$, $(1, 1)$; focos: $(1, -2 \pm \sqrt{13})$; assíntotas: $3x + 2y + 1 = 0$, $3x - 2y - 7 = 0$

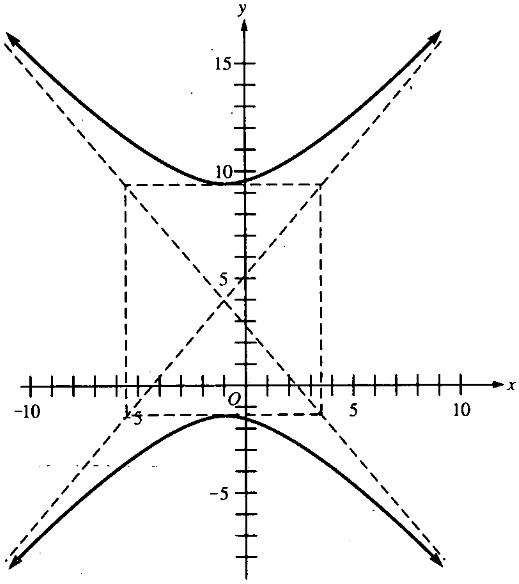


FIGURA 10.3-13

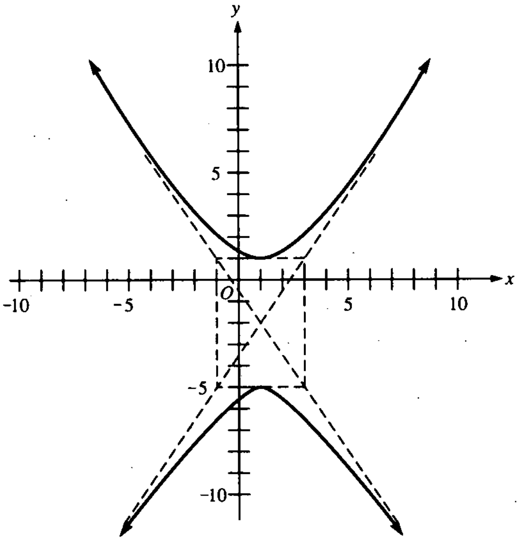


FIGURA 10.3-15

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 17 a 25 aparecem nas Figs. 10.3-17 a 10.3-25.)

17. $9x^2 - 4y^2 = 36$ **19.** $32y^2 - 33x^2 = 380$ **21.** $25x^2 - 144y^2 = 14.400$ **23.** $\frac{(y + 1)^2}{144} - \frac{(x + 2)^2}{81} = 1$

25. $72(x - 3)^2 - 9(y - 4)^2 = 128$ **27.** (a) $\frac{(x + 2)^2}{1} - \frac{(y + 1)^2}{4} = 1$; (b) $2x - y + 3 = 0$, $2x + y + 5 = 0$

29. $2x - \sqrt{2y} + 1 = 0$ **31.** $7x^2 - 4y^2 = 28$ **33.** a parte direita da hipérbole $16x^2 - 9y^2 = 14.400$ **35.** $\frac{4}{3} \pi ab^2$ unidades cúb. **37.** $(3, 4)$

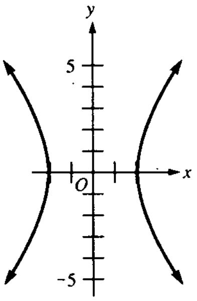


FIGURA 10.3-17

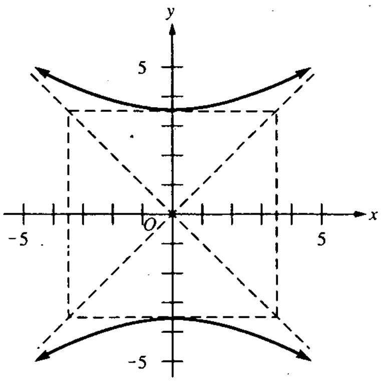


FIGURA 10.3-19

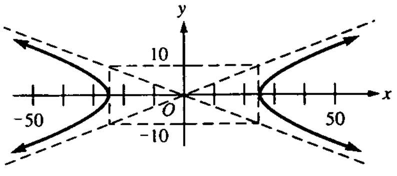


FIGURA 10.3-21

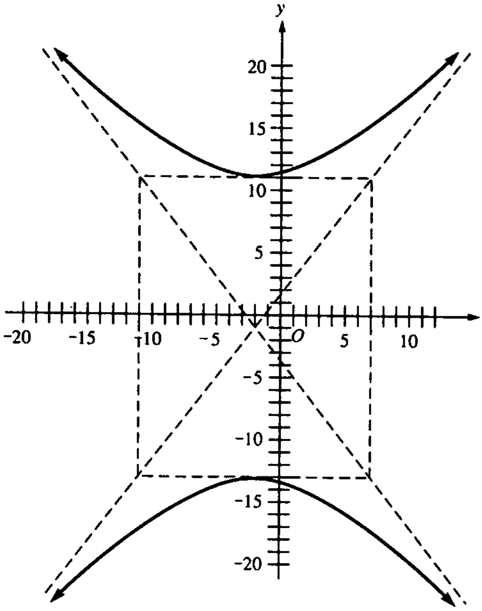


FIGURA 10.3-23

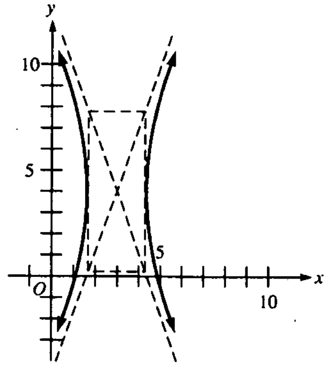


FIGURA 10.3-25

EXERCÍCIOS 10.4 (Página 608)

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 1 a 21 aparecem nas Figs. 10.4-1 a 10.4-21.)

1. (a) $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 16$ **3.** (a) $\bar{x}\bar{y} = -4$ **5.** $16\bar{y}^2 - 9\bar{x}^2 = 36$ **7.** $\bar{x}^2 + 4\sqrt{2}\bar{y} = 0$ **9.** $\bar{y}^2 - \bar{x}^2 = 32$
11. $9\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 36$ **13.** $3\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 = 18$ **15.** $\bar{x}'^2 + 4\bar{y}'^2 = 16$ **17.** $\sqrt{2}\bar{x}'^2 = \bar{y}'$
19. $\bar{x}'^2 - 4\bar{y}'^2 = 16$ **21.** $5\bar{x}^2 + 6\sqrt{5}\bar{y} = 0$

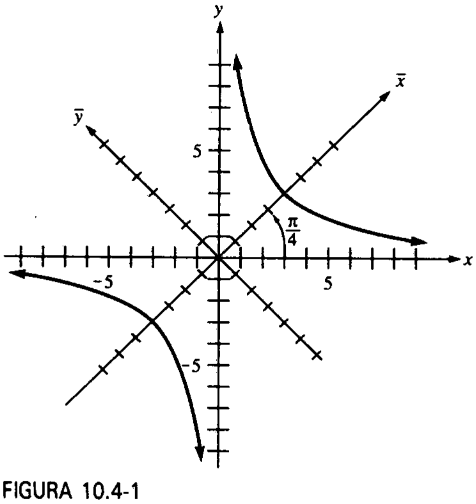


FIGURA 10.4-1

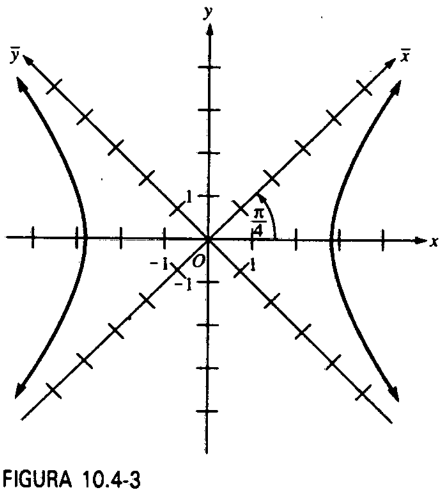


FIGURA 10.4-3

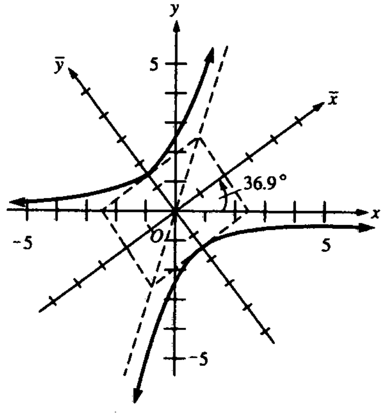


FIGURA 10.4-5

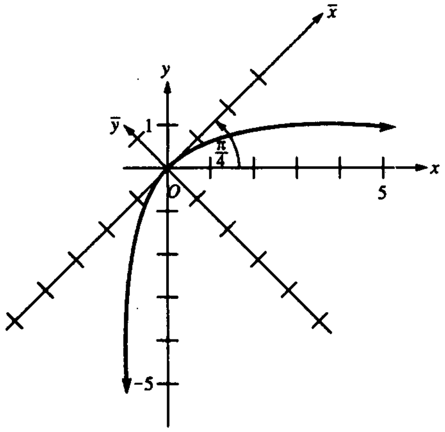


FIGURA 10.4-7

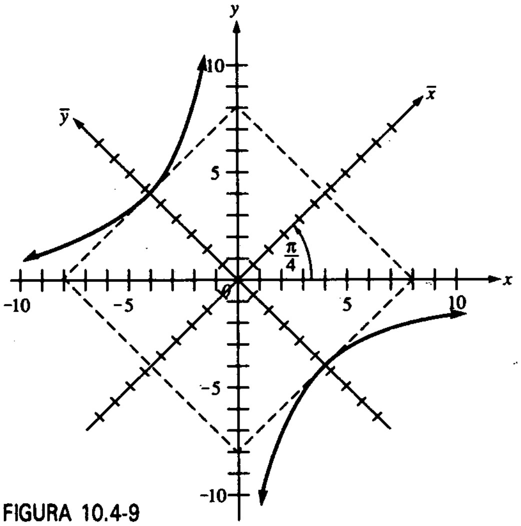


FIGURA 10.4-9

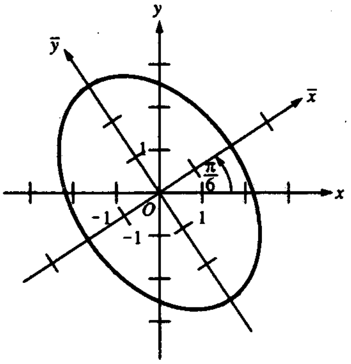


FIGURA 10.4-11

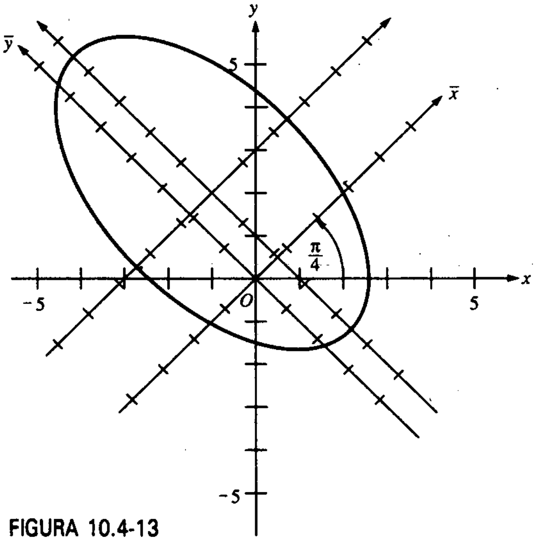


FIGURA 10.4-13

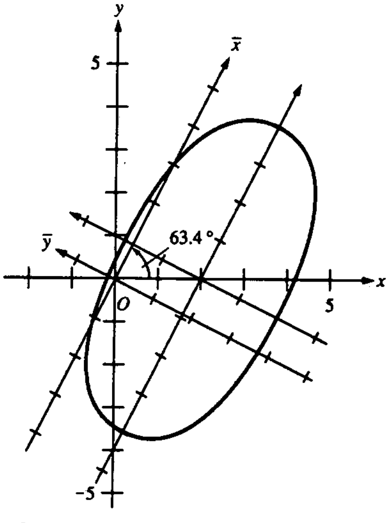


FIGURA 10.4-15

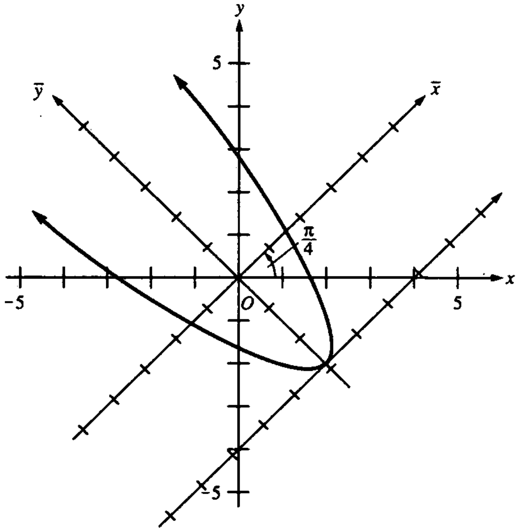


FIGURA 10.4-17

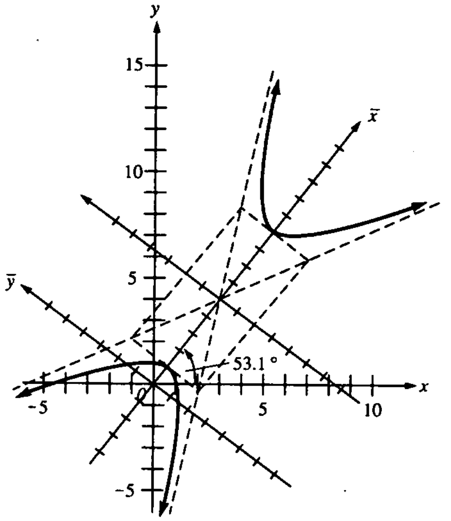


FIGURA 10.4-19

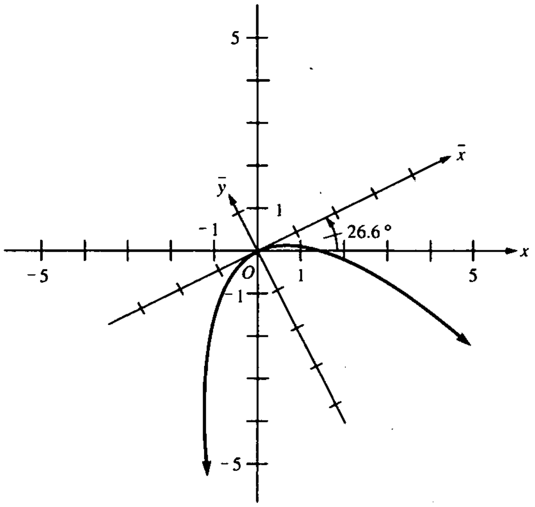


FIGURA 10.4-21

EXERCÍCIOS 10.5 (Página 613)

5. (a) $(-4, \frac{5}{4}\pi)$; (b) $(4, -\frac{7}{4}\pi)$; (c) $(-4, -\frac{3}{4}\pi)$ **7.** (a) $(-2, \frac{3}{2}\pi)$; (b) $(2, -\frac{3}{2}\pi)$; (c) $(-2, -\frac{1}{2}\pi)$ **9.** (a) $(-\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$; (b) $(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\pi)$; (c) $(-\sqrt{2}, -\frac{5}{4}\pi)$ **11.** (a) $(-2, \frac{3}{4}\pi)$; (b) $(-2, -\frac{5}{4}\pi)$; (c) $(2, \frac{15}{4}\pi)$ **13.** $(3, \frac{4}{3}\pi)$; $(-3, \frac{1}{3}\pi)$ **15.** $(-4, -\frac{7}{6}\pi)$; $(4, -\frac{1}{6}\pi)$ **17.** $(-2, \frac{3}{4}\pi)$; $(2, \frac{7}{4}\pi)$ **19.** $(2, 2\pi + 6)$; $(-2, 6 - \pi)$ **21.** (a) $(-3, 0)$; (b) $(-1, -1)$; (c) $(2, -2\sqrt{3})$; (d) $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$

23. (a) $(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi)$; (b) $(2, \frac{5}{6}\pi)$; (c) $(2\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$; (d) $(5, \pi)$ **25.** $r = |a|$ **27.** $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$ **29.** $r = 6 \operatorname{sen} \theta$

31. $r^2 = 4 \cos 2\theta$ **33.** $r = \dfrac{3a \operatorname{sen} 2\theta}{2(\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta)}$ **35.** $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ **37.** $(x^2 + y^2)^3 = x^2$ **39.** $y = x \operatorname{tg}(x^2 + y^2)$

41. $x = -1$ **43.** $4x^2 - 5y^2 - 36y - 36 = 0$

EXERCÍCIOS 10.6 (Página 624)

1. (a) reta que passa pela origem com inclinação $\sqrt{3}$; (b) circunferência com centro na origem e raio $\frac{1}{3}\pi$

3. (a) reta que passa pela origem com inclinação $\operatorname{tg}^{-1} 2$; (b) circunferência com centro na origem e raio 2

5. (a) reta paralela ao eixo $\frac{1}{2}\pi$ e 4 unidades à direita deste; (b) circunferência tangente ao eixo $\frac{1}{2}\pi$ com centro no ponto $(0, 2)$

7. (a) reta paralela ao eixo polar e 4 unidades abaixo dele; (b) circunferência tangente ao eixo polar com centro no ponto $(2, \frac{3}{2}\pi)$

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 9 a 23 aparecem nas Figs. 10.6-9 e 10.6-23.)

25. espiral logarítmica contendo os pontos (r, θ) dados na seguinte tabela

r	1	$e^{\pi/2} \approx 5$	$e^{\pi} \approx 23$	$e^{3\pi/2} \approx 111$	$e^{2\pi} \approx 535$	$e^{5\pi/2} = 2.576$	$e^{3\pi} \approx 12.392$
θ	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π

27. espiral recíproca contendo os pontos (r, θ) dados na seguinte tabela

r	$\frac{6}{\pi} \approx 1{,}9$	$\frac{3}{\pi} \approx 0{,}95$	$\frac{2}{\pi} \approx 0{,}63$	$\frac{1}{\pi} \approx 0{,}32$	$\frac{1}{2\pi} \approx 0{,}16$	$\frac{1}{3\pi} \approx 0{,}12$	$\frac{1}{4\pi} \approx 0{,}08$	$\frac{1}{6\pi} \approx 0{,}05$
θ	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	2π	3π	4π	6π

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 29 a 35 aparecem nas Figs. 10.6-29 a 10.6-35.)

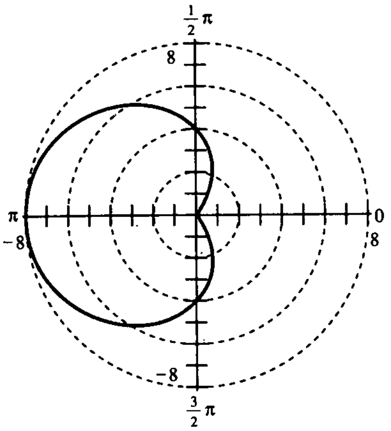


FIGURA 10.6.9 Cardióide

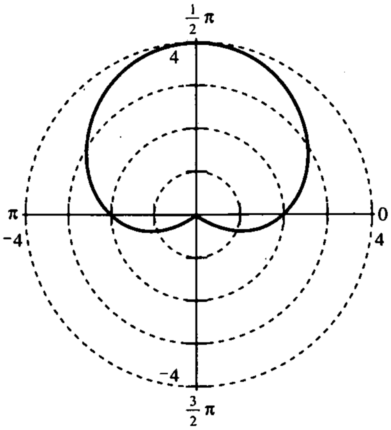


FIGURA 10.6.11 Cardióide

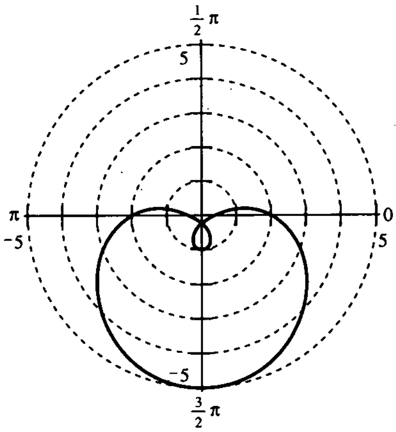


FIGURA 10.6.13 *Limaçon* com um laço

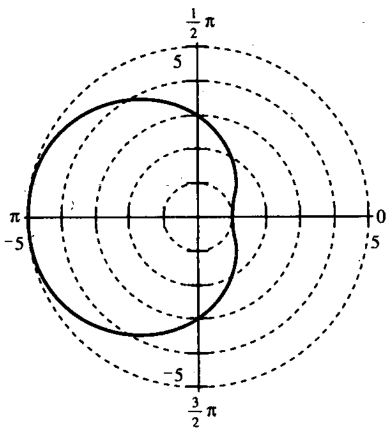


FIGURA 10.6.15 *Limaçon* com um dente

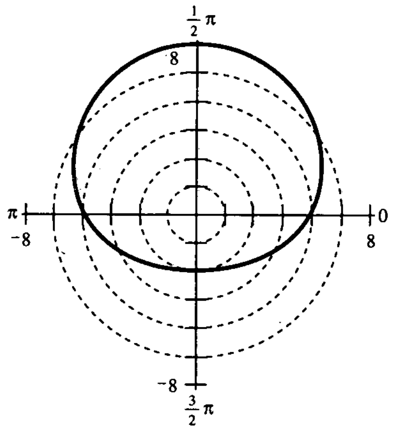


FIGURA 10.6.17 *Limaçon* Convexa

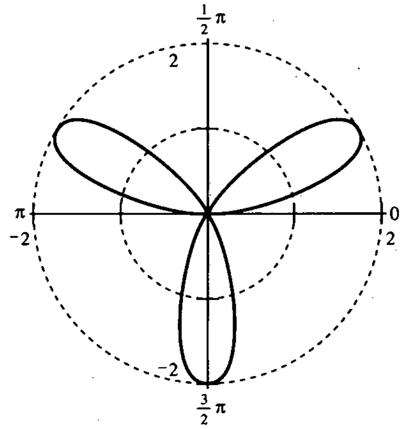


FIGURA 10.6.19 Rosácea de 3 folhas

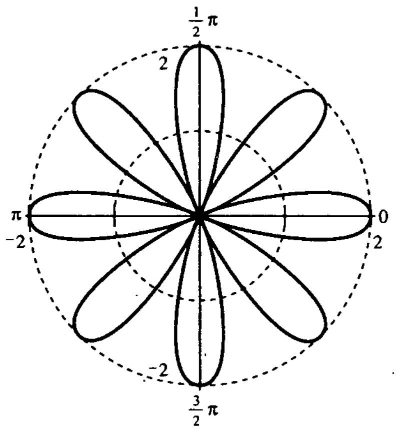


FIGURA 10.6.21 Rosácea de oito folhas

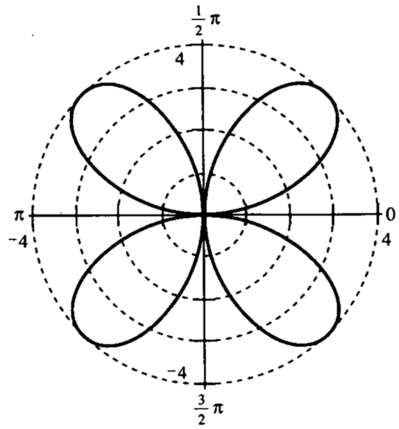


FIGURA 10.6.23 Rosácea de quatro folhas

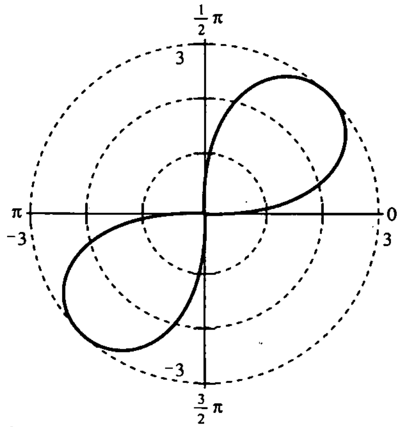


FIGURA 10.6.29 Lemniscata

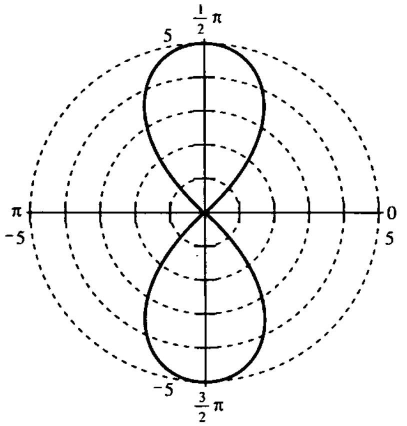


FIGURA 10.6.31 Lemniscata

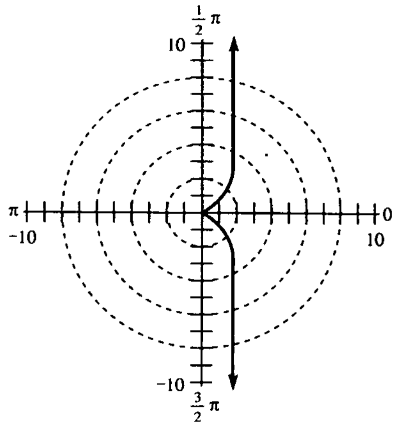


FIGURA 10.6.33 Cissóide

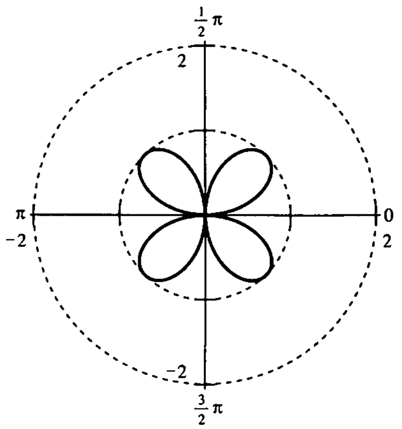


FIGURA 10.6.35 Rosácea de quatro folhas

37. $(\frac{3}{2}, \frac{1}{6}\pi)$; $(\frac{3}{2}, \frac{5}{6}\pi)$ **39.** origem; $(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$ **41.** $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{8}\pi)$ **43.** origem; $(\sqrt{15}, \cos^{-1}\frac{1}{4})$; $(\sqrt{15}, \pi - \cos^{-1}\frac{1}{4})$
45. $(3, \frac{1}{3}\pi)$; $(3, -\frac{1}{3}\pi)$ **47.** $(2\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$ **49.** $(1, \frac{3}{2}\pi)$; $(1, \frac{1}{2}\pi)$; $(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\pi)$; $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi)$; origem; (0,22, 2,47); (0,22, 3,82)
51. origem; $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{8}(2n + 1)\pi)$, onde n é 0, 1, ..., 7 **55.** origem; $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{6}(2n + 1)\pi)$, onde n é 0, 1, 2, 3, 4, 5

EXERCÍCIOS 10.7 (Página 628)

1. $\frac{9}{4}\pi$ unidades quad. **3.** 4π unidades quad. **5.** 4 unidades quad. **7.** $\frac{9}{16}\pi^3$ unidades quad. **9.** $\frac{9}{8}\pi$ unidades quad.
11. $(\frac{11}{4}\pi - \frac{11}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3} - 3\sqrt{2})$ unidades quad. **13.** $(\frac{19}{3}\pi - \frac{11}{2}\sqrt{3})$ unidades quad. **15.** $(\frac{9}{2}\pi - 9)$ unidades quad. **17.** $a^2(2 - \frac{1}{4}\pi)$ unidades quad.
19. $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ unidades quad. **21.** $\frac{1}{2}\pi a^2$ unidades quad. **23.** 4 unidades quad. **25.** $16a^2\pi^3$ unidades quad.

EXERCÍCIOS 10.8 (Página 638)

1. (a) $e = \frac{1}{3}\sqrt{5}$; focos: $(\pm\sqrt{5}, 0)$; diretrizes: $x = \pm\frac{9}{5}\sqrt{5}$ **3.** (a) $e = \frac{1}{5}\sqrt{21}$; focos: $(0, \pm\sqrt{21})$; diretrizes: $y = \pm\frac{25}{21}\sqrt{21}$
5. (a) $e = \frac{1}{5}\sqrt{29}$; focos: $(\pm\sqrt{29}, 0)$; diretrizes: $x = \pm\frac{25}{29}\sqrt{29}$ **7.** (a) $e = \frac{5}{3}$; focos: $(\pm 5, 0)$; diretrizes: $x = \pm\frac{9}{5}$ **9.** (a) parábola; (b) hipérbole; (c) elipse; (d) circunferência **11.** (a) 1; (b) parábola; (c) $r\cos\theta = -2$ **13.** (a) $\frac{1}{2}$; (b) elipse; (c) $r\operatorname{sen}\theta = 5$
15. (a) $\frac{2}{3}$; (b) elipse; (c) $r\cos\theta = -3$ **17.** (a) $\frac{6}{5}$; (b) hipérbole; (c) $r\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{2}$ **19.** (a) $\frac{2}{7}$; (b) elipse; (c) $r\operatorname{sen}\theta = -5$
21. (a) $\frac{5}{4}$; (b) hipérbole; (c) $r\cos\theta = 2$ **23.** $r = \dfrac{8}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ **25.** $r = \dfrac{36}{3 + 4\cos\theta}$ **27.** $r = \dfrac{3}{2 - \cos\theta}$
29. (a) $r = \dfrac{5}{1 - 3\cos\theta}$; (b) $r\cos\theta = -\frac{5}{3}$ **31.** $\frac{16}{3}\sqrt{3}\pi$ unidades quad. **37.** (a) $r = \dfrac{40.000.000}{1 - \cos\theta}$; (b) 20.000.000 km
39. $r^2 = \dfrac{a^2(1 - e^2)}{1 - e^2\cos^2\theta}$

EXERCÍCIOS 10.9 (Página 646)

1. $\sqrt{3}$ **3.** $\sqrt{2} + 1$ **5.** $2\sqrt{3}$ **7.** $-\frac{7}{3}\sqrt{3}$ **9.** retas horizontais tangentes em $(7, \frac{1}{2}\pi)$, $(1, \frac{3}{2}\pi)$, (2, 3,87), (2, 5,55); retas verticais tangentes em (5,34, 0,46), (5,34, 2,68) **11.** retas horizontais tangentes em (4,73, 1,95), (4,73, 4,34); retas verticais tangentes em (2, 0), $(6, \pi)$
13. retas horizontais tangentes em $(2, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\pi)$, $(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\pi)$; retas verticais tangentes em $(0, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}, \frac{7}{6}\pi)$, $(\frac{3}{2}, \frac{11}{6}\pi)$
15. retas horizontais tangentes em (3,68, 0,98), (3,68, 5,31), (−0,68, 2,68), (−0,68, 3,61); retas verticais tangentes em (5, 0), $(-1, \pi)$, (1, 1,91), (1, 4,37) **17.** retas horizontais tangentes em $(-1, \frac{1}{2}\pi)$, $(-1, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{2}{3}, 0{,}42)$, $(\frac{2}{3}, 2{,}72)$, $(\frac{2}{3}, 3{,}56)$, $(\frac{2}{3}, 5{,}86)$; retas verticais tangentes em (1, 0), $(1, \pi)$, $(-\frac{2}{3}, 1{,}15)$, $(-\frac{2}{3}, 1{,}99)$, $(-\frac{2}{3}, 4{,}29)$, $(-\frac{2}{3}, 5{,}13)$
19. retas horizontais tangentes em (0, 0), $(\sqrt[4]{12}, \frac{1}{3}\pi)$, $(-\sqrt[4]{12}, \frac{1}{3}\pi)$; retas verticais tangentes em $(0, \frac{1}{2}\pi)$, $(\sqrt{2}, \frac{1}{6}\pi)$, $(-\sqrt{2}, \frac{1}{6}\pi)$
21. $\chi = \frac{3}{4}\pi$, $\alpha = 1 + \frac{3}{4}\pi$ **23.** $\chi = 2{,}68$; $\alpha = 2{,}29$ **25.** $\chi = 0{,}67$; $\alpha = 2{,}25$ **27.** $\chi = \frac{5}{6}\pi$; $\alpha = 0$ **29.** 90° **31.** 60°
33. 0° na origem; 90° em (1,0); 90° em $(1, \pi)$ **35.** 0° em $(0, \frac{1}{2}\pi)$; 90° em (0, 0); 79°6′ em $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{6}\pi)$; 79°6′ em $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{5}{6}\pi)$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 10 (Página 647)

1. $x^2 = -12y$; (b) 12 **3.** (a) $y^2 = 4x$; (b) 4 **5.** (a) $(0, \frac{3}{2})$; (b) $y = -\frac{3}{2}$ **7.** (a) (2, 3); (b) $y = 3$; (c) (0, 3); (d) $x = 4$
9. $(x - 5)^2 = 8(y - 1)$ **11.** 9π cm **13.** centro: (0, 0); vértices: (± 5,0); focos: $(\pm \sqrt{21}, 0)$; extremidades do eixo menor: (0, ± 2)
15. centro: (0, 0); vértices: (± 3, 0); focos: (± 5, 0); assíntotas: $y = \pm \frac{4}{3} x$

(Esboços dos gráficos dos Exercícios de 17 a 23 aparecem nas Figs. 10-17 a 10-23.)
17. centro: (−3, 8); vértices: (−3, 4), (−3, 12); focos: $(-3, 8 \pm 2\sqrt{3})$; extremidade do eixo menor: (−5, 8), (−1, 8)
19. centro: (−1, 3); vértices: (−2, 3), (0, 3); focos: $(-1 \pm \sqrt{26}, 3)$; assíntotas: $5x + y + 2 = 0$, $5x - y + 8 = 0$
21. $\frac{x^2}{20} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$ **23.** $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$ **25.** $r^2(4 \cos^2 \theta - 9 \operatorname{sen}^2 \theta) = 36$ **27.** $r = 9 \cos \theta - 8 \operatorname{sen} \theta$

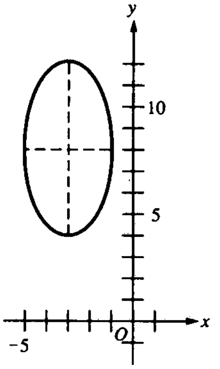


FIGURA 10-17

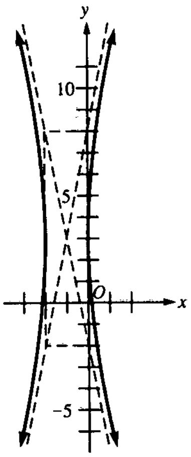


FIGURA 10-19

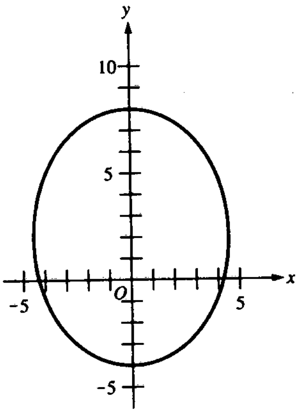


FIGURA 10-21

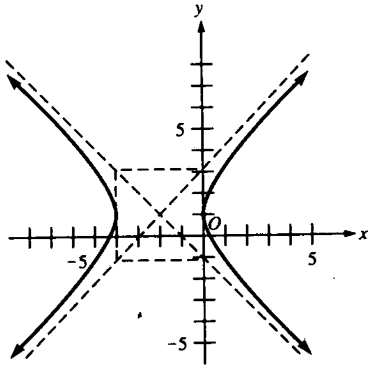


FIGURA 10-23

29. $4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4 + 36x^3 + 36xy^2 - 81y^2 = 0$ **31.** $(x^2 + y^2)^2 = 4x^3 - 12xy^2$ **39.** a origem
41. (a) $(16\pi - 24\sqrt{3})$ unidades quad.; (b) $(32\pi + 24\sqrt{3})$ unidades quad. **43.** $a^2 (\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3})$ unidades quad. **45.** $\frac{e^{4k\pi} - 1}{4k}$ unidades quad.
49. $r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \theta_0) + r_0{}^2 = a^2$ **51.** (a) $e = \frac{1}{2}$; (b) elipse; (c) $r \operatorname{sen} \theta = -2$ **53.** (a) $e = \frac{3}{2}$; (b) hipérbole; (c) $3r \cos \theta = 4$
55. $r = \frac{8}{1 - 3\cos\theta}$ **57.** $r = \frac{6}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ **59.** $21\bar{x}'^2 - 49\bar{y}'^2 = 72$ **61.** (a) $e = \frac{1}{3}\sqrt{34}$; focos $(\pm \sqrt{34}, 0)$; diretrizes: $x = \pm \frac{9}{34}\sqrt{34}$
63. $4\sqrt{3}\pi a^2 b$ unidades cúb. **65.** 600 km **67.** $(3 \pm \frac{3}{4}\sqrt{6})$ milhões de km **69.** $r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$
71. a parte esquerda da hipérbole $16x^2 - 9y^2 = 1.440.000$ **77.** parábola no primeiro quadrante
79. retas horizontais tangentes em $(6, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}, \frac{1}{6}\pi)$, $(\frac{3}{2}, \frac{5}{6}\pi)$; retas verticais tangentes em $(0, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{9}{2}, \frac{7}{6}\pi)$, $(\frac{9}{2}, \frac{11}{6}\pi)$ **81.** $3\sqrt{3}$
83. $\frac{1}{2}\pi$ na origem; $\frac{1}{6}\pi$ em $(3, \frac{2}{3}\pi)$, $\frac{1}{6}\pi$ em $(3, \frac{4}{3}\pi)$ **85.** $\chi = 1{,}98$, $\alpha = 0{,}93$

EXERCÍCIOS 11.1 (Página 659)

1. $\frac{4}{3}$ **3.** $\frac{1}{2}\pi$ **5.** $-\frac{11}{4}$ **7.** 1 **9.** 2 **11.** $+\infty$ **13.** $-\frac{1}{8}$ **15.** $\ln \frac{2}{3}$ **17.** $\frac{1}{6}$ **19.** $\frac{1}{3}$ **21.** $\frac{1}{2}$ **23.** 1

25. $\frac{3}{5}$ **27.** 2 **29.** −1 **31.** $\frac{Et}{L}$ **33.** $a = -3$, $b = \frac{9}{2}$ **37.** (b) $f'(0) = -\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS 11.2 (Página 664)

1. 0 **3.** 0 **5.** 1 **7.** 0 **9.** 0 **11.** $\frac{1}{2}$ **13.** 1 **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** 1 **19.** e^2 **21.** e^a **23.** 1 **25.** e^2

27. $e^{-1/3}$ **29.** $\frac{1}{2}$ **31.** 0 **33.** 1 **35.** 1 **37.** $\frac{1}{\ln 3}$ **41.** $f(e) = e^{1/e}$, máx. rel.; $y = 1$ é uma assíntota **43.** (a) 0; (b) 0; não

EXERCÍCIOS 11.3 (Página 672)

1. 1 **3.** $-\dfrac{1}{2\ln 5}$ **5.** $\dfrac{1}{(\ln 2)^2}$ **7.** divergente **9.** divergente **11.** $\frac{1}{3}\pi$ **13.** 2 **15.** 1 **17.** divergente **19.** (a) divergente; (b) 0

21. (a) 0 **23.** $\frac{1}{2}\pi$ **25.** $\frac{1}{2}\pi$ **27.** (a) 0,565; (b) 0,287 **29.** (a) 0,203; (b) 0,188 **31.** $\dfrac{1}{k}$

33. $\dfrac{1.000}{0,08 + \ln 2} \approx \$1.293,41$ **37.** $n > 1$ **39.** $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}\ln\frac{32}{27}$

EXERCÍCIOS 11.4 (Página 676)

1. 2 **3.** -4 **5.** $\frac{1}{3}\pi$ **7.** divergente **9.** divergente **11.** divergente **13.** divergente **15.** divergente **17.** 0 **19.** divergente

21. 0 **23.** $\frac{1}{3}\pi$ **25.** 0 **27.** $n > -1$; $\dfrac{1}{n+1}$ **29.** $n > -1$; $\dfrac{2}{(n+1)^3}$ **31.** sim; 6π

EXERCÍCIOS 11.5 (Página 684)

1. $P_3(x) = -1 - (x-1) - (x-1)^2 - (x-1)^3$; $R_3(x) = \dfrac{(x-1)^4}{(\xi-2)^5}$, ξ entre 1 e x

3. $P_3(x) = 8 + 3(x-4) + \frac{3}{16}(x-4)^2 - \frac{1}{128}(x-4)^3$; $R_3(x) = \dfrac{3(x-4)^4}{128\xi^{5/2}}$, ξ entre 4 e x

5. $P_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}(x - \frac{1}{6}\pi) - \frac{1}{4}(x - \frac{1}{6}\pi)^2 - \frac{1}{12}\sqrt{3}(x - \frac{1}{6}\pi)^3$; $R_3(x) = \frac{1}{24}\,\text{sen}\,\xi(x - \frac{1}{6}\pi)^4$, ξ entre $\frac{1}{6}\pi$ e x

7. $P_4(x) = x + \frac{1}{6}x^3$; $R_4(x) = \frac{1}{120}(\cosh\xi)x^5$, ξ entre 0 e x **9.** $P_3(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$;
$R_3(x) = -\frac{1}{4}\xi^{-4}(x-1)^4$; ξ entre 1 e x **11.** $P_3(x) = -\ln 2 - \sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi) - 2(x - \frac{1}{3}\pi)^2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}\pi)^3$;
$R_3(x) = -\frac{1}{12}(3\sec^4\xi - 2\sec^2\xi)(x - \frac{1}{3}\pi)^4$, ξ entre $\frac{1}{3}\pi$ e x **13.** $P_3(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$;
$R_3(x) = \frac{3}{128}(1+\xi)^{-5/2}x^4$, ξ entre 0 e x **15.** 2,71828 **17.** $|\text{erro}| < \dfrac{(0,1)^4}{24} < 0,000005$ **19.** 0,515 **21.** 0,1823

23. $\dfrac{55\sqrt{2}}{672}$, $|\text{erro}| < \frac{1}{7.680}\sqrt{2}$ **27.** $x \approx \dfrac{\pi}{2(1+m)}$ **29.** $2(x-1) + 5(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 11 (Página 684)

1. $+\infty$ **3.** $\frac{1}{3}$ **5.** $+\infty$ **7.** 1 **9.** $-\frac{1}{2}$ **11.** e^{12} **13.** 0 **15.** 1 **17.** e **19.** divergente **21.** $\frac{1}{2}$

23. divergente **25.** $\dfrac{32}{\ln 2}$ **27.** divergente **29.** $\frac{1}{4}\pi$ **31.** divergente **33.** (b) $f'(0) = -1$ **35.** (a) não; (b) 0

37. (a) divergente; (b) 0 **39.** $P_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$; $R_6(x) = \frac{1}{5.040}(\text{sen}\,\xi)x^7$, ξ entre 0 e x

41. $P_4(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{54}(x-9) + \frac{1}{648}(x-9)^2 - \frac{5}{34.992}(x-9)^3 + \frac{35}{2.519.424}(x-9)^4$; $R_4(x) = -\frac{63}{256}\xi^{-11/2}(x-9)^5$, ξ entre 9 e x

43. $+\infty$ **45.** $\frac{64}{3}$ **47.** 1 **49.** (a) 0,148; (b) 0,699; (c) 0,018 **51.** \$152.500

EXERCÍCIOS A.1 (Página A.4)

1. $\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\ln|2+3x| + C$ **3.** $x + \dfrac{36}{6-x} + 12\ln|6-x| + C$ **5.** $\frac{1}{30}(3x-1)(1+2x)^{3/2} + C$

7. $2\sqrt{1+2x} + \ln\left|\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt{1+2x}+1}\right| + C$ **9.** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right| + C$ **11.** $\ln|x + 3 + \sqrt{x^2+6x}| + C$

13. $\sqrt{9x^2+4} - 2\ln\left|\dfrac{2+\sqrt{9x^2+4}}{3x}\right| + C$ **15.** $\sqrt{9-4x^2} - 3\ln\left|\dfrac{3+\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right| + C$

17. $\dfrac{1}{3}(x^2-x-6)\sqrt{4x-x^2} + 4\cos^{-1}\left(\dfrac{2-x}{2}\right) + C$ **19.** $-\frac{1}{5}\,\text{sen}^4 x\cos x - \frac{4}{15}\,\text{sen}^2 x\cos x - \frac{8}{15}\cos x + C$

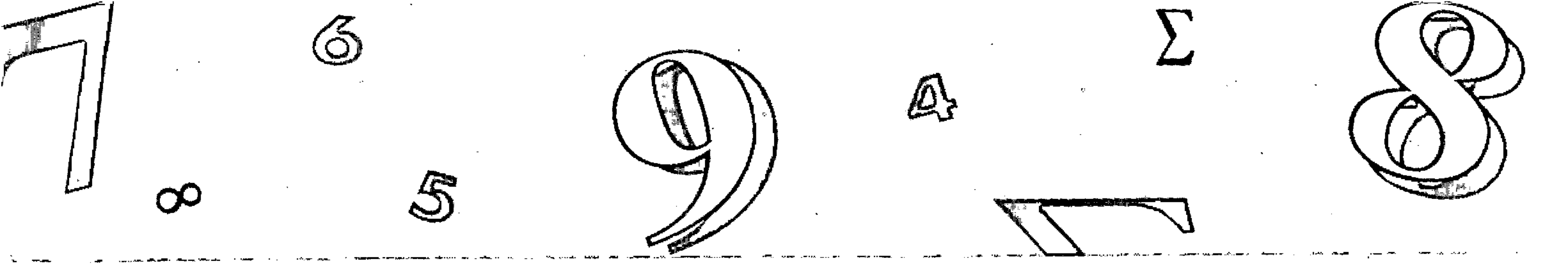
21. $-\frac{1}{6}\,\text{cosec}^5 x\,\text{cotg}\,x - \frac{5}{24}\,\text{cosec}^3 x\,\text{cotg}\,x - \frac{5}{16}\,\text{cosec}\,x\,\text{cotg}\,x + \frac{5}{16}\ln|\,\text{cosec}\,x - \text{cotg}\,x| + C$

23. $t^4\,\text{sen}\,t + 4t^3\cos t - 12t^2\,\text{sen}\,t - 24t\cot t + 24\,\text{sen}\,t + C$ **25.** $x\sec^{-1}3x - \frac{1}{3}\ln|3x + \sqrt{9x^2-1}| + C$

27. $e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$ **29.** $\dfrac{e^{4x}}{32}(8x^2 - 4x + 1) + C$ **31.** $\dfrac{x^4}{16}(4\ln 3x - 1) + C$

33. $\frac{2}{29}e^{2x}\,\text{sen}\,5x - \frac{5}{29}e^{2x}\cos 5x + C$ **35.** $\frac{3}{5}y\cosh 5y - \frac{3}{25}\,\text{sen}\,5y + C$ **37.** $\frac{1}{60} + \frac{1}{25}\ln\frac{8}{3}$ **39.** $\frac{15}{2} - 8\ln 2$

41. $\frac{32}{5}\ln 2 - \frac{31}{25}$ **43.** $\frac{15}{2} - 8\ln 2$ **45.** $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **47.** $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$ **49.** 0 **51.** $\frac{1}{8}(e^2 + 3)$



Índice Remissivo

Abel, Niels, 277
Abscissa, 13
Ação das massas, lei de, 558
Aceleração instantânea, 207
Adição. *Veja* Soma.
Alfabeto grego, A-5
Altura de um cilindro, 374
Ângulo, 45
  de inclinação, 49
  entre duas retas, 50
Antiderivada, 286
Antidiferenciação, 286-295
  regra da cadeia para, 296
Apolônio, 577
Arco do gráfico de uma função, 388-393
Arco retificável, 390
Área, 312-323
  de uma região em coordenadas polares, 625-629
  de uma região plana, 352-359
Arquimedes, XV, 344
Assíntota(s), de um gráfico, 597
  de uma hipérbole, 598
  horizontal, 94
  oblíqua, 254
  vertical, 86
Axioma, 2
  do completamento, 5

Barra, centro de massa de uma, 394-400
  homogênea, 396
  momento de massa de uma, 398
Barrow, Isaac, XV
Bernoulli, Jakob, XV
Bernoulli, Johann, XV, 450
Bernoulli, James, 491
Bolzano, Bernhard, XV

Cable, Charles A., 385
Cálculo, teoremas fundamentais, 344-352
Cardióide, 619
Catenária, 520
Cauchy, Augustin L., XV, 653
Centro, de massa, 396
  de uma barra, 394-400
  de uma lâmina, 403
  de uma circunferência, 25
  de uma elipse, 588
  de uma hipérbole, 596
Centróide de uma região plana, 400-407
Cilíndro, 374
  altura de, 374
  circular reto, 374
  como um sólido, 374
  reto, 374
Circunferência, 25
  centro de, 25
  degenerada, 583
  equação de, forma centro-raio, 26
    forma geral, 26
  raio de, 25
Cissóide, 625
Competição perfeita, 268
Completamento, axioma, 5
Comprimento de arco, de curvas, 388-393
Concavidade, 241
  para baixo, 242
  para cima, 242
Conclusão, 2
Concóide de Nicomedes, 625
Condições iniciais, 292
Condições laterais, 292
Cone, elemento de, 578
  folha de, 578
  geratriz de, 578
  vértice de, 578
Cônica central, 588, 596
  excentricidade de, 629
Conjunto(s), 3
  iguais, 3
  intersecção de, 3
  união de, 3
  vazio, 3
Conjunto-solução de uma desigualdade, 6
Constante, de integração, 348
  vezes uma função, derivada, 158
Continuidade
  de uma função trigonométrica, 119-122
  de uma função, 98-107
    à direita, 109
    à esquerda, 109
    em um intervalo, 109-111
    em um número, 98-107
Coordenadas
  cartesianas retangulares, 13
  polares, 608-614
Corte, volume de um sólido por, 375
Crescimento
  exponencial, 476
  limitado, 477
  logístico, 557
  natural, lei do, 470
Curva, comprimento do arco de, 388-393
  do aprendizado, 477
  em coordenadas polares, retas tangentes a, 638-647
Custo, marginal, 169
  médio, 169

Dandelin, G.P., 578
Decaimento, exponencial, 476
  natural, lei do, 470
Decimais, 3
  não-periódicos, 3
  periódicos, 3
Dedekind, Richard, XV
Delta δ, 57
Delta Δ, 139
Densidade linear, 396
Derivação, 148. *Veja também* Derivadas.
  implícita, 195-199
Derivada(s). *Veja também* Derivação.
  à direita, 152
  à esquerda, 152
  como taxa de variação, 167

da inversa de uma função, 433
da soma de duas funções, 159
das funções exponenciais de base a, 464
das funções exponenciais naturais, 459
das funções hiperbólicas inversas, 526
das funções logarítmicas de base a, 466
das funções logarítmicas naturais, 441
das funções trigonométricas, 173-181
das funções trigonométricas inversas, 503
das funções vetoriais, 808
de cos u, 174
de cos^{-1} u, 504
de cosec u, 176
de cosec^{-1} u, 507
de cosech u, 518
de cosech^{-1} u, 526
de cosh u, 515
de cosh^{-1} u, 526
de cotg u, 175
de cotg^{-1} u, 506
de cotgh u, 518
de cotgh^{-1} u, 526
de funções potências para expoentes racionais, 190-194
de ordem superior, 205-212
de sec u, 175
de sec^{-1} u, 507
de sech u, 518
de sech^{-1} u, 526
de sen u, 173
de sen^{-1} u, 504
de senh u, 515
de senh^{-1} u, 526
de tg u, 175
de tg^{-1} u, 505
de tgh u, 518
de tgh^{-1} u, 526
de uma constante vezes uma função, 158
de uma constante, 156
de uma função, 142
de uma função composta, 183
definição de, 142
do produto de duas funções, 160
do quociente de duas funções, 161
enésima, 205
lateral, 152
notação de, 144, 145
primeira, 205
segunda, 205
terceira, 205
Descartes, René, XV, 13
Descontinuidade, essencial, 102
  removível, 101
Desigualdade(s)
  estrita, 4
  não-estrita, 4
  seqüência de, 4
  triangular, 11
Diferença de funções, 36
Diferenciação, logarítmica, 450
Diferencial, 269-277
Dina, 395, 408
Diretriz, de uma cônica, 632
  de uma parábola, 578
Disco, no cálculo de volumes, 377
Discriminante, 606
Distância,
  de um ponto a uma reta, 269
  entre dois pontos, 15
  não-orientada, 14
  orientada, 14
Divisão, 2
Domínio de uma função, 32

e (base dos logaritmos naturais), 456
Eixo, de revolução, 376
  de uma hipérbole, 596
  de uma parábola, 579
  maior de uma elipse, 588
  menor de uma elipse, 588
  polar, 609
  principal, de uma elipse, 588
    de uma hipérbole, 596
  transverso de uma hipérbole, 596
Eixos, coordenados, 13
  rotação de, 604-608
  translação de, 581
Elementos, de um conjunto, 3
Elipse, 586-594
  centro de, 588
  definição de, 586
  degenerada, 591
  eixo maior de, 588
  eixo menor de, 588
  eixo principal de, 588
  focos de, 586
  vértices de, 588
Épsilon ε, 57
Equações, de uma circunferência, 26
  de um gráfico, 25
  de uma reta em R^2, 18
    forma ponto-inclinação, 18
    forma inclinação-intercepto, 18
  gráfico de, 20
  lineares, 20
  polares, 612
Equações cartesianas, 612
Equações diferenciais, com variáveis separáveis, 304
  de Bernoulli, 491
  lineares de primeira ordem, 481-491
Erg, 408
Erro de arredondamento, 362
  de truncamento, 362
Espiral, 621, 625
Euler, Leonhard, XVI, 456
  número de Euler, 456
Excentricidade de uma cônica, 629
Expoentes racionais,
derivadas de funções potências para, 190-194
Extremos,
  absolutos, 220
  aplicações, 224-230, 260-269
  de um intervalo, 6
  relativos, 217, 983
    teste da derivada primeira para, 238
    teste da derivada segunda para, 250

Família de funções,
  dependente de dois parâmetros, 306
  dependente de um parâmetro, 304
Fator de integração, 483
Fermat, Pierre de, XV
Foco de uma parábola, 578
Focos, de uma elipse, 586
  de uma hipérbole, 594
Forma, centro-raio, da equação de uma circunferência, 26
  de Lagrange do resto, 678
  inclinação-intercepto da equação de uma reta, 18
  ponto-inclinação da equação da reta, 18
Formas indeterminadas, 651-665
Fórmula de Maclaurin, 678
Fórmula de Taylor, 677-684
  com forma integral do resto, 683
  com forma de Lagrange do resto, 678
Fórmula prismoidal, 369
Fórmulas de Geometria, F-1
Fórmulas de Trigonometria, F-2
Frações, 2
  parciais, integração por, 551-566
Função(ões), 31-40
  algébrica, 39
    derivação de, 156-163
  antiderivada, 286
  biunívoca, 423
  co-secante, 48
    derivada, 176
    integral, 453
    inversa, 502
      derivada, 507
  co-secante hiperbólica, 516
    derivada, 518
    inversa, 524
      derivada, 526
  co-seno, 46
    derivada, 174
    integral, 291
    integração de uma função racional, 567
    inversa, 498
      derivada, 504
  co-seno hiperbólico, 515
    derivada, 515
    integral, 519
    inversa, 524
      derivada, 526
  co-tangente, 48
    derivada, 175
    integral, 452
    inversa, 500
      derivada, 506
  co-tangente hiperbólica, 516
    derivada, 518

    inversa, 524
    derivada, 526
  composta, 36
    derivada, 183
  comprimento de arco, 392
  constante, 38
  contínua, 99
  crescente, 236
  cúbica, 39
  custo, marginal, 169
    médio, 169
    total, 169
  de identidade, 39
  decrescente, 237
  definição, 32
  densidade,
    de probabilidade normal padrão, 478
    de probabilidade, 670
    exponencial, 670
  derivável, 148
    em um intervalo aberto, 148
  descontínua, 99, 927
  domínio, 32, 908
  escada, 77 n.24
  exponencial de base *a*, 463
    derivada de, 464
    integral de, 464
  exponencial natural, 455-463
    aplicações, 469-481
    definição, 455
    derivada, 458
    integral, 460
  hiperbólica, 514-523
  hiperbólica inversa, 523-527
  identidade, 39
  imagem, 32
  ímpar, 37
  integrável, 325
  inversa, 422-431
  linear, 38
  logarítmica de base *a*, 465
    derivada de, 466
  logarítmica natural, 439-449
    definição, 440
    derivada, 441
    inversa, 455
  maior inteiro, 43
  monótona, 237
  operações, 36
  par, 37
  periódica, 47
  polinomial, 39
  potência, 190
    derivada, para expoentes racionais, 190-194
      para expoentes reais, 467
  quadrática, 39
  racional, 39
  rendimento marginal, 170
  rendimento total, 170
  secante, 48
    derivada, 174
    integral, 453
    inversa, 502
      derivada, 507
  secante hiperbólica, 516
    derivada, 518
    inversa, 524
      derivada, 526
  seno, 46
    derivada, 173
    integral, 291
    integração de uma função racional, 567
    inversa, 496
      derivada, 504
  seno hiperbólico, 515
    derivada, 515
    integral, 519
    inversa, 523
      derivada, 526
  sinal, 74
  suave, 390
  tangente, 48
    derivada, 175
    integral, 452
    inversa, 499
      derivada, 505
  tangente hiperbólica, 516
    derivada, 518
    inversa, 524
      derivada, 526
  transcendental, 39
  valor absoluto, 41
  valor médio de uma função, 342
  zeros de, 277
Funções trigonométricas, 45-52
  continuidade, 119-122
  derivadas, 173-181
  integrais que resultam em, 510-514
  integrais, 291, 452, 453
  inversas, 496-503
    derivadas, 503-510
    integrais que resultam em, 510-514

Geometria, analítica, 13
  fórmulas, F-1
Geratriz de um cone, 578
Gráfico(s)
  de equações em coordenadas polares, 614-625
  de uma equação em R^2, 20
  de uma função, 33, 40-44
    esboços, 254
  reflexão, 428
  simetria, 29
Gravidade, aceleração devida à, 309
Gudermaniana, 528
Gudermann, Christoph, 528

Hermite, Charles, 456
Hipérbole, 594-604
  assíntotas de, 598
  centro de, 596
  conjugada, 599
  definição de, 594
  degenerada, 601
  eixo principal de, 596
  eixo transversal de, 596
  eixos conjugados de, 596
  eqüilátera, 597
  focos de, 594
  retângulo auxiliar de, 599
  unitária, 521
  vértices de, 596
Hipótese, 2

Identidade fundamental de Pitágoras, 47
Identidades trigonométricas fundamentais, 49
Imagem de uma função, 32,
Inclinação, 49
Incremento, 139, 144
Índice da somatória, 313
Inflexão, ponto de, 244
Integração. *Veja também* Integrais.
  constante de, 348
  de funções racionais de seno e co-seno, 567
  de funções racionais por frações parciais, 551-566
    o denominador contém fatores quadráticos, 561-566
    o denominador tem somente fatores lineares, 551-561
  de potências de seno e co-seno, 537-542
  de potências de tangente, co-tangente, secante e co-secante, 542-545
  limites de, 326
  por partes, 531-537
    fórmula de, 531
  por substituição trigonométrica, 545-551
  substituições, 566-570
  técnicas de, 529-576
  numérica, 359-369
Integrais. *Veja também* Integração.
  definidas, 324-331
    aplicações, 373-420
    definição, 326
    propriedades, 331-340
  impróprias, 665-677
    com extremos infinitos de integração, 665, 673
    convergente, 666, 674
    divergente, 666, 674
  indefinida, 326, 348
Integrando, 326
Inteiros, 2
Intercepto de uma reta, 18, 19
Intersecção de conjuntos, 3
Intervalo
  aberto, 6
  extremos, 6
  fechado, 6
  partição de, 324
  semi-aberto à direita, 6
  semi-aberto à esquerda, 6

Invariante, 606
Inversa de uma função, 425
    derivada de, 433
Invólucro cilíndrico, no cálculo de volumes, 383

Joule, 408
Juros compostos continuamente, 475

Kirchhoff, Gustav, 488

L'Hôpital, Guillaume François de, 650
Lados de um ângulo, 45
    final, 45
    inicial, 45
Lagrange, Joseph, XV, 144, 678
Lâmina, 401
Lâmina homogênea, 403
Laplaciano, 1063
Latus rectum da parábola, 579
Lei de ação das massas, 558
Lei de Hooke, 409
Lei do crescimento natural, 470
Lei do decaimento natural, 470
Lei do resfriamento de Newton, 487
Leibniz, Gottfried Wilhelm, XV, 145, 344
Lemniscata, 621, 625
Libby, Willard, 481
Limaçon, 618
    com um dente, 619
    com um laço, 619
    convexa, 619
Limite(s)
    à direita, 73
    à esquerda, 74
    no infinito, 88-98
    bilateral, 74
    de uma função, 56-63
      teoremas, 64-73, 131-134
    de uma soma de Riemann, 325
    inferior, de integração, 326
      de uma somatória, 313
    infinitos, 78-88
    laterais, 73-78
    superior, de integração, 326
      de uma somatória, 313

Maclaurin, Colin, 678
Marginal, conceito de variação, 169
Massa, 394
    centro de, 394-400, 403, 1023
    momento de, 395, 398, 402, 403
Média de variação, 169
Medida, 317
Medida em radianos, 45
Meia-vida, 472
Método de aproximação de Newton, 277-281
Método dos anéis circulares, para volume, 379
Momento de massa, 395, 398, 402, 403
Monopólio, 268
Movimento
    curvilíneo, 832
    harmônico simples, 209
    retilíneo, 163-166, 207-209, 307-310
Multiplicação, 2
Negativo, 2
Newton, 394
Newton, Sir Isaac, XV, 145, 277, 344
Nicomedes, concóide de, 625
Norma de partição, 324
Notação construtiva de conjunto, 3
Número(s)
    críticos, 217
    irracionais, 3
    racionais, 2
    reais, 2
    transcendentais, 456

Operações inversas, 286
Ordem de uma equação diferencial, 303
Ordenada, 13
Origem, 5, 13

Par ordenado, 13
Parábola, 28, 578
    degenerada, 584
    diretriz de, 578
    eixos de, 579
    foco de, 578
    latus rectum de, 579
    vértice de, 28, 579
Paralelepípedo retangular, 374
Partição
    de um intervalo, 324
    norma de, 324
    regular, 327
Período de uma função, 47
Plano numérico, 13
Polinômio de Maclaurin, 678
Polinômio de Taylor, 678
Pólo, 609
Ponto, 13
    de inflexão, 244
    médio de um segmento de reta, 16
    reflexão de, 428
    simetria em relação a, 29
Pontos colineares, 21
Posição padrão de um ângulo, 45
Pressão líquida, 413-418
Primeiro teorema fundamental do Cálculo, 345
Princípio de Pascal, 414
Produto, 2
    de funções, 36
    de duas funções, derivada de, 159
Propriedade transitiva da ordem, 4
Prova, 2

Quadrantes, 13
Quociente de funções, 36
    de duas funções, derivada de, 160

R^2, 13
    gráfico de uma equação em, 20
Radiano hiperbólico, 522
Raio de uma circunferência, 25
Recíproco, 2
Reflexo, de um gráfico, 428
    de um ponto, 428
Regra da cadeia, 183
    para a antidiferenciação, 296
Regra de L'Hôpital, 652, 656, 660, 661
Regra de Simpson, 365
Regra do trapézio, 361
Regra parabólica, 363
Rendimento marginal, 170
Repetição periódica, 3
Resto na fórmula de Taylor, forma integral, 683
      forma de Lagrange, 678
Reta(s)
    equações em R^2, 18
      forma ponto-inclinação, 18
      forma inclinação-intercepto, 18
    inclinação, 17
    normal, 142
    numérica, 5
    numérica real, 5
    paralelas, 20
    perpendiculares, 21
    polar, 609
    secante, 139
    simetria em relação a, 29
    tangente, 140, 981
      a um gráfico, inclinação de, 140
      a curvas em coordenadas polares, 638-647
Retângulo auxiliar de uma hipérbole, 599
Revolução,
    eixo de, 376
    sólido de, 376
      volume de, 376-388
Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 324
Rolle, Michel, 230
Rosácea, 620
Rotação de eixos, 604-608

Secção cônica, 577
Segmento de reta, ponto médio de, 16
Segunda lei de Kirchhoff, 488
Segundo teorema fundamental do Cálculo, 347
    de desigualdades, 4
Séries infinitas, de Maclaurin, 678
Sigma Σ, 312
Simetria, de um gráfico, 29
    teste, 29
Sistema de coordenadas polares, 608
Sistema numérico real, 2
Sólido de revolução, 376
    volume, 376-388
Solução completa de uma equação diferencial,
    304, 482
Soma, 2
    de duas funções, derivada de, 158
    de funções, 35
    limites de, 313
    Riemann, 324

Somatória, índice, 313
Stirling, James, 678
Subconjunto, 3
Substituição trigonométrica,
    integração por, 545-551
Subtração, 2

Tabela de integrais, F-3
Taxa de variação, derivada como, 167
    relativa, 172
    instantânea, 167
Taxa efetiva de juros, 475
Taxa relativa de variação, 172
Taxas relacionadas, 199-205
Taylor, Brook, 677
Teorema, 2
Teorema da função inversa, 432, 433
Teorema da unicidade, 63
Teorema de existência, 698
Teorema de Green, 1082-1095
Teorema de Rolle, 231
    e teorema do valor médio, 230-236
Teorema do sanduíche, 114
Teorema do valor extremo, 222
Teorema do valor intermediário, 111
Teorema do valor médio, 232
    para integrais, 341
    e o teorema de Rolle, 230-236
Teorema do valor médio de Cauchy, 653
Teoremas fundamentais do Cálculo, 344-352
    primeiro, 345
    segundo, 347
Teste(s)
    da derivada primeira para extremos
    relativos, 238
    da derivada segunda para extremos
    relativos, 250
Trabalho, 407-413
Translação de eixos, 581
Trigonometria, fórmulas, F-2

União de conjuntos, 3

Valor absoluto, 8
Valor máximo de uma função, 217-224
    absoluto, 220
    relativo, 217
Valor médio de uma função, 342
Valor mínimo de uma função, 217-224
    absoluto, 220
    relativo, 217
Variáveis, 3, 32
    dependentes, 32
    independentes, 32
Velocidade instantânea, 165
Vértice, de um ângulo, 45
    de um cone, 578
    de uma parábola, 28, 579
Vértices, de uma elipse, 588
    de uma hipérbole, 596
Volume
    de um sólido de revolução, 376-388
        por invólucros cilíndricos, 383-388
        por discos, 377
        por anéis circulares, 379
    de um sólido por corte, 375

Wallis, John, XV
Weierstrass, Karl, XV

Zeros de uma função, 277

Impressão e acabamento:
GRÁFICA PAYM
Tel. (011) 4392-3344

ISBN 85-294-0094-1

9 788529 400945

99,00